АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

Department of Technical sciences
Section of Technical Mechanics

Отделение технических наук
Группа технической механики

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОКОЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА [1]

П. Ф. ПАПКОВИЧ

(Ленинград)

Настоящая работа имеет целью: 1) дать краткий обзор имеющихся общих решений основных дифференциальных уравнений теории упругости и сопоставить их друг с другом; 2) несколько подробнее остановиться на значении 4-й гармонической функции, входящей в общий интеграл однородных уравнений Ламе, и 3) отметить некоторые ошибки, которые имеют тенденцию удерживаться в нашей литературе.

Для ясности отметим, что речь здесь будет итти лишь о решении основных дифференциальных уравнений *покоящегося* упругого тела, которые в векториальном написании имеют вид

$$\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} = -\frac{1}{G} \mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ есть искомый вектор перемещения

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w, \tag{2}$$

а $\mathbf{F}$ есть заданный вектор объемных сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z. \tag{3}$$

1^0. Начнем с ошибки, в которую мы впали сами.

В статье нашей: „Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции“ [2] мы попытались обобщить решение акад. Б. Г. Галеркина:

$$\mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{W} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W}, \tag{4}$$

на случай действия объемных сил, отличных от нуля.

---

[1] Статья, являющаяся изложением доклада, читанного осенью 1935 г. в Ленинградском механическом обществе.

[2] ИМЕН, стр. 1425, 1932.

Как известно, Б. Г. Галеркин показал, что в случае отсутствия объемных сил вспомогательный вектор $\mathbf{W}$ должен удовлетворять уравнению:

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{W} = 0, \tag{5}$$

т. е. быть бигармоническим.

Нам без труда удалось показать, что при наличии объемных сил вспомогательный вектор $\mathbf{W}$ вместо уравнения (5) должен удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{W} = -\frac{1}{G} \mathbf{F}. \tag{6}$$

Оказывается, однако, что это решение не ново. Оно было получено пятьдесят лет назад Буссинеком.

Интересно, однако, что Буссинек не утверждал общности своего решения (4), (6). Тем местом знаменитого сочинения „Applications des potentiels....", которое относится к этому вопросу, является примечание к стр. 281. Мы приводим здесь это примечание без всяких изменений.

Sur un type presque évident d'intégrales des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité, qui comprend tous ceux dont il est tiré parti dans cette Étude.

Je m'aperçois au moment de l'impression de cette feuille (12 Juillet 1883) qu'en superposant trois solutions analogues à (175 bis), de manière à en composer une nouvelle symétrique en x, y, z, les valeurs trouvées alors pour u, v, w donnent l'idée du type très général:

$$(u, v, w) = -\frac{dH}{d(x, y, z)} + \nabla^2 (A, B, C), \tag{a}$$

où A, B, C désignent trois fonctions de x, y, z satisfaisant respectivement aux trois relations:

$$\nabla^2 \nabla^2 (A, B, C) = -\frac{(X, Y, Z)}{\mu} \tag{a'}$$

et où H est une fonction auxiliaire, vérifiant l'équation

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \nabla^2 H = \frac{d\nabla^2 A}{dx} + \frac{d\nabla^2 B}{dy} + \frac{d\nabla^2 C}{dz}. \tag{a''}$$

Or, on serait arrivé de suite à ces formules (a), (a'), (a'') si, partant des équations (177) (p. 277), on s'était proposé de les vérifier par les valeurs (a) de u, v, w, formées au moyen de quatre fonctions A, B, C, H, comme les sont dans (177), X, Y, Z, au moyen des quatre fonctions $-\mu u$, $-\mu v$, $-\mu w$, $(\lambda + \mu)\,\theta$, et où la quatrième fonction H serait liée aux trois premières A, B, C par une relation analogue à celle qui existe entre θ et u, v, w. Par conséquent dans un cours sur la théorie de l'élasticité on pourrait donner le système d'intégrales (a), (a'), (a''), dont la vérification est immédiate, aussitôt après avoir démontré les équations indéfinies d'équilibre (177). On en déduit: 1° le type (175 bis), en prenant

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \varphi, \quad H = \frac{d\varphi}{dz};$$

2^0 le type (E) [page 198], qui comprend tous ceux que nous avons utilisés dans les paragraphes précédents de ce mémoire, en posant

$$\nabla^2(A, B, C) = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad H = z\Phi,$$

où Φ désignerait une fonction telle que l'on êut

$$\nabla^2 \Phi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\nabla^2 H = 2\frac{d\Phi}{dz}.$$

Нужно отметить, что уравнения (177) [стр. 277], упоминаемые здесь, суть не что иное, как уравнение Ламе (1).

Как видно из этого примечания, Буссинек не считал свое решение *общим* решением уравнений Ламе. Он лишь отметил, что в нем заключаются как частные случаи все те решения, которые рассмотрены им в упомянутом его сочинении. Он не приводил также развернутых выражений для компонентов напряжения, вытекающих из решения (4), (6).

