ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

ÜBER EIN VERFAHREN ZUR KONSTRUKTION DER NÄHERUNGSLÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\Delta u + \tau^2 u = 0$

Anhang zur Arbeit

Über die Knicknug von rechteckigen Platten bei Schubbeanspruchung [1]

Von *Stefan Bergmann* (*Tomsk*).

§ 1.

Wie in I hingewiesen ist, führt die Frage der Bestimmung der kritischen Spannung in einer dünnen Platte (mit der Plattenfläche $\mathfrak{F}^2$), [2] bzw. der dabei auftretenden Ausbeulung derselben, zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes bzw. der zugehörigen Eigenfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{1.1}$$

bezüglich des Gebietes $\mathfrak{F}^2$.

Das in I angegebene Verfahren besteht darin, daß man die gesuchte Lösung durch eine Partikularlösung $W_n(x_1, x_2; \tau^{(n)}) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{(n)} w_s(x_1, x_2; \tau^{(n)})$ von (1.1) approximiert, wobei $w_s(x_1, x_2; \tau)$, $s = 1, 2, \ldots$ ein System von Partikularlösungen der Differentialgleichung (1.1) bedeuten, und die Konstanten $\alpha_s^{(n)}$, $s = 1, 2, \ldots n$ und $\tau^{(n)}$ so bestimt werden, dass W_n sich in einer in I näher angegebenen Weise den Randbedingungen möglichst gut anpasst.

Vom theoretischen Interesse sind die Fragen, ob bei wachsendem n

A. die $\tau^{(n)}$ gegen einen Eigenwert,

B. die erhaltenen Näherungen $W_n(x_1, x_2; \tau^{(n)})$ (im abgeschlossenen Bereiche) gegen die zugehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung konvergieren.

Ferner ist es wichtig festzustellen, ob man dabei für jedes einfachzusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{F}^2$ e i n u n d d a s s e l b e S y s t e m von Partikularlösungen benutzen kann.

[1] Diese Zeitschrift, Bd. 2 (1935), S. 207—224. Im folgenden als I zitiert. Im folgenden wird die Kenntnis der Arbeit I n i c h t vorausgesetzt.

[2] Wir ändern etwas die früheren Bezeichnungen. Die Mannigfaltigkeiten werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet, wobei der obere Index die Dimension der betreffenden Mannigfaltigkeit angibt. Durch den Strich über einer Mannigfaltigkeitbezeichnung deuten wir darauf hin, dass sie, nebst dem Rand, zu nehmen ist. Ferner an Stelle der Koordinaten x und y werden wir die Koordinatenbezeichnungen x_1 und x_2 benutzen.

Da die Konvergenzuntersuchung im Falle der Differentialgleichung (1.1) auf komplizierte mathematische Betrachtungen führt, beschäftigen wir uns hier mit der diesbezüglichen Untersuchung in einem besonders einfachen Falle, nämlich der Gleichung

$$(1.2)\qquad \Delta w + \tau^2 w = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ ^{1}$$

wobei wir annehmen, daß $\mathfrak{F}^2$ ein Sternbereich ist, der von einer Kurve mit sich stetig drehender Tangente berandet ist, und als Randbedingung wählen wir

$$(1.3)\qquad w = 0.$$

Unter Eigenwerten werden wir im Folgenden nur die Eigenwerte der Gleichung (1.2) bei den Randbedingungen (1.3) bezüglich $\mathfrak{F}^2$ verstehen.

Im § 2 geben wir die Folge (2.7) von Partikularlösungen $w_s(x_1, x_2; \tau)$ der Gleichung (1.1) an. Bildet man den Ausdruck

$$(1.4)\qquad V_n(x_1, x_2; \tau) = \sum_{s=1}^{n} \vartheta_s w_s(x_1, x_2; \tau)$$

und bestimmt man die ϑ_s und τ so, daß

$$(1.5)\qquad \int_{\mathfrak{f}^1} V_n^2\, ds$$

($\mathfrak{f}^1$ die Randkurve von $\mathfrak{F}^2$, ds das Linienelement von $\mathfrak{f}^1$) unter der Nebenbedingung

$$(1.6)\qquad \int\int_{\mathfrak{F}^2} V_n^2 dx_1 dx_2 = 1$$

zu einem Minimum wird, so zeigen wir, daß die Fragen A. und B. in diesem Falle in bejahendem Sinne zu beantworten sind. Bei diesem Konvergenzbeweis spielt die Grösse $M(\tau) = \lim_{n\to\infty} M_n(\tau)$, eine wesentliche Rolle, wobei $M_n(\tau)$ das Minimum von (1.5) bei der Nebenbedingung (1.6) und festen τ bedeutet.[2]

