

ОБ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ В ДВУХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ¹

К. В. МЕЛИКОВ

(Ленинград)

1. При рассмотрении изгиба балки или стержня в технических задачах применяется приближенное уравнение изогнутой оси, в котором выражение для кривизны

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

заменяется второй производной ординаты y . Эта замена всегда оговаривается и надлежащим образом обосновывается.

Иначе обстоит дело с другим упрощающим задачу допущением. При рассмотрении балки с „опертыми“ концами необходимо иметь в виду, что реакции опор при изгибе не останутся перпендикулярными к линии, соединяющей точки опор, а получают составляющие вдоль по этой линии; именно, в предположении „гладких“ опор они будут *нормальны* к кривой изогнутой оси балки. В таких же условиях будет находиться гибкий вал, вращающийся в подшипниках Селлерса, в которых он может скользить и поворачиваться вокруг осей, перпендикулярных плоскости изгиба. Это обстоятельство обычно не принимается во внимание, и опорные реакции считаются перпендикулярными к оси неизогнутого стержня.

Задача об изгибе гибкого вала действием центробежной силы заклиненной на нем массы затрагивается между прочим в статьях Мизеса² и Малкина.³

¹ После окончания работы автору стала известна статья E. Schwerin'a, помещенная в V томе „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, из которой как частный случай могут быть получены результаты автора. Но так как в статье Schwerin'a не имеется числовых таблиц, являющихся главной целью настоящей работы, то последняя, повидимому, должна представлять и самостоятельный интерес.

² R. v. Mises, Monatshefte f. Math. und Phys., 22, 1911, 33—52.

³ J. Malkin, Zur Stabilitätsfrage rotierender elastischer Stäbe. Math. Ann., 101, 1929, 1—60.

Мизес рассматривает изгиб вращающегося вала в двух случаях: во-первых, когда оба конца его „оперты“ и посередине имеется сосредоточенная масса, и во-вторых, когда один конец „заделан“ и масса находится на конце. Вторым случай для нас интереса не представляет, в первом же автор безоговорочно считает реакции перпендикулярными прямой, проходящей через точки опор. Малкин, наоборот, принимает во внимание изменение направлений реакций, но допускает другую неточность: пользуясь решением, данным Заальшютцом,¹ он не учитывает, что в этом решении неизменной остается длина стержня, в его же задаче должно неизменным оставаться расстояние между подшипниками.

В настоящей заметке дается точное решение задачи, рассмотренной Малкиным, и попутно получается решение для двух более простых случаев изгиба стержня, именно, изгиба *постоянной* сосредоточенной силой, причем приведенные для этого случая таблицы числовых значений позволяют судить о пределах применимости приближенных формул сопротивления материалов и для случая вполне центрированной массы.

2. Введем две системы координатных осей с общим началом в левой опоре. В первой ось Ox идет по прямой, соединяющей точки опор, ось Oy ей перпендикулярна, лежит в плоскости изгиба и направлена противоположно действию силы P . Во второй системе ось $O\xi$ направлена по касательной к изогнутой оси стержня, ось $O\eta$ ей перпендикулярна, лежит в плоскости изгиба и направлена в сторону вогнутости кривой изгиба. Далее введем обозначения:

- $2l$ — расстояние между опорами;
- θ — угол, составляемый касательной к кривой с осью Ox ;
- ψ — угол, составляемый касательной к кривой с осью $O\xi$;
- $\alpha = |\theta_0|$ — абсолютное значение угла θ в левой опоре;
- f — стрела прогиба, $f = |y_l|$;
- ξ_l, η_l — координаты середины стержня;
- P — сосредоточенная сила, действующая на стержень; в первом случае $P = m\omega^2(f + e)$, во втором $P =$ постоянной;
- \bar{R} — опорная реакция;
- \bar{R}_1 и \bar{R}_2 — составляющие \bar{R} , $R_1 = \frac{P}{2}$;
- EJ — жесткость стержня.

При этих обозначениях, очевидно, имеем:

$$R = \frac{R_1}{\cos \alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha}, \quad \psi_l = \alpha, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \xi_l &= l \cos \alpha + f \sin \alpha, \\ \eta_l &= l \sin \alpha - f \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня будет:

$$EJ \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{P}{2 \cos \alpha} \xi.$$

¹ L. S a a l s c h ü t z, Der belastete Stab, B. G. Teubner, 1880.

Замечая, что

$$\frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{d\xi} \frac{\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}},$$

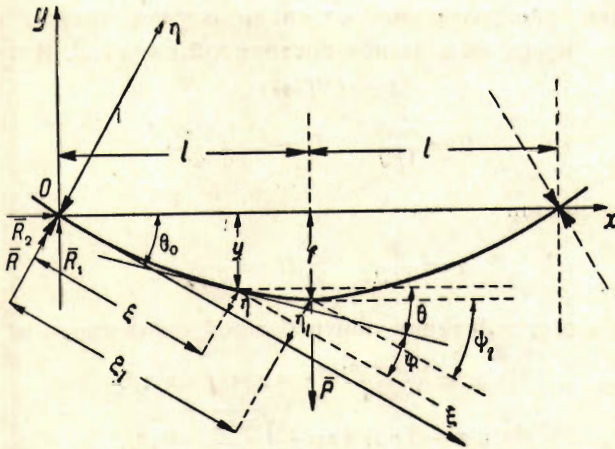
после интегрирования получим:

$$\frac{\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}} = \frac{A}{\cos \alpha} \xi^2, \tag{2_1}$$

или

$$\sin \psi = \frac{A}{\cos \alpha} \xi^2.$$

Здесь для сокращения положено $A = \frac{P}{4EJ}$.



