

## О ГРАФИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ

*А. Журавский (Ленинград)*

При решении ряда технических задач приходится определять центр тяжести фигуры, заданной графически. К этой задаче приводится и вопрос об определении положения центра тяжести тела, заданного посредством горизонталей.

Графические приемы определения центра тяжести давно и, казалось бы, с законченной полнотой разработаны в графической статике.<sup>1</sup>

Однако в работе горной группы Гинпромеза пришлось столкнуться с вопросом об упрощении производимых построений и сведении их по возможности к небольшому числу однообразных операций.

Путем изменения известных приемов удалось не только внести в них желаемое упрощение, но и прийти к новым способам, представляющим самостоятельный интерес.

В виду практического значения методов определения положения центра тяжести в различных отраслях техники, стоящих далеко от горного дела, представляется более выгодным рассмотреть методы построения центра тяжести отдельно от их приложений в горном деле.

Настоящая статья посвящена изложению полученных нами результатов и тех приемов построения, которые, насколько мы можем судить, являются новыми.

Приложения полученных результатов к вопросам горного дела мы надеемся дать в отдельной статье.

### § 1

Вопрос об определении положения центра тяжести криволинейной плоской фигуры с достаточной для технических целей точностью приводится к определению положения центра тяжести многоугольника, вписанного в эту фигуру.

Эта точность может быть повышена путем увеличения сторон многоугольника. Но уже и при небольшом сравнительно числе сторон погрешности от замены фигуры многоугольником не выходят за пределы чертежных операций.

Общепринятый способ определения центра тяжести многоугольника требует предварительного разбития данного многоугольника на треугольники, построения центров тяжести этих треугольников и определения размеров их

<sup>1</sup> Maurice Levy, La statique graphique, P. I, pp. 210—241.

площадей. Наиболее кропотливой операцией является определение площадей треугольников. Необходимые для этого построения можно, однако, значительно упростить, основываясь на следующем простом соображении.

Если треугольники  $ABC$  и  $AB'C'$  (рис. 1) расположены так, что линии  $BB'$  и  $CC'$ , соединяющие соответствующие вершины треугольников, параллельны линии  $AO$ , проходящей через общую вершину  $A$  треугольников и точку  $O$  пересечения противоположных этой вершине сторон  $BB'$  и  $CC'$ , то они имеют равную площадь.

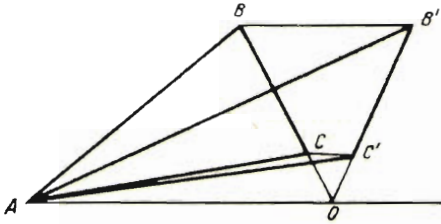


Рис. 1.

В самом деле, площади этих треугольников суть разности между площадями треугольников  $ABO$ ,  $ACO$  и  $AB'O$ ,  $AC'O$  соответственно. Площади треугольников  $ABO$ ,  $AB'O$  и треугольников  $ACO$ ,  $AC'O$  соответственно равны.

Применение этого положения к построению системы отрезков, пропорциональных площадям треугольников, на которые разбивается данный многоугольник, приводит к следующей схеме. Положим, что многоугольник  $ABCDEF$  разбивается на ряд треугольников, имеющих общую вершину в точке  $A$  (рис. 2). Проводим из точки  $B$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения с продолжением стороны  $DC$  в точке  $B'$ . Через точки  $B'$  и  $C$  проводим прямые  $CC'$  и  $B'B''$ , параллельные  $AD$ , до их пересечения с продолжением стороны  $ED$  в точках  $C'$  и  $B''$  соответственно. Через точку  $G$  проводим прямую линию  $GG'$

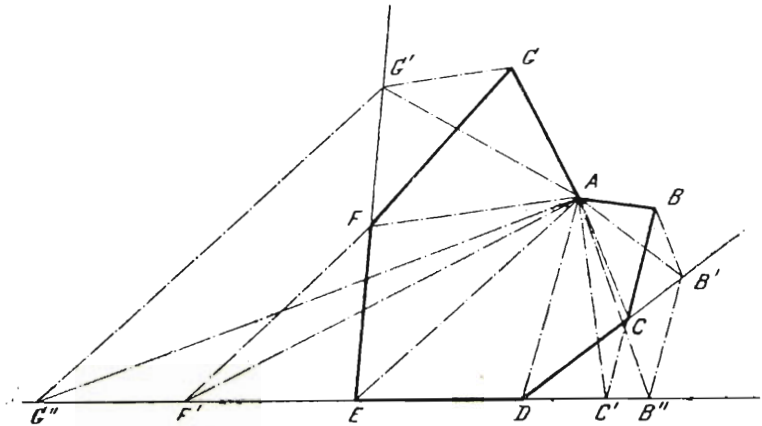


Рис. 2.