Über $M(\tau)$ gilt nun der

Satz. I. Für jeden Eigenwert τ_k gilt (bei der linksseitigen Annäherung)

$$(1.7)\qquad \lim_{\tau\to\tau_k-0} M(\tau) = 0.$$

II. Ist dagegen τ kein Eigenwert, so ist

$$(1.8)\qquad M(\tau) > 0.$$

Der Beweis dieses Sätzes wird im § 2 und im § 3 gegeben.

§ 2.

$\mathfrak{F}^2$ sei ein Sternbereich der (reellen) x_1x_2 Ebene. Mit $\mathfrak{Z}_k^4$, $k = 1, 2$, bezeichnen wir zwei schiefe Bizylinder des (vierdimensionalen) z_1z_2-Raumes, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ (mit $\mathfrak{F}^2$ als Basis), nämlich die Gesamtheit der $x_1y_1x_2y_2$-Punkte, die durch

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1^4&: \quad x_1 - y_2 = a, \quad x_2 + y_1 = b,\\ \mathfrak{Z}_2^4&: \quad x_1 + y_2 = a, \quad x_2 - y_1 = b \end{aligned}$$

[1] Die im folgenden angegebene Methode lässt sich auf allgemeinere Typen von Differentialgleichungen anwenden. Vgl. dazu auch die demnächst erscheinenden Arbeiten des Verfassers. Man kann vermuten, dass man im Falle der Differentialgleichung (1.1) auf eine analoge Weise den Konvergenzbeweis führen kann.

[2] Wir variiren also (im Gegensatz zu der ersten Minimumaufgabe) nur die ϑ_k.

gegeben sind, wobei $\{a, b\}$ alle Punkte von $\mathfrak{F}^2$ durchläuft. Den Durchschnitt[1] $\mathfrak{Z}_1^4 \cdot \mathfrak{Z}_2^4$ nennen wir die Hülle von $\mathfrak{F}^2$ und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{F}^4 = \mathrm{H}(\mathfrak{F}^2)$.

Satz. $V(x_1, x_2)$ sei eine in $\mathfrak{F}^2$ definierte Funktion, die dort die Differentialgleichung

$$\Delta V + V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + V = 0$$

befriedigt. Die analytische Fortsetzung $V(z_1, z_2)$ von $V(x_1, x_2)$ ist in der Hülle $\mathfrak{F}^4 = \mathrm{H}(\mathfrak{F}^2)$,[1] als Funktion der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 betrachtet, regulär und lässt sich ebenda in der Form

$$V(z_1, z_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{\exp.\left(it\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \left[f(u) + g(\tilde{u})\right] dt, \quad \exp.\, a \equiv e_1^a \tag{2.2}$$

$$u \equiv \frac{1}{2}(z_1 + iz_2)(1 - t^2), \quad \tilde{u} \equiv \frac{1}{2}(z_1 - iz_2)(1 - t^2) \tag{2.2a}$$

darstellen, wobei gesetzt ist:

$$f(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \frac{dV(\zeta, -i\zeta)}{d\zeta} d\vartheta_1 + \frac{1}{\pi} V(0, 0), \quad \zeta = u \sin^2\vartheta \tag{2.3}$$

$$g(\tilde{u}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \frac{dV(\tilde{\zeta}, i\tilde{\zeta})}{d\tilde{\zeta}} d\vartheta, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{u} \sin^2\vartheta. \tag{2.3*}$$