Эти последние выражения получены впервые акад. Б. Г. Галеркиным, притом не путем интегрирования уравнений Ламе, а путем непосредственного определения напряжений.[1]

Что решение (4), (5) есть *общее* решение однородных уравнений равновесия изотропного упругого тела, высказано впервые также, повидимому, лишь в упомянутых работах Б. Г. Галеркина.

В своей недавно изданной книге[2] Г. В. Колосов приписывает решение Буссинека (4), (6) Б. Г. Галеркину. Из сказанного выше видно, что это не верно, Б. Г. Галеркиным рассмотрен был лишь случай отсутствия объемных сил, заключающийся в решении Буссинека (4), (6) как частный случай.

Поскольку, однако, Б. Г. Галеркиным была впервые обнаружена полная общность решения Буссинека и тем было к нему вновь привлечено внимание, имеются все основания называть решение (4), (5) и (6) впредь решением Буссинека-Галеркина.

2°. Б. Г. Галеркин, утверждая, что решение (4), (5) есть общее решение однородных уравнений теории упругости, не дал этому доказательства. Г. В. Колосов утверждает, что вообще общность этого решения не доказана. Нам представляется, что это последнее утверждение неверно и именно в вышеупомянутой нашей работе общность решения Буссинека доказана вполне убедительно. В виду вышеупомянутого утверждения Г. В. Колосова уместно здесь остановиться несколько подробнее на этом доказательстве.

Обозначив через A величину

$$A = \frac{1}{1-2\sigma},$$

можно придать уравнению (1) вид:

$$\mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{V} + A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}. \tag{1'}$$

[1] ДАН, стр. 335, 1930; C. R. Acc. Sc. Paris, t. 120, p. 1047, 1930; ДАН, стр. 281, 1931; Вестн. мех. и прикл. мат., т. II, стр. 2; Изв. Научно-исслед. инст. гидрот., т. I, стр. 49—56, Л., 1931.

[2] Применение комплексной переменной к теории упругости, § 12, стр. 46, 1935.

Обозначив через B величину

$$B = \frac{-1}{4(1+\sigma)},$$

мы можем выражению (4) придать вид:

$$\mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{W} + B \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W}. \tag{4'}$$

В выражениях (1′) и (4′) величины A и B — переменные константы, величина коих зависит от механических качеств материала. Наиболее существенной разницей между ними является то, что A всегда положительна, в то время, как $B < 0$.

Так как, однако, у всякого реального тела $\sigma < 0.5$, то B не может принять ни при каком σ ни значения $\pm\infty$ ни значения -1.

Если бы B обратилось в $\pm\infty$, то не всякий вектор $\mathbf{V}$ можно было бы представить правой частью равенства (4′), ибо вихрь вектора

$$\nabla^2 \mathbf{W} + B \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W}$$

при $B = \pm\infty$ обращается в нуль при $B\mathbf{W}$ конечном.

Если бы B обратилось в -1, то в правой части равенства (4′) пропала бы, наоборот, часть, имеющая потенциал.

Поскольку, однако, B не обращается ни в $\pm\infty$ ни в -1 и вектор $\mathbf{V}$, определяемый равенством (4′), сохраняет свои и вихрь и дивергенцию отличными от нуля, нет никаких оснований считать, что вектор $\mathbf{V}$ не всегда можно будет представить в форме (4′), если известно, что вектор объемной силы, каков бы он ни был, можно представить в форме (1′).

Отсюда, однако, следует, что если уравнение (1′) имеет общее решение, то найти таковое всегда можно в форме (4′). Решение (4) является поэтому если не общим, то во всяком случае наиболее общим решением уравнения (1), если под $\mathbf{W}$ подразумевать в (4), конечно, общий интеграл уравнения (6).

3°. Легко видеть, что решение (4) и (6) является при этом даже излишне общим решением уравнения (1). Чтобы в этом убедиться, достаточно выяснить, с какой точностью определяется равенством (4) вектор $\mathbf{W}$, если вектор перемещения $\mathbf{V}$ во всех точках тела задан.

Мы знаем, что если уравнения теории упругости имеют общее решение, то вектор $\mathbf{V}$, определяемый уравнением (1) при $\mathbf{F}$ заданном, можно всегда, помимо уравнения (1), подчинить еще и трем известным граничным условиям на поверхности тела. Поэтому, задав в (4) вектор $\mathbf{V}$, мы должны ожидать, что $\mathbf{W}$ уравнением этим определится не однозначно: его можно будет, помимо уравнения (4), подчинить еще трем граничным условиям в каждой точке поверхности тела.

Замечание это было высказано покойным С. А. Гершгориным в одном из заседаний Ленинградского механического общества и свидетельствует о совершенно излишней общности решения Буссинека-Галеркина.