параллельно  $AF$  до пересечения с продолжением стороны  $EF$  в точке  $G'$ . Через точки  $G'$  и  $F$  проводим прямые  $G'G''$  и  $FF'$  параллельно  $AE$  до пересечения с продолжением сторон  $DE$  в точках  $G''$  и  $F'$  соответственно.

Легко видеть, что площадь  $\triangle ABC$  равняется площади  $\triangle AB'C$  и что эта последняя равняется площади  $\triangle AB''C'$ . По тем же соображениям следует, что площадь  $\triangle ACD$  равняется площади  $\triangle AG'D$ , площадь  $\triangle AEF$  равняется площади  $\triangle AEF'$  и, наконец, площадь  $\triangle AGF$  равняется площади  $\triangle AG'F'$  и равняется площади  $\triangle AG''F''$ . Треугольники  $AC'B''$ ,  $ADC'$ ,  $AED$ ,  $AF'E$



и  $AG''F'$  имеют общую вершину, а основания их расположены на одной прямой. Площади этих треугольников относятся друг к другу как основания. Построенная система отрезков  $B''C'$ ,  $C'D$ ,  $DE$ ,  $EF'$  и  $F'G''$  дает систему отрезков, пропорциональных площадям треугольников  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$  и  $AFG$ .

Заметим, что, производя построение с помощью линейки и угольника, необходимо лишь продолжить стороны многоугольника и отметить на них соответствующие точки. Проведение линий, указанных пунктиром, представляется излишним. Предложенное построение производится весьма быстро и не усложняет чертежа. На рис. 3 дано то же построение в рабочем виде.

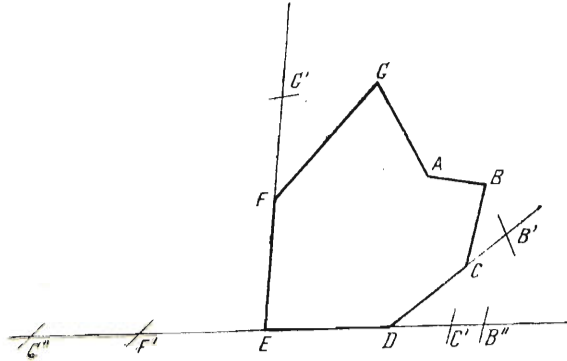


Рис. 3.

Построение центра тяжести многоугольника сводится к построению центра тяжести системы точек, расположенных в центрах тяжести треугольников, на которые распадается данный многоугольник. Массы этих точек пропорциональны площадям треугольников. Построение может быть произведено с помощью правила веревочного многоугольника.

Схема построений располагается следующим образом.

Данный многоугольник  $ABCDEF$  разбивается на ряд треугольников диагоналями, идущими из общей вершины. На рис. 4 такой вершиной является  $A$ . Из точки  $A$  проводится прямая, на которой последовательно откладываются равные отрезки  $AI$  и  $IИ$ . Длины этих отрезков, равно как и направление самой прямой, произвольны. На стороне  $AG$  отмечается точка  $Q$  пересечения ее с линией, проведенной через точку  $I$  параллельно  $HG$ . На диагонали  $AF$  отмечается точка  $P$  пересечения ее с прямой, проведенной через  $Q$  параллельно  $GF$ . На диагонали  $AE$  отмечается точка  $N$  пересечения ее с прямой, проведенной через точку  $P$  параллельно стороне  $FE$ , и т. д. Точки  $Q$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $L$  являются серединами соответствующих сторон или диагоналей многоугольника.

Определяем точку  $e$  пересечения прямых  $FQ$  и  $GP$ , точку  $d$  пересечения прямых  $FN$  и  $EP$ , точку  $c$  пересечения прямых  $DN$  и  $EM$ , и т. д.

Точки  $e$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $a$  являются центрами тяжести соответствующих треугольников.

Исходя из вершины  $A$ , строим систему отрезков  $B''C'$ ,  $C'D$ ,  $DE$ ,  $EF'$ ,  $F'G''$ , пропорциональных площадям треугольников  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$ ,  $AFG$ .