Beweis. I. Wir führen den Beweis zuerst für den Spezialfall, das $\mathfrak{F}^2$ ein Kreis ist, durch.[2] Die Funktion $V(x_1, x_2)$ besitzt im Kreise $\mathfrak{F}^2$, da sie dort die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigt, bekanntlich die (gleichmässig konvergente) Entwicklung

$$V(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n I_{|n|}(r) e^{in\varphi}, \tag{2.4}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \varphi = \operatorname{arctang} \frac{x_2}{x_1},$$

mit I_n als n-ter Besselscher Funktion erster Art. Unter Benutzung der Integraldarstellung[3]

$$I_n(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\exp.(itr)}{\sqrt{1-t^2}} (1 - t^2)^n\, dt,$$

[1] Führt man an Stelle von z_1, z_2 neue Variable $Z_1 = z_1 - iz_2$, $Z_2 = z_1 - iz_2$ ein, so ist $\mathfrak{F}^4$ Produktbereich dessen Faktorkomponente sowohl in der Z_1 — wie in der Z_2 — Ebene $\mathfrak{F}^2$ ist.

[2] Für den in I betrachteten Fall, daß $\mathfrak{F}^2$ ein Kreis ist, wurde unserer Satz bereits in der Arbeit: „Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexer Veränderlichen, die die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigen", Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 386, § 1 bewiesen. Vollständigkeit halber wiederholen wir hier mit kleinen Veränderungen diesen Beweis.

[3] Vgl. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Leipzig (1904), § 2, S. 7, Formel (3).

können wir die rechte Seite von (2.4) auch in der Form

$$(2.4^*) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(|n|+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\exp.(itr)}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{|n|} r^{|n|}\, C_n e^{in\varphi} =$$

$$(2.4^{**}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\exp.(\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{\sqrt{1-t^2}} \left[C_n\left(\frac{(x_1+ix_2)(1-t^2)}{2}\right)^n + \right.$$

$$\left. + C_{-n}\left(\frac{(x_1-ix_2)(1-t^2)}{2}\right)^n\right]$$

schreiben. Mit der Abschätzung $I_n(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \frac{e^{\left|\frac{r^2}{n}\right|}-1}{|n+1|}$, $(n \geqq 0)$, folgt aus (2.4) $C_n = O\left[\left(\frac{r_0}{2}\right)^{-|n|} \Gamma(|n|+1)\right]$, wo r_0 den Radius des Kreises $\mathfrak{F}^2$ bedeutet; daher konvergiert der durch Vertauschung der Zeichen $\sum$ und $\int$ in (2.4) entstehende neue Integrand

$$J(x_1, x_2, t) = \frac{\exp.(it\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left[C_n\left(\frac{(x_1+ix_2)(1-t^2)}{2}\right)^n + \right.$$

$$\left. + C_{-n}\left(\frac{(x_1-ix\ )(1-t^2)}{2}\right)^n\right]$$

gleichmässig in t (was die Vertauschung rechtfertigt), und sogar für $|x_1|^2+|x_2|^2 < r_0^2$ gleichmässig in t, x_1, x_2, was $J(x_1, x_2, t)$ als analytische Funktion dieser Grössen erweist. Die analytische Fortsetzung $V(z_1, z_2)$ von $V(x_1, x_2)$ ins Komplexe erhält man offenbar dadurch, dass man in

$$(2.5) \qquad \int_{-1}^{+1} J(x_1, x_2, t)\, dt \quad .$$

x_k durch z_k, $k=1, 2$, ersetzt, wodurch man zu der Darstellung (2.2) gelangt, wobei

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n u^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \qquad g(\tilde{u}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}\tilde{u}^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

gesetzt ist.

Wir gehen nunmehr zur Ableitung von (2.3) über. Setzt man $x_1 = \zeta$, $x_2 = -i\zeta$, so wird

$$\frac{x_1+ix_2}{2} = \zeta, \quad \frac{x_1-ix_2}{2} = 0, \quad x_1^2+x_2^2 = 0$$

und somit nach (2.4**)

$$V(\zeta, -i\zeta) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n [\zeta(1-t^2)]^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Man erhält somit (wenn noch t durch $\cos T$ ersetzt wird)

$$(2.6) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \frac{dV(u\sin^2\vartheta, -iu\sin^2\vartheta)}{d(u\sin^2\vartheta)} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n u^n \sin^{2n-1}\vartheta}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} n \int_0^{\pi} \sin^{2n} T dT \right] d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n u^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n u^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

w. z. b. w. Analog beweist man (2.3*).