Фиг. 1.

Полагая далее $\frac{A}{\cos \alpha} = B$, из (2₁) находим:

$$\eta' = \frac{B\xi^2}{\sqrt{1 - B^2\xi^4}}$$

и далее, интегрируя,

$$\eta = B \int_0^\xi \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1 - B^2\xi^4}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_0^\zeta \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^4}} = \tag{\zeta = \sqrt{B}\xi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B}} \int_0^z \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 + \zeta^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{B}} \int_1^z \frac{(1 - z^2) dz}{\sqrt{(1 - z^2)(2 - z^2)}} = \tag{1 - \zeta^2 = z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2B}} \int_0^z \frac{(1 - z^2) dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \tag{k^2 = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2B}} \left[\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} - 2 \int_0^z \frac{(1 - k^2 z^2) dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} - K + 2E \right],$$

или $\eta = \frac{1}{\sqrt{2B}} [F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k) - K + 2E] \tag{3_1}$

$$\sin \varphi = z = \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{1 - B\xi^2} \tag{3_2}$$

Здесь $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в нормальной форме Лежандра, K и E — соответствующие полные интегралы.

3. Полагая в (2₂), (3₂) и (3₂) $\xi = \xi_l$, мы в силу (1₁) и (1₂) получим:

$$\sin \alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \xi_l^2 = \frac{A}{\cos \alpha} (l \cos \alpha + f \sin \alpha)^2, \quad (4_1)$$

$$\xi_l^2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{A}$$

$$\sin \varphi_l = \sqrt{1 - B \xi_l^2} = \sqrt{1 - \sin \alpha}, \quad (4_2)$$

$$l \sin \alpha - f \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2B}} [F(\arcsin \sqrt{1 - \sin \alpha}, k) - \quad (4_3)$$

$$- 2E(\arcsin \sqrt{1 - \sin \alpha}, k) - K + 2E].$$

В дальнейшем рассматриваем отдельно случаи изгиба под действием центробежной силы массы m и изгиба постоянной силой \bar{P} . В первом случае

$$A = C(f + e),$$

где

$$C = \frac{m\omega^2}{4EJ}, \quad B = \frac{C(f + e)}{\cos \alpha},$$

а во втором, как и раньше

$$A = \frac{P}{4EJ}, \quad B = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

4. При изгибе под действием центробежной силы имеем из (4₁) и (4₂):

$$\sin \alpha = \frac{C(f + e)}{\cos \alpha} (l \cos \alpha + f \sin \alpha)^2, \quad (5_1)$$

$$l \sin \alpha - f \cos \alpha = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2C}(f + e)} \Phi(\alpha), \quad (5_2)$$

где через $\Phi(\alpha)$ обозначено выражение, стоящее в (4₃) в прямых скобках. Извлекая в (5₁) из обеих частей квадратный корень и деля почленно (5₂) на (5₁), получим:

$$\frac{l \sin \alpha - f \cos \alpha}{l \cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha}},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \lambda}{1 - \lambda \operatorname{tg} \alpha} = \Psi(\alpha),$$

где

$$\lambda = \frac{f}{l} \quad \text{и} \quad \Psi(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha}}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$\frac{f}{l} = \lambda(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \Psi(\alpha)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \Psi(\alpha)}. \quad (6_1)$$

Для определения α по заданным значениям C и l воспользуемся (5₁), откуда:

$$Cl^3 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\left(\lambda + \frac{e}{l}\right) (\cos \alpha + \lambda \sin \alpha)^2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\left(\lambda + \frac{e}{l}\right) (1 + \lambda \operatorname{tg} \alpha)^2}. \quad (6_2)$$

В частном случае вполне центрированной массы имеем:

$$Cl^3 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\lambda(\alpha) [1 + \lambda(\alpha) \operatorname{tg} \alpha]^2}. \quad (6_3)$$

Правая часть представляет известную функцию α , которая может быть табулирована при посредстве таблиц эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода (табл. I).

Тогда по заданным l и C , т. е. l, m, ω, E и J , мы находим угол α ; после этого из (6₁) находим соответствующее значение отношения $\frac{f}{l}$ (табл. II, 5-й столбец).