4°. Как известно, Корну[1] удалось доказать существование общего решения однородных уравнений Ламе, исходя из решения этих уравнений, которое в векториальной форме можно выписать так:

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}_1+\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{curl}\mathbf{U}_2, \tag{7}$$

где вектор $\mathbf{U}_1$ есть общий интеграл уравнения

$$\nabla^2\mathbf{U}_1=0, \tag{8}$$

а $\mathbf{U}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathbf{U}_2=-\operatorname{curl}\mathbf{U}_1. \tag{9}$$

Интересно, что это решение непосредственно вытекает из решения Буссинека-Галеркина (4), (5).

Действительно, обозначив в решении (4), (5) лапласиан вектора $\mathbf{W}$ через $\mathbf{U}$, будем иметь:

$$\nabla^2\mathbf{W}=\mathbf{U} \tag{10}$$

и

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{W}, \tag{11}$$

где

$$\nabla^2\mathbf{U}=0. \tag{12}$$

Но

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{W}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{W}+\nabla^2\mathbf{W}=\mathbf{U}+\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{W},$$

поэтому равенству (11) можно также придать вид:

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(1-\frac{1}{2(1-\sigma)}\right)-\frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{W},$$

или, что то же,

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}_1-\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{W}_1, \tag{13}$$

где знаками $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{W}_1$ обозначены вектора:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{U}_1&=\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\mathbf{U},\\ \mathbf{W}_1&=\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\mathbf{W}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

При этом в силу (10) и (12) будет, конечно,

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{U}_1&=0,\\ \nabla^2\mathbf{W}_1&=\mathbf{U}_1.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Обозначим теперь $\operatorname{curl}\mathbf{W}_1$ через $-\mathbf{U}_2$. Тогда (13) обратится в

$$\mathbf{V}=\mathbf{U}_1+\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{curl}\mathbf{U}_2,$$

где в силу (15) будет:

$$\nabla^2\mathbf{U}_2=-\nabla^2\operatorname{curl}\mathbf{W}_1=\operatorname{curl}\mathbf{U}_1,$$

причем

$$\nabla^2\mathbf{U}_1=0.$$

[1] Handbuch der Physik, Bd. VI, стр. 125, 1928.

В полученном только что решении нетрудно узнать решение Корна (7), (8), (9).

Таким образом, можно считать доказанным, что решение Корна действительно вытекает из решения Буссинека-Галеркина (4), (5).

Корн, очевидно, стремился устранить в своем решении излишнюю общность решения (4), (5). Это им достигнуто путем введения в рассмотрение не самого вектора **W**, а его лапласиана, а также посредством того, что под $\mathbf{U}_2$ Корн подразумевал не общий интеграл уравнения (9), а определенное частное его решение, даваемое ньютоновым потенциалом вектора curl $\mathbf{U}_1$.

Решение Корна было им использовано для доказательства существования общего решения однородных уравнений теории упругости, но для решения практических частных задач, насколько нам известно, использовано пока не было.

5°. Тот прием, с помощью которого Корн устранил излишнюю общность решения Буссинека-Галеркина, является, однако, не единственным, ведущим к этой цели. Как показано было в нашей работе, упомянутой выше, это, в частности, может быть достигнуто путем введения в рассмотрение лапласиана вектора **W** (в этом новое решение сходится с решением Корна) и дивергенции его (а не вихря, как у Корна). Этот последний прием устранения излишней общности решения Буссинека-Галеркина имеет некоторое преимущество по сравнению с приемом Корна, так как вместо рассмотрения в общем шести функций, входящих в решение Корна (три составляющие вектора $\mathbf{U}_1$ и столько же составляющих вектора $\mathbf{U}_2$), удается ограничиться рассмотрением лишь четырех функций (три составляющих лапласиана **W** и div **W**).

Далее, связь между div **W** и составляющими $\nabla^2 \mathbf{W}$ проще, чем связь между $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ в решении Корна, а именно, в решении Корна составляющие вектора $\mathbf{U}_2$ получаются из $\mathbf{U}_1$ путем нахождения ньютоновых потенциалов вихря вектора $\mathbf{U}_1$, между тем как div **W** может быть выражена через составляющие $\nabla^2 \mathbf{W}$ с точностью до произвольной гармонической слагающей *алгебраически.*

Решение, предложенное нами для случая отсутствия объемных сил в упомянутой выше статье, выписывается так:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} + \varphi), \tag{16}$$

где $\mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{W}$ есть произвольный гармонический вектор

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}\varphi_1 + \mathbf{j}\varphi_2 + \mathbf{k}\varphi_3, \tag{17}$$

все составляющие которого удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_i = 0, \tag{18}$$

а $\mathbf{B} \cdot \mathbf{R}$ есть скалярное произведение вектора **B** и вектора положения точки

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \tag{19}$$

так что

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} = x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3; \tag{20}$$

φ же произвольный гармонический скаляр, т. е. общий интеграл уравнения

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{21}$$

Решение (16), (17), (18), (21) отличается от решения, полученного совершенно иным путем в одной до тех пор не опубликованной работе проф. Г. Д. Гродского, лишь присутствием в (16) четвертой гармонической функции φ, которой в решении Г. Д. Гродского тогда не было.