II. Um unseren Satz auch für einen beliebigen Sternbereich $\mathfrak{J}^2$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass sowohl $V(z_1, z_2)$, wie auch $f(u)$ und $g(\tilde{u})$ in $\mathfrak{J}^4 = \mathrm{H}(\mathfrak{J}^2)$ analytisch sind. Wäre erstens $V(z_1, z_2)$ nicht durchwegs in $\mathfrak{J}^4$ analytisch, so gäbe es jedenfalls ein $r > 0$, sodass $V(z_1, z_2)$ in dem Durchschnittsbereiche von $\mathfrak{J}^4$ und $y_1^{02} + y_2^{02} < r^2$ regulär, hingegen in mindestens einem Punkte $\{z_1^0, z_2^0\}$ von $\mathfrak{J}^4$ mit $y_1^{02} + y_2^{02} = r^2$ singulär wäre. Die Schnitte $\mathfrak{J}^4 \cdot (y_1 = \text{const}, \ y_2 = \text{const})$ [1] varieren stetig mit y_k, daher könnte man ein $\delta > 0$ wählen, sodass ein in der Ebene $y_1 = y_1^0 - \delta$, $y_2 = y_2^0$ um $\{x_1^0, x_2^0\}$ als Mittelpunkt beschriebener Kreis $\mathfrak{K}_0^2$ ganz im inneren vom $\mathfrak{J}^4 \cdot (y_1 = y_1^0 - \delta, \ y_2 = y_2^0)$ liegt und ausserdem in seiner Hülle den Punkt $\{z_1^0, z_2^0\}$ enthält. Da die Funktion $V(x_1 + iy_1^0, x_2 + iy_2^0)$ in $\mathfrak{K}_0^2$ die Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + V = 0$ befriedigt, wäre $V(z_1, z_2)$ nach I in $\mathrm{H}(\mathfrak{K}_0^2)$ und somit im Punkte $\{z_1^0, z_2^0\}$ regulär, im Gegensatz zur ursprünglichen Annahme. Dass $f(u)$ und $g(u)$ analytisch sind, folgt mit (2.3) und (2.3*) aus der Analyzität von $V(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{J}^4$.

Korollar I. $\psi(X_1, X_2)$ g e n ü g e in $\overline{\mathfrak{J}^2}$ d e r p a r t i e l l e n D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g $\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2} + \tau^2\psi = 0$. D i e a n a l y t i s c h e F o r t s e t z u n g

[1] Durch $\mathfrak{J}^4 \cdot (y_1 = a, \ y_2 = b)$ wird in üblicher Weise der Durchschnitt von $\mathfrak{J}^4$ mit der Ebene $y_1 = a$, $y_2 = b$ bezeichnet.

$\psi(Z_1, Z_2)$ von $\psi(X_1, X_2)$ (die nach dem früheren Satz in $\mathfrak{F}^4$ regulär ist) lässt sich in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{Z}^4$ gelegenen Teilbereich gleichmässig durch Ausdrücke $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} w_k$ mit

$$(2.7) \qquad w_{2k}(Z_1, Z_2, \tau) = I_k(\tau \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}) \left(\sqrt{\frac{Z_1 + iZ_2}{Z_1 - iZ_2}} \right)^k,$$

$$w_{2k+1}(Z_1, Z_2, \tau) = I_k(\tau \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}) \left(\sqrt{\frac{Z_1 - iZ_2}{Z_1 + iZ_2}} \right)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

approximieren.

Beweis. Nach Runge kann $f(z_1 + iz_2)$ in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{F}^2$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{T}^2$ (gleichmässig) durch ein Polynom

$$P_n\left(\frac{z_1 + iz_2}{2}\right) = \sum_{R=1}^{n} a_R^{(n)} \left(\frac{z_1 + iz_2}{2}\right)^R$$

approximiert werden, d. h. in $\mathfrak{T}^2$ gilt

$$(2.8) \qquad \left| f\left(\frac{z_1 + iz_2}{2}\right) - \sum_{R=1}^{n} a_R^{(n)} \left(\frac{z_1 + iz_2}{2}\right)^R \right| \leqq \varepsilon.$$