Через точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  проводим линии  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ ,  $\delta\delta'$ ,  $\epsilon\epsilon'$ , параллельные линии  $B''G''$ . Приняв точку  $O$  за полюс, проводим через точку  $a$  линию  $Ra$  параллельно  $OB''$ . Через точку  $a$  проводим далее линию  $aS$  параллельно  $OC'$  до пересечения с  $\beta\beta'$  в точке  $S$ . Через точку  $S$  проводим прямую, параллельную  $OD$ , до пересечения ее с  $\gamma\gamma'$  в точке  $T$ , и т. д. Наконец, из точки  $V$ , полученной в пересечении  $\epsilon\epsilon'$  с прямой, параллельной  $OF'$ , проводим прямую  $VW$  параллельно  $OG''$  до ее пересечения с линией  $aR$  в точке  $W$ . Из точки  $W$  проводим прямую  $\lambda\lambda'$  параллельно прямой  $B''G''$ .

Строим систему отрезков  $B''C'$ ,  $C'D$ ,  $DE$ ,  $EF'$  и  $F'G''$  на другом основании. Пусть отрезки  $B_1''C_1'$ ,  $C_1'D_1$ ,  $D_1E_1$ ,  $E_1F_1'$  и  $F_1'G_1''$  представляют эту

систему отрезков в новом положении. Через точки  $a, b, c, d, e$  проводим систему прямых линий  $\alpha_1\alpha_1', \beta_1\beta_1', \gamma_1\gamma_1', \delta_1\delta_1', \epsilon_1\epsilon_1'$ , параллельных прямой  $B_1''G_1''$ . Приняв точку  $O$  за полюс, проводим то же построение в отношении новой системы отрезков и соответствующих параллельных линий, которое было указано для старой системы. В результате построения получаем линию  $\lambda_1\lambda_1'$ , параллельную  $B_1''G_1''$ .

Точка  $Z$  пересечения линий  $\lambda_1\lambda_1'$  и  $\lambda\lambda'$  определяет положение центра тяжести многоугольника.

Линии, указанные на чертеже пунктиром, можно не проводить, и положение соответствующих точек определять засечками.

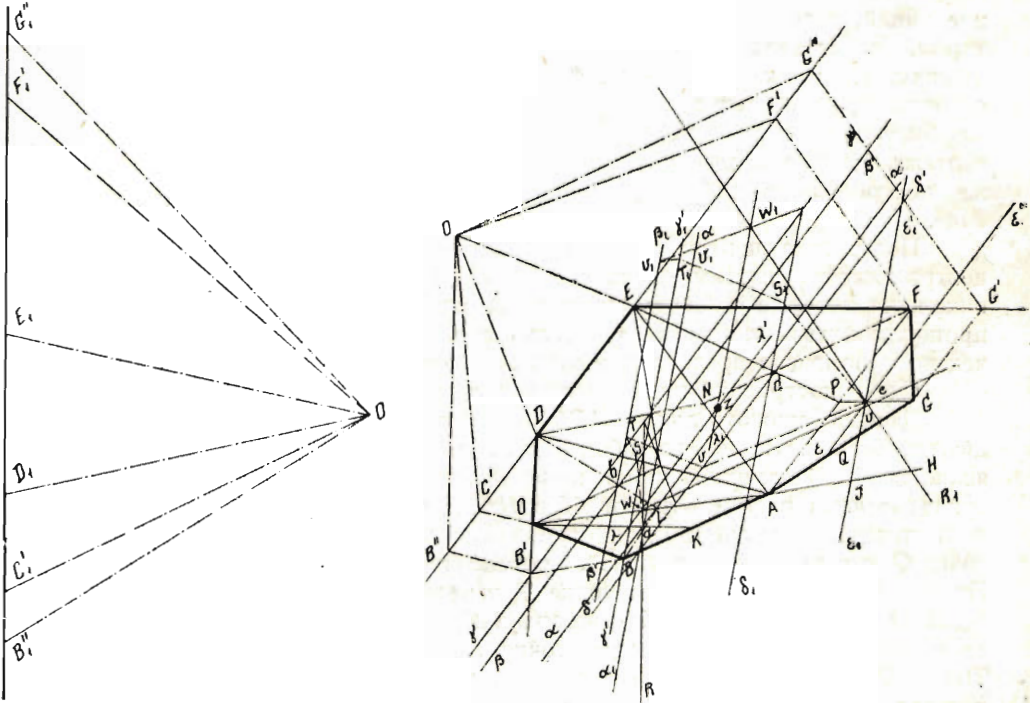


Рис. 4.