В последнем номере ИМЕН[1] Г. Д. Гродский опубликовал свой вывод решения (16), причем в решении этом четвертая гармоническая функция φ теперь им сохранена.

Возникает вопрос, нужна ли она в этом решении и для чего именно.

Для правильного пользования решением (16) правильный ответ на этот вопрос очень важен. Полезно поэтому разобрать этот вопрос подробно.

6°. В решении (16) можно будет без вреда для общности решения опустить скаляр φ, если мы придем к заключению, что все то, что он прибавляет к правой части равенства (16), можно выразить и через $\mathbf{B}$. Возникает, таким образом, вопрос, существуют ли такие гармонические функции

$$\theta = \frac{1}{4(1-\sigma)} \varphi,$$

которые нельзя представить в форме равенства

$$\operatorname{grad} \theta = \mathbf{B} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \operatorname{grad} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{R}), \tag{22}$$

считая вектор $\mathbf{B}$ гармоническим.

Для ответа на этот вопрос обратим прежде всего внимание на то обстоятельство, что равенству (22) можно удовлетворить, лишь полагая

$$\mathbf{B} = \operatorname{grad} \psi, \tag{23}$$

где ψ — некоторый скаляр.

Подстановка (23) в (22) приводит к уравнению

$$\operatorname{grad} \theta = \operatorname{grad} \left(\psi - \frac{1}{4(1-\sigma)} \mathbf{R} - \operatorname{grad} \psi \right), \tag{24}$$

что будет удовлетворено, если мы положим

$$\psi - \frac{1}{4(1-\sigma)} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \theta + \operatorname{curl} \mathbf{A}, \tag{25}$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, ничего в силу (23) к вектору $\mathbf{B}$ не прибавляющий. Опуская в (25) член $\operatorname{curl} \mathbf{A}$, нетрудно видеть, что (25) может быть заменено уравнением

$$\psi - \frac{1}{4(1-\sigma)} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \theta, \tag{26}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{27}$$

Если, какова бы ни была гармоническая функция θ, можно всегда найти соответствующую ей другую *гармоническую же* функцию ψ, такую, что (26) будет удовлетворено, то по сказанному выше все прибавляемое к (16) скаляром φ

[1] ИМЕН, № 4, стр. 587, 1935.

можно выразить и через вектор **B**. Если же существуют такие гармонические функции θ, которые не могут при гармоническом ψ быть выражены через ψ с помощью (26), то, очевидно, для общности решения (16) нужно будет в последнем под φ подразумевать произвольную совокупность всех таких функций и притом только всех таких функций.

Представим функцию θ в правой части (26) разложенной в ряд по сферическим гармоникам, так что

$$\theta = \sum_k r^k Y_k(\alpha, \beta),$$

где k — всевозможные целые числа, а $Y_k(\alpha, \beta)$ — сферические гармоники географических координат α и β, и будем искать ψ в форме такого же ряда:

$$\psi = \sum_k a_k r^k Y_k(\alpha, \beta),$$

где a_k — некоторые неизвестные константы.

Из (26) будем иметь:

$$a_k\left(1 - \frac{k}{4(1-\sigma)}\right) = 1,$$

что дает для ψ:

$$\psi = \sum_k \frac{r^k}{1 - \frac{k}{4(1-\sigma)}} Y_k(\alpha, \beta).$$

Если $4(1-\sigma)$ не есть число целое, то ни один из коэффициентов этого ряда не обращается в бесконечность, и функция ψ этим рядом вполне определяется. При $4(1-\sigma)$ целом коэффициент при одном из членов этого ряда обращается в ∞. Но в пределах

$$0 < \sigma < 0.5,$$

в которых лежит пуассоново отношение реальных тел, лежит только одно значение, обращающее величину $4(1-\sigma)$ в число целое. Это $\sigma = 0.25$, когда

$$4(1-\sigma) = 3.$$

Таким образом, только при $\sigma = 0.25$ могут возникнуть затруднения с нахождением такой гармонической функции ψ, которая способна представить нам функцию $\theta = r^3 Y_3(\alpha, \beta)$ в форме (26).

Ни для одного реального тела σ не бывает известно совершенно точно, поэтому всегда можно считать σ хотя бы немного отличающейся от 0.25. При этих условиях, однако, всякую гармоническую функцию θ можно представить через другую гармоническую функцию ψ с помощью (26). По сказанному выше мы в праве поэтому считать, что сохранение в решении (16) четвертой гармонической функции φ не является необходимым для общности этого решения.