Da zugleich mit ξ auch $\xi(1 - t^2)$, $|t| < 1$ innerhalb des Sternbereiches $\mathfrak{F}^2$ liegt, gilt in $\mathfrak{T}^2$, wenn $\mathfrak{T}^2$ konvex vorausgesetzt wird,

$$\left| f\left(\frac{(z_1 + iz_2)(1 - t^2)}{2}\right) - \sum_{R=1}^{n} a_R^{(n)} \left(\frac{(z_1 + iz_2)(1 - t^2)}{2}\right)^R \right| \leqq \varepsilon.$$

Mit der Operation $\int_{-1}^{+1} \frac{\exp.(it\sqrt{z_1^2 + z_2^2})}{\sqrt{1 - t^2}} \ldots dt$ folgt nun aus (2.2) die behauptete Approximationsmöglichkeit.

Beweis von I. Es genügt zu zeigen daß zu jedem ε und zu jedem Eigenwert τ_k ein $\tau < \tau_k$ und $P_n(X_1, X_2; \tau) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} w_k(X_1, X_2; \tau)$ existiert so daß

$$(2.9) \qquad \iint_{\mathfrak{F}^2} [P_n(X_1, X_2; \tau)]^2 \, dX_1 dX_2 = 1$$

ist und auf $\mathfrak{f}^1$

$$(2.10) \qquad |P_n(X_1, X_2; \tau)| \leqq \varepsilon$$

gilt. Sei $H(X_1, X_2)$ die zu dem Eigenwert τ_k gehörige Eigenfunktion bezüglich $\mathfrak{F}^2$; $H\left(\frac{\tau}{\tau_k} X_1, \frac{\tau}{\tau_k} X_2\right)$ ist dann eine Eigenfunktion für den Eigenwert τ bezüglich des Gebietes $\frac{\tau_k}{\tau}\mathfrak{F}^2$ [1]. Da $H\left(\frac{\tau}{\tau_k} X_1, \frac{\tau}{\tau_k} X_2\right)$ im (abgeschlossenen)

---

[1] Mit $\frac{\tau_k}{\tau}\mathfrak{F}^2$ wird daß aus $\mathfrak{F}^2$ durch die Transformation $X_k^* = \frac{\tau_k}{\tau} X_k$, $k = 1, 2$ entstandenes Gebiet bezeichnet.

$\frac{\tau_k}{\tau}\overline{\mathfrak{F}^2}$ stetig ist, können wir τ so nahe an τ_k wählen, daß

$$\iint_{\mathfrak{F}^2} \left[(1+\varepsilon_1) H\left(\frac{\tau}{\tau_k} X_1, \frac{\tau}{\tau_k} X_2\right)\right]^2 dX_1 dX_2 = 1, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon \tag{2.11}$$

ist und auf $\mathfrak{f}^1$

$$\left| (1+\varepsilon_1) H\left(\frac{\tau}{\tau_k} X_1, \frac{\tau}{\tau_k} X_2\right)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.12}$$

wird. Andererseits liegt $\mathfrak{F}^2$ ganz im Innern von $\frac{\tau_k}{\tau}\mathfrak{F}^2$ und nach dem Korollar I existiert ein $P_n(X_1, X_2; \tau)$, so daß in $\overline{\mathfrak{F}^2}$

$$\left| (1+\varepsilon_1) H\left(\frac{\tau}{\tau_k} X_1, \frac{\tau}{\tau_k} X_2\right) - P_n(X_1, X_2; \tau)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.13}$$

ist und $P_n(X_1, X_2; \tau)$ die Nebenbedingung (1.6) erfüllt.

Da $\mathrm{M}_n(\tau) \leqq \int_{\mathfrak{f}^1} [P_n(X_1, X_2; \tau)]^2 ds$ ist, folgt aus (2.12) und (2.13) die Relation (1.7).

§ 3

Beweis von **II.** Wir wollen zunächst zeigen, daß es zu jedem Bereich $\mathfrak{F}^2$ und zu jedem (von einen Eigenwert verschiedenen) τ eine positive Konstante a gibt, so daß für jede Funktion $V(X)$,[1] die in $\mathfrak{F}^2$ der Differentialgleichung (1.2) genügt und die Nebenbedingung (1.6) erfüllt,

$$\int_{\mathfrak{f}^1} V^2(X)\, \mathbf{ds} \geqq a \tag{3.1}$$

gilt.

