ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

И. Кибель (Ленинград)

Можно показать, что если речь идет о нестационарных движениях, система уравнений газовой динамики

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\nabla p &= -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \nabla\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{2} + \mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V} \\ &\frac{d\ln\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\,\frac{p}{\rho^k} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(p — давление, ρ — плотность, $\mathbf{V}$ — скорость, t — время, $k = \frac{c_p}{c_v}$ = отношение теплоемкостей) всегда обладает действительными характеристическими многообразиями

$$F(x,\ y,\ z,\ t) = 0 \qquad (2)$$

(x, y, z — координаты), на которых

$$\left(\frac{F_t}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}} + V_n\right)^3 \cdot \left[\left(\frac{F_t}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}} + V_n\right)^2 - \frac{kp}{\rho}\right] = 0 \text{ [1]} \qquad (3)$$

[V_n — проекция скорости $\mathbf{V}$ на нормаль n к рассмотренной в момент t поверхности (2)]. Иначе обстоит дело в случае движений стационарных. Так как здесь вдоль характеристического многообразия

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \qquad (4)$$

[1] См., например. T. Levi-Civita, Caratteristice dei sistemi differenziale e propogazione ondosi.

должно быть

$$V_n^3 \left[V_n^2 - \frac{kp}{\rho} \right] = 0$$

[V_n — проекция $\mathbf{V}$ на нормаль к (4)], то действительные характеристические поверхности могут здесь существовать лишь в том случае, если скорости жидкости превышают по величине скорость звука $a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$, ибо только в этом случае может оказаться на некоторой поверхности

$$|V_n| = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \tag{5}$$

(мы отбрасываем не представляющие для газовой динамики интереса движения с $V_n = 0$).

Наличие действительных характеристик позволило применить к нахождению гидродинамических элементов графические методы. Последние были развиты для различных случаев, когда число независимых переменных задачи равнялось двум, и заключались в постепенном нанесении, в плоскости этих переменных, характеристик и определении значений гидродинамических элементов в точках этих характеристик. Так была решена задача о плоском (переменные x, y), стационарном, происходящем со сверхзвуковой скоростью, безвихревом движении,[1] затем было снято ограничение об отсутствии вихрей;[2] далее графический метод был развит для движений пространственных, но обладающих осевой симметрией (переменные суть r — расстояние от оси и z — расстояние от некоторой плоскости, перпендикулярной оси;[3] наконец была графически решена задача о прямолинейном нестационарном движении газа (переменные x и t).[4] В каждом из перечисленных случаев рассматривалась специальная функция (потенциал скоростей, функция тока и т. п.), для нее строилось уравнение в частных производных 2-го порядка и уже для этого уравнения отыскивались характеристики. Цель настоящей заметки — показать, что значительно проще мы получим нужные нам характеристики и соотношения между гидродинамическими элементами на них, если обратимся непосредственно к системе (1), не отыскивая каждый раз потенциала скоростей, функции тока и т. п.

Рассмотрим сперва случай нестационарного прямолинейного движения. Здесь мы имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{6}$$

Положим

$$p = \vartheta^k \rho^k,$$

где, в силу последнего из (1),

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

[1] A. Busemann, Gasdynamik, Handbuch d. exper. Physik. B. IV.

[2] Ф. Франкль, статья из сборника „Реактивное движение“.

[3] Ф. Франкль, Сверхзвуковые течения с осевой симметрией, Изв. Арт. акад. РККА, 1, 1934.

[4] И. Кибель и Ф. Франкль, Прямолинейные движения газа, техн. зам. ЦАГИ № 52, 1934.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial d}{\partial x}=0\\&kp\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Пусть характеристики в плоскости (x, t) имеют уравнения

$$x=x(t).$$

Вдоль них:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\\&\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{dp}{dt}\end{aligned}\right\}.\tag{8}$$

Рассматривая (7) и (8) как систему алгебраических уравнений для нахождения четырех производных

$$\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial p}{\partial x},$$

мы должны теперь написать (определение характеристик):

$$\begin{vmatrix}1 & u & 0 & \frac{1}{\rho}\\ 0 & kp & 1 & u\\ 1 & x' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x'\end{vmatrix}=-(x'-u)^2+\frac{kp}{\rho}=-(x'-u)^2+a^2=0,$$ [1]

т. е.

$$\frac{dx}{dt}=u\pm a.\tag{9}$$

Кроме этого достаточно написать:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\\ 0 & 0 & 1 & u\\ 1 & u' & 0 & 0\\ 0 & p' & 1 & x'\end{vmatrix}=-\frac{du}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-u\right)-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0,$$

т. е.

$$a\frac{du}{dt}\pm\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0.\tag{10}$$

Замечая еще, что

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=\frac{k\vartheta}{k-1}\frac{d}{dt}p^{\frac{k-1}{k}}=\frac{1}{k-1}\frac{d}{dt}k\vartheta p^{\frac{k-1}{k}}-\frac{k\vartheta p^{\frac{k-1}{k}}}{k-1}\frac{d\ln\vartheta}{dt}$$

[1] Уравнение это можно получить из (3), полагая $F=x-x(t)$, $V_n=u$.