## § 2

Другой способ построения центра тяжести основывается на следующих соображениях. Положим, что из двух материальных точек  $A$  и  $B$  точка  $B$  переместилась в новое положение  $C$ . Если первоначальное положение центра тяжести  $L$  точек  $A$  и  $B$  на прямой  $AB$  известно, то новое положение  $M$  центра тяжести (читатель здесь не затруднится сделать чертеж) системы точек  $A$  и  $C$  на прямой  $AC$  определяется как точка пересечения прямой  $AC$  с прямой  $LM$ , проведенной через точку  $L$  параллельно прямой  $BC$ . В самом деле, центр тяжести двух точек делит отрезок, их соединяющий, в отношении, обратно пропорциональном массам этих точек. Масса точки  $B$  равна массе точки  $C$ . Отношение отрезков  $AL$  и  $BL$  должно равняться отношению отрезков  $AM$  и  $CM$ . Линия перемещения центра тяжести  $M$  параллельна линии  $BC$ .



Перейдем теперь к следующему случаю. Пусть точка  $M$  является центром тяжести треугольника  $ABC$  (рис. 5). Положим, что вершина  $B$  перемещается в новое положение  $B'$  по прямой, параллельной  $AC$ .

Если положение  $M$  центра тяжести треугольника  $ABC$  известно, то новое положение центра тяжести  $M'$  найдется как точка пересечения прямой  $LB'$ , соединяющей середину отрезка  $AC$  с точкой  $B'$ , и прямой  $MM'$ , параллельной направлению перемещения точки  $B$ , т. е. основанию  $AC$ . Обратимся к более сложному примеру. Положим, что мы умеем находить центр тяжести многоугольника с  $n$  сторонами.

Рассмотрим многоугольник с  $n+1$  стороной. На рис. 6 взят семиугольник, т. е. число  $n$  принято равным шести. Проводим через вершину  $B$  многоугольника прямую, параллельную диагонали  $AC$ , и отмечаем точку  $B'$  ее пересечения с продолжением стороны  $CD$ . Согласно сделанному нами предположению мы умеем находить центр тяжести шестиугольника. Таким образом положение  $M_0$  центра тяжести многоугольника  $ACDEFG'$  и поло-

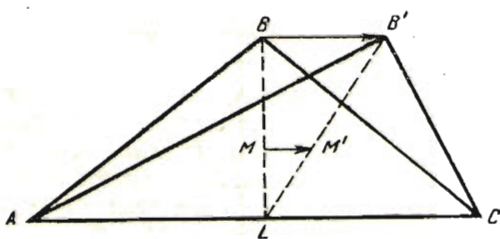


Рис. 5.

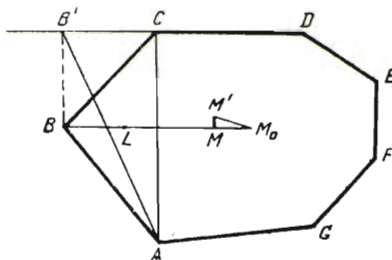


Рис. 6.

жение  $M'$  центра многоугольника  $AB'DEFG$  можно считать известным. Положение  $L$  центра тяжести  $ABC$  находится известным построением. При перемещении вершины треугольника по линии  $BB'$ , параллельной  $AC$ , центр тяжести треугольника и всего многоугольника перемещается по линии, параллельной  $AC$ . Проведя через точку  $M'$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения с  $LM_0$  в точке  $M$ , определим центр тяжести многоугольника  $ABCDEFG$ .