Сохраняя в решении (16) гармонический скаляр φ, мы получаем возможность искать гармонический вектор **B** из граничных условий лишь с точностью до градиента произвольного гармонического скаляра как слагаемого. Это может во многих случаях значительно упростить разыскание вектора **B** из граничных условий. Но сохраняя в правой части решения (16) функцию φ и считая **B** вектором произвольным, мы должны всегда помнить, что нами допущен в выражении (16) заведомый плеоназм, при котором все четыре гармонических функции φ_i и φ перестают определяться из граничных условий однозначно.

7°. В сказанном только что мы расходимся с мнением Г. Д. Гродского, высказанным им в § 8 его вышеупомянутой работы. Касаясь вопроса о том, определяются ли три составляющих вектора **B** и скаляр φ уравнением (16) при заданных u, v и w однозначно, Г. Д. Гродский приходит к заключению, что *ответ на этот вопрос приходится дать утвердительный при условии, что вектор* **B** *не заключает в себе составляющей, являющейся градиентом некоторого скаляра.* Из всякого вектора, не являющегося градиентом некоторого скаляра, можно, однако, всегда выделить сколько угодно таких составляющих, которые будут градиентами тех или иных скаляров. Геометрическая разность основного вектора и выделенного таким образом произвольного градиента будет каждый раз оставаться при этом, конечно, вектором, не имеющим потенциала. Принимая это во внимание, приходится заключить, что то условие, выполнение которого по Г. Д. Гродскому необходимо для однозначности определения вектора **B** и скаляра φ при заданном **V**, на самом деле никогда выполнено быть не может и, следовательно, *вектор* **B** *и скаляр* φ *не определяются* из (16) при заданном **V** однозначно.

8°. Чтобы определить, с какой точностью определяются равенством (16) при заданном **V** произвольный гармонический вектор **B** и произвольный скаляр φ, допустим, что вектор **V** нам во всех точках тела известен, и попытаемся разыскать из (16) **B** по его вихрю и градиенту.

В силу (16) имеем:

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{V},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \operatorname{div} \mathbf{V},$$

ибо, очевидно,

$$\operatorname{div} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{R}) = 2 \operatorname{div} \mathbf{B}.$$

Своим вихрем и дивергенцией вектор **B** определяется, однако, с точностью до слагаемой в виде неопределенного градиента гармонического скаляра, каковая составляющая и может быть всегда восполнена членом $\operatorname{grad} \varphi$ правой части решения (16).

Таким образом и это рассуждение показывает, что для общности решения (16) *сохранения в нем функции* φ *не требуется* (*во всяком случае при* $\sigma \neq 0.25$).

Сохранение этой функции в решении (16) может быть, однако, полезно для упрощения разыскания вектора **B** *из граничных условий,* ибо нет, конечно, никакой необходимости усложнять себе задачу разыскания этого вектора из граничных условий предъявлением дополнительного требования, чтобы все то, что может прибавить к решению скаляр φ, было обязательно выражено через вектор **B**.

Сохраняя в (16) функцию φ, ненужную для общности решения, мы облегчаем себе задачу разыскания вектора **B**, ибо получаем возможность определять его из граничных условий с точностью до составляющей в виде градиента произвольного гармонического скаляра. Но мы теряем при этом возможность разыскивать составляющие вектора **B** и функцию φ в виде рядов методом неопределенных коэффициентов, так как уравнения для определения этих коэффициентов при сохранении в решении (16) всех четырех функций не могут не быть неопределенными. При бесконечности числа разыскиваемых коэффициентов неопределенность уравнений, из которых они должны быть найдены, не может, конечно, не внести весьма существенных затруднений в задачу нахождения этих коэффициентов.

9°. Заметим, что, повидимому, имеется полная возможность доказать существование общего решения уравнений теории упругости, исходя из решения (16). Это доказательство может быть сведено к доказательству сходимости следующего процесса последовательных приближений.

Для первого приближения вектор **B** подчиняется на границах тела условию принятия им значений, заданных для вектора **V**. (Предполагается, что на границах тела заданы перемещения u, v и w.) После этого функция φ подбирается так, чтобы на границах тела для вектора $\operatorname{grad}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}+\varphi)$ отклонение производной по нормали от ее среднего значения обращалось в нуль. Затем производится разыскание поправок к составляющим вектора **B**. Эти поправки разыскиваются из условия, что эти составляющие принимают на границах тела те значения, которые на них имеет вектор

$$\frac{1}{4(1-\sigma)}\operatorname{grad}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}+\varphi),$$

найденный в предыдущем приближении. Решением вновь задачи Неймана затем находится соответствующая поправка к φ, после чего новым решением трех задач Дирихле находят новые поправки к **B** и т. д.

Так как при всяком σ, меньшем 0.5, дивергенция вектора

$$\frac{1}{4(1-\sigma)}\operatorname{grad}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}+\varphi)$$

меньше дивергенции вектора **B**, а вихрь вектора $\operatorname{grad}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{R})$ вообще равен нулю, то процесс этот имеет все шансы быть сходящимся. Так ли это на самом деле, нельзя, конечно, решить без подробного исследования, которое и было бы желательно произвести.