и что

$$k\vartheta p^{\frac{k-1}{k}} = a^2,$$

можем привести (10) к виду

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{2}{k-1}\frac{da}{dt} = \pm\frac{a}{k-1}\frac{d\ln\vartheta}{dt}. \tag{11}$$

Уравнения (9) и (11) и являются как раз теми соотношениями, которые употребляются при решении данной задачи графическим методом.[1]

Обратимся теперь к стационарным движениям. Хотя здесь тоже можно исходить непосредственно из (1) но удобнее употреблять вместо одного из уравнений Эйлера закон Бернулли, наподобие того, как вместо условия адиабатичности мы пользовались отношением (6). Именно:

$$\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{2} + \frac{k}{k-1}\vartheta p^{\frac{k-1}{k}} = i_0, \tag{12}$$

причем

$$\mathbf{V}\cdot\nabla\vartheta = \mathbf{V}\cdot\nabla i_0 = 0. \tag{13}$$

Если воспользоваться (12), то уравнения Эйлера [первое из (1)] дадут

$$\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V} = \nabla i_0 - \frac{a^2}{k-1}\nabla\ln\vartheta. \tag{14}$$

Рассмотрим сперва плоскую задачу (переменные x, y). По (13) i_0 и ϑ будут зависеть лишь от функции тока ψ (существующей в силу уравнения неразрывности), поэтому (14) дадут одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \rho\frac{di_0}{d\psi} - \frac{a^2}{k-1}\frac{d\ln\vartheta}{d\psi}. \tag{15}$$

Уравнение неразрывности приведем без труда, пользуясь (6) и (12), к виду

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial y} + uv\frac{\partial v}{\partial x} + (v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

Прибавляя затем вдоль характеристик

$$y = y(x)$$

соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} &= \frac{dv}{dx}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

мы должны записать условие невозможности нахождения из (15), (16), (17) четырех производных

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}.$$

[1] Loc. cit. [4], стр. 10.

так:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ u^2-a^2 & uv & uv & v^2-a^2 \\ 1 & y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y' \end{vmatrix} = -y'^2(u^2-a^2)+2uvy'-(v^2-a^2)=0.$$

Откуда

$$\frac{dy}{\partial x}=\frac{uv\pm a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2}.\ ^{1} \qquad (18)$$

Кроме того достаточно написать

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho\left(i_0'-\frac{a^2}{k-1}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right) & -1 & 0 \\ u^2-a^2 & 0 & uv & v^2-a^2 \\ 1 & u' & 0 & 0 \\ 0 & v' & 1 & y' \end{vmatrix} =$$

$$=-\rho\left(i_0'-\frac{a^2}{k-1}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)(uvy'-v^2+a^2)-(u^2-a^2)u'y'-v'(v^2-a^2)=0,$$

т. е.

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\frac{v^2-a^2}{u^2-a^2}\frac{1}{y'}=-\rho\left(i_0'-\frac{a^2}{k-1}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)\frac{uvy'-v^2+a^2}{(u^2-a^2)y'}. \qquad (19)$$

Если обозначить $\frac{dy}{dx}$ для характеристик 1-го семейства [знак плюс в формуле (18)] через y_1', а для 2-го через y_2', то, так как в силу (18):

$$\frac{v^2-a^2}{u^2-a^2}\frac{1}{y_1'}=y_2',$$

можем привести (19) к виду:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Вдоль характеристик 1-го сем.:}\\ &du+y_2'dv=-\rho\left(i_0'-\frac{a^2}{k-1}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)\frac{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2}\,dx\\ &\text{Вдоль характеристик 2-го сем.:}\\ &du+y_1'dv=\rho\left(i_0'-\frac{a^2}{k-1}\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)\frac{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2}\,dx. \end{aligned}\right\}^{2} \qquad (20)$$

---

[1] Уравнение это получается также непосредственно из (5); здесь $f\equiv y-\nu\ (x)$ и

$$V_n=\frac{-uy'+v}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

[2] Чтобы из (20) получить рабочие формулы Франкля (loc. cit.[2], стр. 10), достаточно написать $dx=\frac{ds}{\sqrt{1+y'^2}}$ [ds — расстояние в плоскости $(x,\ y)$], положить $i_0'=0$,