Beweis. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man eine Folge $V_m(X)$, $m = 1, 2, \ldots$ solcher Funktionen mit

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathfrak{f}^1} V_m^2(X)\, \mathbf{ds} = 0 \tag{3.2}$$

angeben. Jede der Funktionen, V_m, da sie der Differentialgleichung (1.2) genügt, befriedigt ebenfalls die Integralgleichung

$$\begin{cases} V_m(X) = \lambda \iint_{\mathfrak{F}^2} G(X; T)\, V_m(T)\, d\omega_T + F_m(X), \\ \lambda = \dfrac{\tau^2}{2\pi}, \; F_m(X) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathfrak{f}^1} V_m(T) \frac{dG(X, T)}{\mathbf{dn}_T}\, \mathbf{ds}_T \end{cases} \tag{3.3}$$

worin G die Greensche Funktion von $\mathfrak{F}^2$; $\mathbf{n}_T$ die innere Normale an $\mathfrak{f}^1$, ds_T das Linienelement von $\mathfrak{f}^1$ bedeuten. $F_m(X)$, $m = 1, 2, \ldots$ sind in $\mathfrak{F}^2$ harmonische

[1] Kürzehalber soll im folgenden X anstatt (X_1, X_2); T anstatt (T_1, T_2); $d\omega_X$ anstatt $dX_1 dX_2$; $d\omega_U$ anstatt $dU_1 dU_2$ usw. geschrieben werden.

Funktionen, die auf $\mathfrak{f}^1$ die Werte $\frac{1}{2\pi} V_m$ annehmen und für die somit (3.2) gilt. Für jede harmonische Funktion F gilt aber — wie wir zeigen wollen — die Ungleichung

(3.4) $$\iint_{\mathfrak{F}^2} F^2 d\omega_X \leqq c \int_{\mathfrak{f}^1} F^2 ds,$$

worin c eine geeignete, nur von dem Bereich $\mathfrak{F}^2$ abhängige Konstante bedeutet.

Ist nämlich $w(z)$, $(w = U_1 + iU_2,\ z = X_1 + iX_2)$ diejenige Funktion, die $\mathfrak{F}^2$ auf den Einheitskreis $\mathfrak{E}^2$ abbildet, so gilt bekanntlich in $\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{f}^1$: $0 < l \leqq |w'(z)| \leqq L < \infty$, [1] da $\mathfrak{f}^1$ voraussetzungsgemäss überall eine sich stetig drehende Tangente besitzt, woraus

$$\iint_{\mathfrak{F}^2} F^2 d\omega_X \leqq \frac{1}{l^2} \iint_{\mathfrak{E}^2} F^2 d\omega_U =$$

$$= \frac{1}{l^2} \int_0^1 dr \left(\int_0^{2\pi} F^2 r d\varphi \right) \leqq \frac{1}{l^2} \int_0^{2\pi} F^2 d\varphi \cdot \int_0^1 dr \leqq \frac{L}{l^2} \int_{\mathfrak{f}^1} F^2 ds$$

folgt, da $\int_0^{2\pi} F^2 r d\varphi = \pi [r a_0^2 + r^3 (a_1^2 + a_2^2) + \ \ldots\ ]$, $(F = a_0 + a_1 r \cos\varphi + + a_2 r \sin\varphi + \ldots)$ eine nicht abnehmende Funktion von r ist. Aus (3.2) und (3.4) erhält man, dass $\lim\limits_{m \to \infty} \iint_{\mathfrak{F}^2} F_m^2 d\omega_X = 0$ ist, woraus sich — wie wir zeigen werden

(3.5) $$\lim_{m \to \infty} \iint_{\mathfrak{F}^2} V_m^2 d\omega_X = 0$$

ergibt, was im Widerspruch zu der Nebenbedingung (1.6) steht.