10°. Воздерживаясь пока от выполнения этого исследования, упомянем о работах Нейбера,[1] в которых решение (16) не только вновь выведено, но и использовано при решении отдельных частных задач.

Интересно отметить следующее данное Нейбером весьма простое доказательство того, что для сохранения решением (16) всей его общности в нем достаточно сохранить лишь три гармонические функции.

---

1 Z. A. M. M., S. 203, 1934; Z. A. M. M., S. 353, 1934; Ingenieur Archiv, Bd. 6, S. 133, 1935.

Нисколько не нарушая общности выражений для φ_i и φ, можно связать эти четыре произвольные гармонические функции с четырьмя другими ω_i и ω посредством равенств

$$\varphi_3 = \frac{\partial \omega_3}{\partial z},$$

$$\varphi_2 = \omega_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial y},$$

$$\varphi_1 = \omega_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x},$$

$$\varphi = \omega + 4(1-\sigma)\,\omega_3 - \left(x\frac{\partial \omega_3}{\partial x} + y\frac{\partial \omega_3}{\partial y} + z\frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right).$$

Тогда будем иметь:

$$\varphi + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{R} + \varphi = \omega + 4(1-\sigma)\,\omega_3 + x\omega_1 + y\omega_2$$

и согласно (16) будет:

$$\begin{aligned} u &= \omega_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x}(\omega + x\omega_1 + y\omega_2), \\ v &= \omega_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial y}(\omega + x\omega_1 + y\omega_2), \\ w &= \quad - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(\omega + x\omega_1 + y\omega_2). \end{aligned} \tag{28}$$

Так как сюда входят только ω, ω_1 и ω_2, то совершенно ясно, что в общем интеграле однородных уравнений Ламе (16) только три произвольные гармонические функции должны быть рассматриваемы как независимые.

Решение (28) не отличается симметрией. Для решения частных задач Нейбер пользуется не этим решением, а непосредственно решением (16). С помощью этого последнего им решены задачи о сжатии и изгибе пустотелого правильного конуса силой, приложенной к его вершине, а равно и о чистом изгибе такого конуса. В последней из перечисленных выше работ Нейбера рассмотрен чистый изгиб гиперболоида вращения, а также влияние на его шейку перерезывающей силы. Равным образом изучено влияние тех же нагрузок на круглый вал, имеющий в центре небольшую полость в форме эллипсоида вращения.

Нейберу не принадлежит первенство в открытии решения (16): оно было приблизительно за два года до его первой на эту тему работы опубликовано и на русском и на французском языках,[1] но Нейбер является, повидимому, первым, кто систематически работает над практическим использованием тех возможностей, которые оно дает для решения пространственных задач теории упругости. Как показывают его работы, особенно последняя, решение (16) вполне пригодно для этой цели.

11°. Остановимся в заключение на тех двух решениях, о которых Буссинек упоминает в конце цитированного выше примечания.

Первое из них, получаемое путем приравнивания нулю двух составляющих вектора **W**, нельзя, конечно, считать общим.

[1] C. R. Paris, № 10, p. 513, 1932.

Второе интереснее. Проследим, как оно получается из решения (4), (5).

Пусть

$$\mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{W} \tag{29}$$

и

$$\psi = \operatorname{div} \mathbf{W}. \tag{30}$$

Тогда вместо (4) можно написать:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \psi. \tag{31}$$

При этом для общности этого решения под $\mathbf{B}$ достаточно будет в нем в силу (5) и (29) подразумевать общий интеграл уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \tag{32}$$

величины же ψ и $\mathbf{B}$ считать в силу (29) и (30) связанными условием

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{W} = \operatorname{div} \mathbf{B}. \tag{33}$$

Общность решения (31) не будет, конечно, нарушена, если мы за ψ примем общий интеграл уравнения (33). Последний можно выписать в форме равенства

$$\psi = \frac{1}{2}(x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi),$$

где φ_i — три составляющие гармонического вектора $\mathbf{B}$, а φ — общий интеграл уравнения

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Сделав это, мы, очевидно, придем к решению (16), разобранному выше.

Но общий интеграл уравнения (34) можно выписать также в форме равенства

$$\psi = z\Phi_0 + \varphi_0, \tag{34}$$

где Φ_0 есть любое частное решение уравнения

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 (z\Phi_0 + \varphi_0) = z\nabla^2 \Phi_0 + 2\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{B}, \tag{35}$$

а φ_0 — общий интеграл уравнения

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0. \tag{36}$$

В силу (32) правая часть уравнения (35) должна удовлетворять уравнению Лапласа. Поэтому искомое частное решение уравнения (35) можно также подчинить условию

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0. \tag{37}$$

Тогда (35) примет вид:

$$2\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{B}. \tag{38}$$

Приняв, что Φ_0 есть частное решение уравнения (38), одновременно удовлетворяющее уравнению (37), подставим (34) в (31). Это дает:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad}(z\Phi_0 + \varphi_0). \tag{39}$$

Обозначим теперь вектор

$$\mathbf{B}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}\varphi_0$$

через $\mathbf{A}$. Очевидно, он является столь же общим выражением гармонического вектора, как и $\mathbf{B}$.