Развитие этого приема перехода от многоугольника с  $n$  сторонами к многоугольнику с  $n+1$  стороной приводит к следующей схеме построения центра тяжести многоугольника. Данный многоугольник  $ABCDEFG$  (рис. 7) разбивается на ряд треугольников посредством диагоналей, выходящих из вершины  $A$ . Через точку  $A$  проводится прямая линия, на которой откладываются три равных отрезка  $AI$ ,  $IK$ ,  $KL$ . Через точку  $I$  проводится прямая линия  $IM$  параллельно  $KG$  до пересечения с  $AG$  в точке  $M$ . Отмечается точка  $N$  пересечения прямой  $KN$ , параллельной  $GL$ , со стороной  $AG$ . Через точку  $N$  проводится прямая, параллельная стороне  $GF$ , и на диагонали  $AF$  отмечается точка пересечения  $O$ . На той же диагонали отмечается точка  $T$  пересечения с прямой, параллельной  $GF$  и проходящей через точку  $M$ . Через точку  $O$  проводится прямая, параллельная стороне  $FE$ , и на диагонали  $AE$  отмечается как точка  $P$  ее пересечения с этой прямой, так и точка  $U$  пересечения с прямой, проведенной через точку  $T$  параллельно стороне  $FE$ . Через точку  $P$  проводим прямую, параллельную стороне  $DE$ , и т. д.

Точки  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  делят соответствующие стороны и диагонали в отношении 2:1. Точки  $M$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  являются серединами соответствующих сторон и диагоналей многоугольника.

Продолжаем сторону  $CD$  и отмечаем на ней точку  $B'$  пересечения с прямой, проходящей через  $B$  и параллельной  $AC$ . Продолжаем сторону  $DE$  и отмечаем на линии  $DE$  точки  $B''$ ,  $C'$  пересечения с прямыми, проходящими

через точки  $B'$  и  $C$  параллельно диагонали  $AD$ .

Продолжаем сторону  $EF$  и отмечаем на ней точки пересечения с прямыми, проходящими через точки  $D$ ,  $C'$ ,  $B''$  параллельно диагонали  $AE$ . Таким же образом поступают и со стороной  $FG$ .

На прямой  $RS$  отмечаем точку ее пересечения  $e$  с линией  $BW$ . На прямой  $QR$  отмечаем точки  $d'$  и  $d''$  ее пересечения с прямыми  $B'V$  и  $CV$  и т. д. Наконец, на прямой  $NO$  отмечаем точки ее пересечения с прямыми  $FM$ ,  $E'M$ ,  $D'M$ ,  $C'M$  и  $B''M$ . Легко видеть, что  $e$  есть центр тяжести треугольника  $ABC$ . Точки  $d$  и  $d'$  являются центрами тяжести треугольников  $ACD$  и  $AB'D$  и т. д. Точки  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  расположены в центрах тяжести треугольников  $AGF$ ,  $AGE'$ ,  $AGD''$ ,  $AGC'''$ ,  $AGB''''$  соответственно. Действительно, каждая из указанных точек лежит на медиане соответствующего треугольника в расстоянии двух третей ее от вершины. Стороны треугольников не показаны на рис. 7 полностью, чтобы его не усложнять.

Получив на прямой  $NO$ ,  $OP$  и т. д. серии точек  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$ ,  $a''''$ ,

$b$ ,  $b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$  и т. д. производим дальнейшее построение. Соединяем точку  $a$  с точками  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$  прямыми и отмечаем на первой из них точку  $\alpha$  ее пересечения с прямой, проведенной через точку  $a'$  параллельно диагонали  $AF$ , на второй—точку  $\alpha'$  пересечения с прямой, проведенной через  $a''$  параллельно той же диагонали, и т. д.

Точку  $\alpha$  соединяем прямыми с точками  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ . На первой из этих прямых отмечаем точку  $\beta$  пересечения с прямой, проходящей через  $\alpha'$  парал-