Der iterierte Kern $G^{(2)}(X;\ T) = \iint_{\mathfrak{F}^2} G(X;\ S)\, G(S;\ T)\, d\omega_S$ und somit auch der zugehörige Fredholmsche Minor $D_2\left(\frac{X}{T}\middle|\lambda\right)$ für G^2 sind beschränkte Funktionen, [1] da man G durch $\log \frac{L}{\sqrt{(X_1 - T_1)^2 + (X_2 - T_2)^2}}$ majorieren kann. (L bedeutet dabei die Maximalentfernung zwischen den Punkten von $\mathfrak{f}^1$). Für die lösende Resolvente Γ von G gilt [2]

$$\Gamma(X,\ Y;\ \lambda) = G(X,\ Y) + \lambda \frac{D_2\left(\frac{X}{Y}\middle|\lambda^2\right)}{D_2(\lambda^2)} + \lambda^2 \frac{\iint_{\mathfrak{F}^2} G(X,\ S)\, D_2\left(\frac{S}{Y}\middle|\lambda^2\right) d\omega_S}{D_2(\lambda^2)}$$

---

[1] Vgl. L. Lichtenstein, Zur Theorie der linearen, partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Annalen **67**, (1909), S. 559—575, s. insbesondere S. 561 bis 563, oder Warschawski, Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Zeitschrift **35** (1932), S. 321—456, insbesondere S. 322.

In dem man in der folgenden Ungleichung etwas schärfere Abschatzungen macht, beweist man die Güttigkeit von (3.4) (und des ganzen Verfahrens) in dem Falle, das $\mathfrak{f}^1$ aus endlich vielen Kurvenstücken mit sich stetig drehenden Tangente besteht.

[2] Vgl. dazu Goursat, Cours d'analyse, 3-er Band, Paris (1927), XXXI Kap., S. 372. Formel (4). Wir werden im Folgenden dieses Werk als Goursat zitieren.

und durch wiederholte Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} \int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} [\Gamma(X, Y; \lambda)]^2 \, d\omega_X d\omega_Y < \infty \tag{3.6}$$

Da $V_m(X)$ die Integralgleichung (3.3) erfüllt, ist

$$V_m(X) = F_m(X) + \lambda \int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} \Gamma(X, T; \lambda) \, F_m(T) \, d\omega_T \tag{3.7}$$

und

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} [V_m(X)]^2 \, d\omega_X \leqq c_1 \int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} [F_m(X)]^2 \, d\omega_X$$

worin, wie durch wiederholte Anwendung der Schwarzschen Ungleichung aus (3.6) folgt c_1 eine von m unabhängige Konstante bedeutet. Aus (3.2) folgt also nach (3.4) und (3.8) die Relation (3.5) die — wie erwähnt — im Widerspruch mit (1.6) steht.

§ 4

Wir gehen zum Beweis von A. und B. über, wobei wir voraussetzen dass die $\tau^{(n)}$ aus einem Intervall $\widehat{AD}$ entnommen werden das einen einzigen Eigenwert τ_k enthält. Wir bezeichnen durch $\mu_n = \min\limits_{\tau \subset \widehat{AD}} \mathrm{M}_n(\tau)$ das Minimum von (1.5) bei der Nebenbedingung (1.6).

Aus I folgt, daß

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0 \tag{4.1}$$

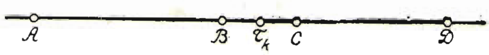

Рис. 1.

ist. Andererseits ist

$$\mu_n = \mathrm{M}_n(\tau^{(n)}). \tag{4.2}$$

Nach II können wir zu jedem abgeschlossenen Intervall $\widehat{AB} + \widehat{CD}$ von AD, das den Punkt τ_k nicht enthält, ein solches positives δ finden so, daß für j e d e s n

$$\mathrm{M}_n(\tau) \geqq \delta \qquad \text{für } \tau \subset \widehat{AB} + \widehat{CD} \tag{4.3}$$

ist. Aus (4.1), (4.2), (4.3) folgt somit, daß von einem genügend grossen n an die $\tau^{(n)}$ dem Komplementärintervall $\widehat{BC}$ angehören müssen und, da $\widehat{BC}$ in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes $\tau = \tau_k$ liegen kann, ergibt sich, dass

$$\lim_{n \to \infty} \tau^{(n)} = \tau_k \tag{4.5}$$

ist.