Но в силу своего определения:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}\varphi_0 \tag{40}$$

и согласно (36) должно быть

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}\mathbf{A}, \tag{41}$$

что по подстановке в (38) обращает это последнее уравнение в

$$2\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{42}$$

С помощью обозначения (40) решению (39) можно придать вид:

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}(z\Phi_0), \tag{43}$$

причем для общности этого решения в нем по сказанному выше будет достаточно подразумевать под $\mathbf{A}$ *общий интеграл уравнения*

$$\nabla^2\mathbf{A}=0, \tag{44}$$

а под Φ_0 *любое частное решение уравнения* (42), являющееся также одновременно и решением уравнения (37).

В равенствах (37), (42), (43) и (44) нетрудно узнать решение (E) стр. 198 сочинения Буссинека, упомянутое в конце цитированного выше примечания Решение это является, таким образом, *общим интегралом* однородных уравнений Ламе. Как и в (28), в него входят только три произвольные гармонические функции, и так же, как и (28), оно не отличается симметричностью. Тем не менее именно благодаря этой своей несимметричности оно, как показал Буссинек, является очень удобным для решения ряда задач о деформации упругого полупространства. В частности, из него можно получить и известное решение Черрути.[1]

12°. Вывод решения Черрути из решения (43) был дан еще Буссинеком. Проследим ход этого вывода.

Решение (43) можно представить равенством

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}_1-\frac{\mathbf{k}}{2(1-\sigma)}\Phi_0-\frac{z}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}\Phi_0, \tag{45}$$

где $\mathbf{k}$ есть орт, соответствующий направлению oz.

Вектор $\mathbf{A}_1$, определяемый равенством

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}-\frac{\mathbf{k}}{2(1-\sigma)}\Phi_0, \tag{46}$$

можно в силу определения величин $\mathbf{A}$ и Φ_0 принимать за столь же общее выражение гармонического вектора, как и $\mathbf{A}$. В силу (46) между $\operatorname{div}\mathbf{A}$ и $\operatorname{div}\mathbf{A}_1$ должна существовать зависимость

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_1=\operatorname{div}\mathbf{A}-\frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}\Phi_0,$$

[1] Boussinesq, loc. cit., p. 200.

что совместно с (24) показывает:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \frac{2(1-\sigma)}{3-4\sigma} \operatorname{div} \mathbf{A}_1. \tag{47}$$

Подразумевая под $\mathbf{A}_1$ общее выражение гармонического вектора, а под Φ_0 любое частное решение уравнения (47), удовлетворяющее также уравнению Лапласа, можно в силу (45) и (46) принимать за общий интеграл для $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 - \frac{z}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \Phi_0. \tag{48}$$

Введем теперь в рассмотрение гармонический вектор $\mathbf{K}$, такой, что

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{K}. \tag{49}$$

Подставив (49) в (47), нетрудно видеть, что за Φ_0 можно принять:

$$\Phi_0 = \frac{2(1-\sigma)}{3-4\sigma} \operatorname{div} \mathbf{K}, \tag{50}$$

что вместе с (49) и (48) позволяет придать общему интегралу однородных уравнений Ламе вид:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{K} - \frac{z}{3-4\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{K}, \tag{51}$$

где $\mathbf{K}$ есть общее выражение гармонического вектора.

Решение (51) и есть вышеупомянутое решение Черрути, в формулах же (47) и (48) нетрудно узнать первое из тех двух решений,[1] которые Трэффц в своей Математической теории упругости приводит как пример возможных частных решений однородных уравнений Ламе. На самом деле, как видно из вышеизложенного, решение это является не *частным* решением этих уравнений, а одной из форм их *общего интеграла* и находится в самой тесной связи как со вторым из решений, упоминаемых в конце цитированного выше примечания Буссинека, так и с вытекающим из него решением Черрути (51).

13°. Интересно выяснить, не является ли также и второе решение Трэффца[2] общим интегралом однородных уравнений теории упругости. Для этого сравним его с одним решением, непосредственно вытекающим из решения (31), (33).

Мы видели выше, что общий интеграл однородных уравнений Ламе можно представить равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \psi, \tag{31}$$

где $\mathbf{B}$ — общее выражение гармонического вектора, ψ — любое частное решение уравнения

$$\nabla^2 \psi = \operatorname{div} \mathbf{B}. \tag{33}$$

Общность решения (31), (33) не будет, конечно, нарушена, если за ψ мы примем его общий интеграл, каковой как общий интеграл бигармонического уравнения может быть разыскан под видом:

$$\psi = r^2 \Phi + \varphi, \tag{52}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

[1] Трэффц, Матем. теор. упруг., § 31, формулы (5) и (6), русск. перевод, 1933.