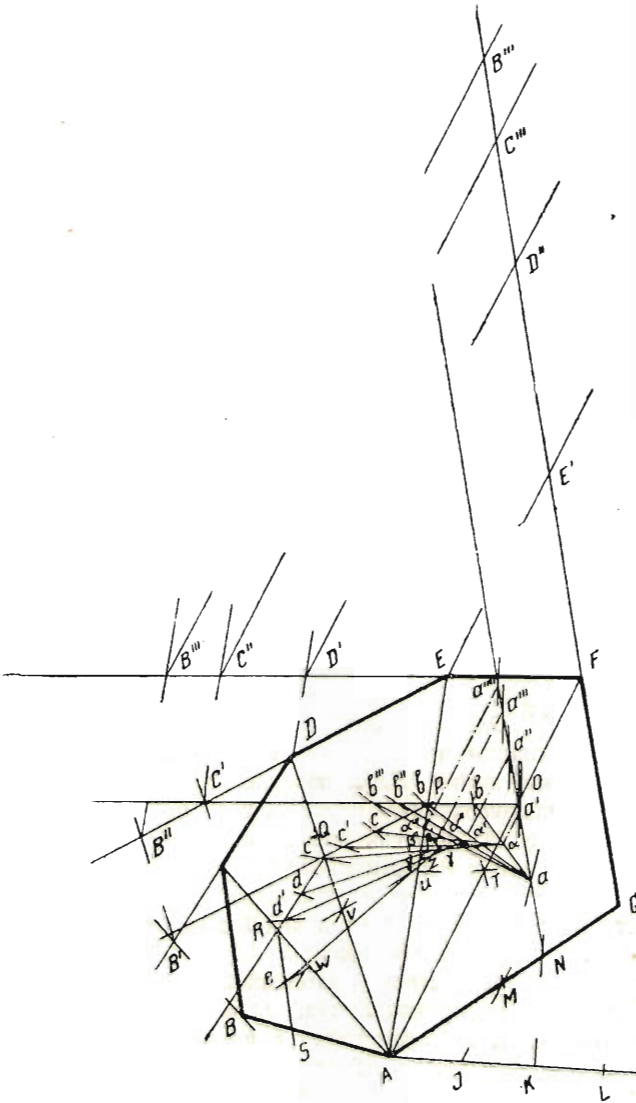


Рис. 7.



тельно диагонали  $AE$ , на второй отмечаем точку  $\beta'$  пересечения с прямой, проходящей через  $\alpha''$  параллельно диагонали  $AE$ , на третьей точку  $\beta''$  пересечения с прямой, проходящей через точку  $\alpha'''$  параллельно той же диагонали.

Точку  $\beta$  соединяем прямыми с точками  $d$  и  $d'$ ; аналогичным построением определяем на них точки  $\gamma$  и  $\gamma'$ .

Наконец, точку  $\gamma$  соединяем с точкой  $e$  и на прямой  $\gamma e$  отмечаем точку  $Z$  ее пересечения с прямой, проходящей через точку  $\gamma'$  параллельно последней диагонали  $AC$ .

Точка  $Z$  есть центр тяжести многоугольника.

В самом деле, пользуясь соображениями, развитыми в начале настоящего параграфа, можно утверждать, что точка  $\alpha$  есть центр тяжести треугольника  $AGFE$ , точка  $\alpha'$  есть центр тяжести четырехугольника  $AGFD'$ , точка  $\alpha''$  есть центр тяжести четырехугольника  $AGFC''$  и, наконец, точка  $\alpha'''$  есть центр тяжести четырехугольника  $AGFB'''$ .

Из тех же соображений следует, что точка  $\beta$  служит центром тяжести пятиугольника  $AGFED$ , точка  $\beta'$  служит центром тяжести пятиугольника  $AGFEC'$  и точка  $\beta''$  — центром тяжести пятиугольника  $AGFEB''$ .

Точки  $\gamma$  и  $\gamma'$  являются центрами тяжести пятиугольников  $AGFEDC$  и  $AGFEDB'$ . Наконец, точка  $Z$  есть центр тяжести данного многоугольника.

Рассмотренный в предыдущем параграфе прием построения центра тяжести основан на изучении изменения положения центра тяжести многоугольника при деформации его в многоугольник с меньшим числом сторон. Естественно поставить себе вопрос: нельзя ли определить перемещение центра тяжести многоугольника по перемещению отдельных его вершин? Решению этого вопроса предположим следующие замечания. Если вершина треугольника  $ABC$  перемещается по линии, параллельной основанию, на вектор  $BB'$  (рис. 5), то центр тяжести треугольника  $M$  перемещается на вектор  $MM'$ , равный одной трети вектора  $BB'$ . Таким образом вектор, характеризующий перемещение центра тяжести треугольника, вполне определяется вектором, характеризующим перемещение вершины.

Рассмотрим теперь систему двух точек  $A$  и  $B$ . Пусть  $\mu$  обозначает отношение массы точки  $B$  к общей массе системы. Расстояние  $LA$  центра тяжести  $L$  системы от точки  $A$  определяется равенством

$$LA : AB = \mu.$$

При перемещении точки  $B$  в положение  $C$  центр тяжести переходит в точку  $M$ , причем