Beweis von B. Nach (3.3) lässt $V_m(X) - F_m(X)$ die Integraldarstellung

$$V_m(X) - F_m(X) = \lambda^{(m)} \int\!\!\int_{\mathfrak{F}^2} G(X, T) \, V_m(T) \, d\omega_T, \qquad \lambda^{(m)} = \frac{\tau^{(m)^2}}{2\pi}$$

---

[2] Vgl. dazu G o u r s a t, S. 382, Formel (33).

zu. Nach einem bekannten Satz [1] kann man

$$(4.6)\quad V_m(X)-F_m(X)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s^{(m)}}{\lambda_s}\varphi_s(X),\quad h_s^{(m)}=\lambda^{(m)}\iint_{\mathfrak{F}^2}\varphi_s(T)\,V_m(T)\,d\omega_T$$

setzen, wobei $\varphi_s(X)$, $s=1, 2, \ldots$ das normierte und vollständige Orthogonalfunktionensystem der Integralgleichung $v(X)=\lambda\iint_{\mathfrak{F}^2} G(X, T)\,v(T)\,d\omega_T$ bedeutet. Zur Bestimmung der $h_s^{(m)}$ erhält man somit das Gleichungssystem

$$(4.7)\qquad h_s^{(m)}=\frac{\lambda^{(m)}}{\lambda_s}h_s^{(m)}+\lambda^{(m)}\iint_{\mathfrak{F}^2}\varphi_s(T)\,F_m(T)\,d\omega_T$$

d.h.

$$h_s^{(m)}=\frac{\lambda_s}{\lambda_s-\lambda^{(m)}}\iint_{\mathfrak{F}^2}\varphi_s(T)\,F_m(T)\,d\omega_T$$

woraus, da nach (3.3) und (3.4) $\lim\limits_{m\to\infty}\iint_{\mathfrak{F}^2}F^2_m d\omega_T=0$ ist, folgt, daß

$$(4.8)\quad \left|\sum_{s=1}^{\infty}{}'\frac{h_s^{(m)}}{\lambda_s}\varphi_s(X)\right|^2\leq C\iint_{\mathfrak{F}^2}[G(X, T)]^2\,d\omega_T\cdot\iint_{\mathfrak{F}^2}[F_m(T)]^2\,d\omega_T \text{ [2]}$$

im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{F}^2$ gegen 0 konvergiert. Ferner ist nach (1.6) und (4.5)

$$\iint_{\mathfrak{F}^2}\left[\sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s^{(m)}}{\lambda_s}\varphi_s(X)+F_m(X)\right]^2 d\omega_X=1$$

woraus sich nach (4.8), und (3.4)

$$(4.9)\qquad \lim_{m\to\infty} h_k^{(m)}=\lambda_k$$

ergibt.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Delta u+\tau^2 u=0$

Стефан Бергман (Томск)

В связи с одной задачей по теории тонких пластинок, работающих на сдвиг, рассматриваемой в предыдущей работе, дается метод приближенного решения уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3) относительно области $\mathfrak{F}^2$. Для этого уравнения указывается способ аппроксимировать искомое решение с помощью частного решения вида (1.4), где $w_s(x_1, x_2; \tau)$ система частных решений уравнения, определяя ϑ_s и τ так, чтобы (1.4) принимало на границе значения, для которых интеграл (1.5) стремится к нулю. Для так определенного решения устанавливается, что с возрастанием n, $\tau^{(n)}$ и $V_n(x_1, x_2; \tau^{(n)})$ стремятся соответственно к собственным значениям

[1] Siehe z. B. G o u r s a t, § 589, S. 447.

[2] Durch den Strich bei dem Summationszeichen Σ weisen wir darauf hin, daß darin das Glied mit $s=k$ fehlt. C ist eine von m unabhängige Konstante.

и собственным функциям рассматриваемого уравнения. При доказательстве существенную роль играет величина $M(\tau) = \lim_{n \to \infty} M_n(\tau)$, где $M_n(\tau)$ — минимум (1.5) при условии (1.6). Относительно $M(\tau)$ доказывается следующая теорема: для каждого собственного значения τ_k имеет место (1.7), а для значений τ, отличных от собственных значений: $M(\tau) > 0$.

Для доказательства первой части теоремы используется интегральное представление (2.2), в то время как вторая часть теоремы следует из основных теорем теории интегральных уравнений.

НИИММ при ТГУ.