Рассмотрим теперь стационарную, пространственную, осесимметрическую задачу (переменные z и r). Здесь i_0 и ϑ зависят от функции тока ψ такой, что

$$\rho r v_z = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \rho r v_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

(v_r и v_z — составляющие скоростей) и потому (14) даст

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = \rho r\left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{a^2}{k-1}\frac{d\ln\vartheta}{d\psi}\right) = H; \qquad (21)$$

уравнение же неразрывности приведется при помощи (6) и (12) к виду

$$(v_z^2 - a^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} + uv\frac{\partial v_z}{\partial r} + uv\frac{\partial v_r}{\partial z} + (v_r^2 - a^2)\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{a^2 v_r}{r}. \qquad (22)$$

Нам надо теперь прибавить вдоль характеристик

$$r = r(z)$$

соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{dr}{dz} = \frac{dv_z}{dz} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{dr}{dz} = \frac{dv_r}{dz} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

и написать:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ v_z^2 - a^2 & v_z v_r & v_z v_r & v_r^2 - a^2 \\ 1 & r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r' \end{vmatrix} = -r'^2(v_z^2 - a^2) + 2v_z v_r r' - (v_r^2 - a^2) = 0,$$

ввести „критическую скорость“

$$a_* = \sqrt{\frac{2(k-1)}{k+1}\, i_0}$$

и „начальную плотность“

$$\rho_0 = \left(\frac{k+1}{2k}\right)^{\frac{1}{k-1}} a_*^{\frac{2}{k-1}}\ \vartheta^{-\frac{k}{k-1}}$$

и разделить (20) на $\sqrt{1 + y_2'^2}$ и $\sqrt{1 + y_1'^2}$ соответственно. Получим (например, для 1-го семейства):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_2'^2}}(du + y_2' dv) = \delta ds,$$

где

$$\delta = \frac{k+1}{2} a_*^2 \frac{d\rho_0}{d\psi}\left(-\frac{k-1}{2k}\frac{V^4}{a_*^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{V^2}{a_*^2} - \frac{k+1}{2k}\right)\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{V^2}{a_*^2}\right)\frac{a_*^2}{V^2}\sqrt{\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{V^2}{a_*^2}}{\frac{V^2}{a_*^2} - 1}}.$$

откуда

$$\frac{dr}{dz} = \frac{v_r v_z \pm a\sqrt{v_r^2 - v_z^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}. \tag{24}$$

Кроме того

$$\begin{vmatrix} 0 & H & -1 & 0 \\ v_z^2 - a^2 & a^2 \dfrac{v_r}{r} & v_z v_r & v_r^2 - a^2 \\ 1 & v_z' & 0 & 0 \\ 0 & v_r' & 1 & r' \end{vmatrix} =$$

$$= H(v_r^2 - a^2 - v_z v_r r') - (v_z^2 - a^2) v_z' r' + a^2 \frac{v_r}{r} r' - v_r' (v_r^2 - a^2) = 0,$$

т. е.

$$\frac{dv_z}{dz} + \frac{dv_r}{dz} \frac{v_r^2 - a^2}{v_z^2 - a^2} \frac{1}{r'} = \frac{a^2 v_r}{r(v_z^2 - a^2)} + H \frac{v_r^2 - a^2 - v_z v_r r'}{(v_z^2 - a^2) r'}. \tag{25}$$

Если обозначить, как и в плоской задаче, через r_1' и r_2' производные по (24), отвечающие знакам плюс (1-е семейство характеристик) и минус (2-е семейство) соответственно, без труда приведем (25) к виду

$$\left.\begin{aligned} dv_z + r_2' dv_r &= \frac{a^2 v_r}{r(v_z^2 - a^2)} dz - H \frac{a\sqrt{v_r^2 + v_z^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2} dz \\ dv_z + r_1' dv_r &= \frac{a^2 v_r}{r(v_z^2 - a^2)} dz + H \frac{a\sqrt{v_r^2 + v_z^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2} dz. \end{aligned}\right\}^{[1]} \tag{26}$$

В заключение считаю долгом выразить благодарность т. Х р и с т и а н о в и ч у, который своим замечанием навел меня на мысль о построении характеристик во всех случаях непосредственно из уравнений (1).

---

[1] Формулы (26) и были получены для случая безвихревых движений (когда $i_0' = \vartheta' = H = 0$) Франклем (loc. cit.[3], стр. 10). Чтобы получить рабочие формулы графического метода для вихревых осесимметрических движений, достаточно разделить (26) на $\sqrt{1 + r_2'^2}$ и $\sqrt{1 + r_1'^2}$ соответственно и заменить dz на $\frac{ds}{\sqrt{1 + r'^2}}$. Мы не останавливаемся на этих элементарных преобразованиях, позволяющих найти здесь „расстояние δ“ из метода Франкля (loc. cit.[3], стр. 10).