5. При изгибе под действием постоянной силы (4₁) и (4₃) дает:

$$l \cos \alpha + f \sin \alpha = \frac{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\sqrt{A}},$$

$$l \sin \alpha - f \cos \alpha = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2A}} \Phi(\alpha),$$

Таблица I

α	C13	α	C13
1°	1.49979	12°	1.42677
2	1.49891	13	1.41378
3	1.49572	14	1.40042
4	1.49136	15	1.38619
5	1.48691	20	1.30250
6	1.48153	25	1.20087
7	1.47448	30	1.08555
8	1.46701	35	0.96034
9	1.45838	40	0.83106
10	1.44826	45	0.70111
11	1.43783	50	0.57489

откуда для определения $\lambda = \frac{f}{l}$ мы имеем уравнение, совпадающее с уравнением (6₁):

$$\frac{f}{l} = \lambda(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \Psi(\alpha)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \Psi(\alpha)}, \tag{7_1}$$

а для определения α по заданным значениям A и l :

$$l \sqrt{A} = \frac{\sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} + \Phi(\alpha) \right\}. \tag{7_2}$$

Для определения стрелы прогиба f можно воспользоваться также равенством

$$f = \sqrt{\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{A}} - l \operatorname{cotg} \alpha. \tag{7_3}$$

Пользуясь таблицами эллиптических интегралов, легко табулировать правую часть (7₂). Тогда по заданным l и A , т. е. l, p, E, J , мы находим угол α , после этого из (7₁) или (7₃) находим соответствующее значение отношения $\frac{f}{l}$ или стрелу прогиба f .

6. Для выяснения пределов применимости приближенных формул сопротивления материалов в последнем из рассмотренных нами случаев, т. е. при изгибе сосредоточенной постоянной силой, приложенной в середине стержня, сравниваем величины, получаемые для отношения $\frac{f}{l}$ и угла α по точным и приближенным формулам для одного и того же стержня при одной и той же нагрузке.

Приближенные формулы сопротивления материалов дают:

$$f_1 = \frac{pl^3}{6EJ} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{pl^2}{4EJ},$$

или в принятых выше обозначениях:

$$\frac{f_1}{l} = \frac{2}{3} Al^2 \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_1 = Al^2.$$

Сводя результаты в таблицу, мы получим:

Таблица II

α	$l\sqrt{A}$	α_1	Ошибка в %	$\frac{f}{l}$	$\frac{f_1}{l}$	Ошибка в %
1°	0.13208	0°59'9"	0.17	0.011640	0.011630	0.09
2	0.18672	1 59.8	0.17	0.023282	0.023243	0.16
3	0.22851	2 59.3	0.4	0.034883	0.034811	0.2
4	0.26358	3 58	0.8	0.04656	0.04632	0.5
5	0.29429	4 57	1.0	0.05825	0.05774	0.9
6	0.32183	5 55	1.4	0.06991	0.06905	1.2
7	0.34693	6 52	1.9	0.08163	0.08024	1.7
8	0.37003	7 48	2.5	0.09334	0.09128	2.2
9	0.39146	8 43	3.1	0.10507	0.10216	2.8
10	0.41144	9 36	4.0	0.11686	0.11285	3.4
11	0.43013	10 29	4.4	0.12867	0.12334	4.1
12	0.44767	11 20	5.6	0.14050	0.13361	4.9
13	0.46416	12 9	6.5	0.15238	0.14363	5.7
14	0.47968	12 57	7.5	0.16429	0.15339	6.6
15	0.49429	13 44	8.4	0.17626	0.16288	7.6
20	0.55542	17 9	14	0.23682	0.20566	13
25	0.59929	19 45	21	0.29906	0.23943	20
30	0.62807	21 32	28	0.36338	0.26298	28
35	0.64297	22 28	36	0.43049	0.27561	36
40	0.64504	22 35	44	0.50067	0.27738	45
45	0.63493	21 57	51	0.57498	0.26875	53
50	0.61335	20 37	59	0.65438	0.25080	62

**ÜBER DIE BIEGUNG EINES STABES
DURCH EINE KONZENTRIERTE KRAFT
IN ZWEI SONDERFÄLLEN**

K. MELKOFF

(Leningrad)

(Zusammenfassung)

Es wird die Aufgabe der Durchbiegung eines Stabes unter Einzellast in der Mitte erörtert, vorausgesetzt, dass die Enden des Stabes abgestützt sind und sich frei drehen können. Beim Lösen der Aufgabe wird ein genauer Ausdruck für die Krümmung der Stabachse angenommen und damit gerechnet, dass die Stützreaktionen im Falle glatter Lager normal zur gekrümmten Achse, nicht aber zu der die Stützpunkte verbindenden Geraden verlaufen werden. Gleiche Formeln werden zur Berechnung zweier Sonderfälle angewandt: für den Fall der Fliehkraft einer vollkommen zentrierten Masse und den einer konstanten Kraft.

Die Aufgabe über Biegung unter einer vorhandenen Fliehkraft mit Berücksichtigung einer Drehung der Stützreaktionen ist ebenfalls von Malkin erörtert worden (Math. Annalen, **101**, 1929), jedoch die seitens Malkin von Saalschütz übernommene Lösung setzt die Länge des Stabes als konstant voraus, während im Falle einer rotierenden Welle als konstant der Abstand zwischen den Lagern zu betrachten ist.