[2] Его же, loc. cit., § 31, формулы (8) и (14).

а Φ и φ удовлетворяют уравнению Лапласа. Чтобы (52) удовлетворяло уравнению (33), необходимо подчинить гармоническую фунцию Φ дополнительному условию

$$\nabla^2\psi = 6\Phi + 4\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\mathbf{B},$$

или, что то же, уравнению

$$6\Phi + 4r\frac{\partial}{\partial r}\Phi = \operatorname{div}\mathbf{B}. \tag{53}$$

Разыскав какое-либо частное решение уравнения (53), удовлетворяющее также уравнению Лапласа, мы можем по только что сказанному принять за общий интеграл для $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-\sigma)}\operatorname{grad}(r^2\Phi + \varphi). \tag{54}$$

Сравнивая это решение со вторым решением Трэффца, в векториальном написании, выражаемом равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{2(1-\sigma)}(r^2 - a^2)\operatorname{grad}\Phi_1, \tag{55}$$

где $\mathbf{B}_1$ — гармонический вектор, а a — константа, легко видеть, что оба эти решения отличаются только тем, что в решении Трэффца в отличие от решения (54) φ имеет частное значение:

$$\varphi = a^2\Phi \tag{56}$$

и, кроме того, в решении Трэффца множитель r^2 вынесен за знак градиента. Поскольку для общности решения (31) достаточно в нем принимать за ψ любое частное решение уравнения (33), ограничение, налагаемое на φ равенством (56), не может считаться нарушающим общность решения. Единственным существенным различием решений (54) и (55) является при этих условиях только то, что в решении (54) множитель r^2 входит под знак градиента, а в решении (55) он из-под знака градиента вынесен, в соответствии с чем и функция Φ_1 подчинена в решении Трэффца не уравнению (53), а уравнению

$$\frac{1-2\sigma}{3-4\sigma}\Phi_1 + r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = -\frac{1}{6-8\sigma}\operatorname{div}\mathbf{B}_1. \tag{57}$$

С точки зрения общности решения это различие решения Трэффца (55) и решения (54), конечно, совершенно несущественно. Мы должны поэтому на решение Трэффца (55), (57), если только оно является решением уравнения Ламе,[1] смотреть как на столь же общий интеграл этих уравнений, как и все формы этого общего интеграла, рассмотренные выше. Полную общность обоих решений Трэффца можно доказать и непосредственно, проследив во всех деталях тот самый путь вывода этих решений, который указан Трэффцом.

Путем более детального сопоставления решений (55), (57) и (53), (54) их можно вывести одно из другого. На обоих этих вопросах останавливаться, однако, подробно не будем.

[1] А в этом легко убедиться простой подстановкой (55) в (1).

14°. Резюмируем все сказанное.

Решение (4), (5), (6), на общность которого обратил впервые внимание Б. Г. Галеркин, получено было еще Буссинеком. Путем устранения его излишней общности из него можно было получить ряд самых разнообразных выражений общего интеграла однородных уравнений Ламе. К числу таких решений относятся:

1) решение Корна (7), (8), (9);

2) решение (16), полученное нами, Г. Д. Гродским и Нейбером;

3) решение Нейбера (28), заключающее в себе лишь три гармонические функции, но несимметричное;

4) решение Буссинека (42), (43);

5) решение (47), (48), впервые найденное также Буссинеком, совпадающее с первым из решений Трэффца и ошибочно принятое последним за частное решение уравнений Ламе;

6) решение Черрути (51);

7) решение (53), (54), повидимому, новое;

8) решение (55), (56), принимаемое Трэффцом опять-таки ошибочно не за общий интеграл уравнений Ламе, а лишь за их частное решение.

Путем введения в рассмотрение различных решений уравнения (33) можно количество различных написаний общего интеграла однородных уравнений Ламе разнообразить до бесконечности, причем возможно, что некоторые из полученных таким образом уравнений окажутся специально приспособленными для решения отдельных частных задач в том смысле, что произвольные функции, входящие в них, будут наиболее легко определяться из граничных условий.

Входящая в решение (16) четвертая гармоническая функция φ не нужна для сохранения этим решением его общности, но может иногда облегчить разыскание остальных трех функций из граничных условий задачи. Сохраняя ее в решении (16), следует, однако, помнить, что если бы мы стали в том или ином частном случае искать все четыре произвольные функции в виде рядов, методом неопределенных коэффициентов, то система уравнений для определения этих коэффициентов была бы неопределенна. Этой неопределенности мы избегаем, отбросив в решении (16) четвертую гармоническую функцию.

Основываясь на решении (16), можно, повидимому, обосновать доказательство существования решения уравнений теории упругости, аналогичное доказательству Корна, но, вероятно, более простое.