АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ЗАМЕТКИ

О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ, ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ КОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНО КРИВОЙ $x = k\sqrt{y}\,(1-y)$

Д. Ю. ПАНОВ

1. Задача о кручении стержня, поперечное сечение которого ограничено кривой $x = k\sqrt{y}\,(1-y)$ или, более обще, двумя кривыми $x = k_1\sqrt{y}\,(1-y)$ и $x = k_2\sqrt{y}\,(1-y)$, была приближенно решена Л. С. Лейбензоном [1][1] при помощи метода Ритца. Полученная им формула для геометрической жесткости кручения $T\,[\text{см}^4]$ такого стержня может быть написана в виде:

$$T = 0.009234\,\frac{(k_1-k_2)^3}{1+\frac{11}{39}(k_1{}^2-k_1k_2+k_2{}^2)}, \tag{1}$$

если исправить вычислительную ошибку, замеченную В. П. Ветчинкиным [2] Насколько точна эта приближенная формула, оставалось до сих пор неизвестным. В этой заметке мы предполагаем получить при помощи другого метода приближенную формулу более точного характера и дать некоторую оценку точности этой формулы.

2. В нашей заметке [3] был указан метод получения решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных в виде ряда по степеням параметра λ, введенного в уравнение границы области. Решая задачу кручения для области, ограниченной кривыми

$$\begin{aligned} x &= \lambda\sqrt{y}\,(1-y) = \lambda f(y), \\ x &= \lambda k\sqrt{y}\,(1-y) = \lambda k f(y) \quad (|k| \leqslant 1), \end{aligned} \tag{2}$$

мы получаем функцию напряжений $\varphi(x, y)$ (полагая $G = \tau = 1$) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = \{-\lambda^2 k f^2(y) + \lambda(1+k) f(y)\,x - x^2\} + \Big\{\lambda^2\Big[\frac{1}{2}D^2 f^2(y)\Big] \times \\ \times [\lambda^2 k f^2(y) - \lambda(1+k) f(y)\,x + x^2] - \frac{1}{6}(1+k)\,[D^2 f(y)] \times \\ \times [\lambda^4(1+k)\,k f^3(y) - \lambda^3(1+k+k^2) f^2(y)\,x + \lambda x^3]\Big\} + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Цифры в прямых скобках соответствуют порядковым нумерам списка литературы (в конце заметки).

Так как

$$T=2\iint\limits_S \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

находим:

$$T=\frac{32}{3465}\lambda^3(1-k)^3-\frac{32\cdot 11}{3465\cdot 39}\lambda^5(1-k+k^2)(1-k)^3+O(\lambda^7)=$$
$$=\frac{32}{3465}\lambda^3(1-k)^3\left[1-\frac{11}{39}\lambda^2(1-k+k^2)\right]+O(\lambda^7). \tag{4}$$

Так как для малых λ

$$1-\frac{11}{39}\lambda^2(1-k+k^2)=\frac{1}{1+\frac{11}{39}\lambda^2(1-k+k^2)}+O(\lambda^4),$$

то окончательно получаем, полагая $k_1=\lambda$, $k_2=\lambda k$,

$$T=\frac{32}{3465}\frac{(k_1-k_2)^3}{1+\frac{11}{39}(k_1{}^2-k_1k_2+k_2{}^2)}+O(k_1{}^7). \tag{5}$$

Из этой формулы видно, что множитель 0.009234 формулы (1) должен быть заменен через $\frac{32}{3465}=0.00923521$. Сравнение этих множителей показывает, что формула Л. С. Лейбензона дает первые два члена общей формулы (4) с очень хорошей точностью.

Полагая $k=k_1=-k_2$ (случай симметричного сечения), получаем из (5):

$$T=\frac{256}{3465}\frac{k^3}{1+\frac{11}{13}k^2}+O(k^7). \tag{6}$$

Коэффициент $\frac{256}{3465}$ в этой формуле был нами получен из других соображений в нашей заметке [4]. Чтобы получить представление о величине остаточного члена, можно подсчитать еще один член разложения (4).

Для симметричного профиля это даст:

$$T=\frac{256}{3465}\frac{k^3}{1+\frac{11}{13}k^2}+\frac{7936}{83655}k^7+O(k^9). \tag{7}$$

Таким образом остаточный член этой формулы приблизительно таков:

$$R=0.09k^7+O(k^9).$$

Очевидно, при малых k (в практических интересных случаях $k<0.5$) выведенные формулы будут давать очень хорошую точность.

Центральный аэро-гидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского

Москва
18/VI—1935 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон. Труды ЦАГИ № 8, 1924.
[2] В. П. Ветчинкин. Теория гребных винтов, стр. 453, Москва, 1926 (литогр.).
[3] Д. Ю. Панов. ДАН № 2, т. III, (VIII), стр. 63, 1935.
[4] Д. Ю. Панов. ДАН № 3, т. III, стр. 162, 1934.

ON THE TORSION OF BEAMS WITH A CROSS-SECTION LIMITED BY THE CURVE $x=k\sqrt{y}\,(1-y)$

D. PANOV

(Summary)

In the present note we obtain a formula for the geometrical torsional stiffness of a beam with the cross-section limited by two curves $x=k_1\sqrt{y}\,(1-y)$ and $x=k_2\sqrt{y}\,(1-y)$ and evaluate the degree of accuracy of this formula.