$$MA : AC = \mu.$$

Вектор характеризующий перемещение центра тяжести, параллелен вектору  $BC$ , характеризующему перемещение точки  $B$ , и длина его равна длине вектора  $BC$ , умноженной на  $\mu$ . Таким образом, зная массы точек и вектор, характеризующий перемещение одной из них, можно построить вектор, характеризующий перемещение центра тяжести системы. Положим теперь, что мы имеем дело с системой точек  $A, B, \dots, L$ , центр тяжести которой приходится в точке  $M$ . Пусть числа  $\mu_a, \mu_b, \dots, \mu_l$  обозначают отношение массы каждой из точек  $A, B, \dots, L$  к общей массе всей системы. Пусть точки  $A, B, \dots, L$  переходят в новое положение  $A', B', \dots, L'$ . Центр тяжести переместится при этом из положения  $M$  в положение  $M'$ . Рассматривая все перемещение системы как результат последовательного перехода отдельных точек из старого положения в новое, можем заключить, что при переходе точки  $A$  в положение  $A'$  центр тяжести перемещается на вектор  $\mu_a AA'$ , при переходе точки  $B$  в положение  $B'$  центр тяжести пере-

мещается на вектор  $\mu_b BB'$  и т. д. Вектор  $MM'$ , характеризующий окончательное перемещение центра тяжести, представляется как геометрическая сумма

$$MM' = \mu_a AA' + \mu_b BB' + \dots + \mu_l LL'.$$

Изложенные соображения приводят к следующей схеме построения центра тяжести. Разбиваем весь многоугольник на треугольники с общей вершиной в точке  $E$ . Эти треугольники показаны на чертеже пунктиром. Из точки  $D$  проводим прямую  $DD'$ , параллельную диагонали  $CE$  до пересечения с продолжением стороны  $BC$  в точке  $D'$ . Через точку  $D'$  проводим прямую  $D'D''$ , параллельную диагонали  $BE$ , до пересечения со стороной  $AB$  в точке  $D''$ . Такое же построение прodelьываем, исходя от точки  $F$ . Через

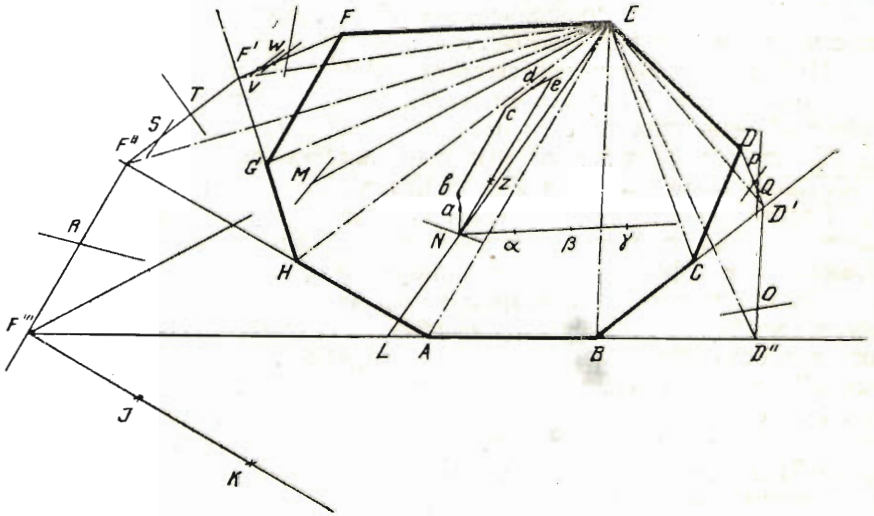


Рис. 8.

точку  $F$  проводим прямую  $FF'$ , параллельную диагонали  $EG$ , до ее пересечения с продолжением  $GH$  в точке  $F'$ . Через точку  $F'$  проводим прямую  $F'F''$  параллельно диагонали  $EH$  до ее пересечения с продолжением  $AH$  в точке  $F''$  и через точку  $F''$  проводим прямую  $F''F'''$  параллельно диагонали  $EA$  до пересечения с продолжением  $AB$  в точке  $F'''$ . Отрезки  $F'''A$ ,  $AB$ ,  $BD''$  пропорциональны площадям многоугольников  $AEFGH$ ,  $AEB$ ,  $BCDE$ . Отмечаем на стрезке  $D'D''$  точку  $O$  пересечения с прямой, проведенной через  $B$  параллельно  $F''D'$ . Отношение  $OD'' : D'D''$  равно отношению площади четырехугольника  $BCDE$  к площади всего многоугольника.

На отрезке  $DD'$  отмечаем точку  $P$  пересечения с прямой, проведенной через  $C$  параллельно прямой  $BD$ . Отношение  $PD' : DD'$  равно отношению площади треугольника  $CDE$  к площади четырехугольника  $BCDE$ . Отмечаем на отрезке  $PD'$  точку  $Q$  пересечения с прямой, проведенной через точку  $O$  параллельно прямой  $PD''$ . Отношение  $PQ : PD'$  равно отношению площади четырехугольника  $BCDE$  к площади всего многоугольника. Отношение

$$\frac{PQ}{DD'} \cdot \frac{PQ}{PD'} \cdot \frac{PD'}{DD'} = \frac{\text{пл. } CDE}{\text{пл. } ABCDEFGH}.$$

На отрезке  $F''F'''$  отмечаем точку  $R$  пересечения с прямой, параллельной прямой  $D''F'''$  и проходящей через точку  $R$ . Отношение отрезка  $F'''R$



к отрезку  $F''F'''$  равно отношению площади пятиугольника  $A'EFGH$  к площади всего многоугольника.

На отрезке  $F'F''$  отмечаем точку  $T$  пересечения с прямой, проходящей через  $H$  и параллельной прямой  $AF'$ , и точку  $S$  пересечения с прямой, проходящей через  $R$  и параллельной прямой  $F''T$ . Отношение  $ST$  к  $F'F''$  равно отношению площади четырехугольника  $EFGH$  к площади всего многоугольника.

На отрезке  $FF'$  отмечаем точку  $U$  пересечения с прямой, проходящей через  $G$  и параллельной прямой  $FH$ . На отрезке  $F'U$  отмечаем точки  $V$  и  $W$  пересечения с прямыми, проведенными через точки  $S$  и  $T$  параллельно прямой  $FF''$ . Не трудно видеть, что отношение отрезка  $VW$  к отрезку  $FF'$  равно отношению площади треугольника  $EFG$  к площади всего многоугольника.

Через точку  $F'''$  проводим прямую и откладываем на ней равные отрезки  $F'''I$  и  $IK$ ; размеры отрезков и направление прямой можно выбрать по произволу. На прямой  $D''F'''$  отмечаем точку  $L$  пересечения с прямой, проведенной через  $I$  параллельно прямой  $KD''$ . Точки  $L$  и  $F'''$  соединяем с точкой  $E$ . На прямой  $EF'''$  отмечаем точку  $M$  пересечения с прямой, проходящей через  $I$  и параллельной прямой  $EK$ . На прямой  $LE$  отмечаем точку  $N$  ее пересечения с прямой  $MD''$ . Точка  $N$  есть центр тяжести треугольника  $EF'''D''$ .

Исходя из точки  $N$ , строим геометрическую сумму векторов, равных и параллельных отрезкам  $D''O$ ,  $QP$ ,  $F''R$ ,  $ST$ ,  $VW$ . Вектор  $Ne$ , изображающий сумму, делим известным приемом на три равные части, для чего на чертеже проводится произвольная прямая через точку  $N$  и по ней откладываются равные отрезки  $Nx$ ,  $\alpha\beta$ ,  $\beta\gamma$ . Точка  $Z$  пересечения  $Ne$  с прямой, проведенной через  $\alpha$  параллельно  $e\gamma$ , есть центр тяжести многоугольника.

Чтобы убедиться в правильности изложенного приема, заметим, что многоугольник  $ABCDEF'GH$  получается из треугольника  $EF'''D''$  последовательным его превращением сначала в четырехугольник  $BD'EF'''$ , потом в пятиугольник  $BCDEF'''$ , затем в шестиугольник  $ABCDEF'''$ , наконец в семиугольник  $ABCDEF'GH$  и данный многоугольник  $ABCDEF'GH$ . Рассматривая первое преобразование  $\triangle D''EF'''$ , разделяем его на два треугольника:  $\triangle BEF'''$  и  $\triangle BDE''$ . Первый треугольник не изменяется. Вершина второго перемещается из  $D''$  в  $D'$  по прямой, параллельной основанию  $BE$ . Центр тяжести первого треугольника остается неподвижен. Центр тяжести второго перемещается на вектор, равный одной трети  $D''D'$ . Вызываемое этим перемещение общего центра тяжести происходит на вектор, параллельный отрезку  $D''D'$ , причем длина его относится к длине  $D''D'$  как площадь треугольника  $EBD''$  или, что то же самое, как площадь четырехугольника  $BCDE$  относится к площади всего многоугольника. Вектор, характеризующий перемещение центра тяжести, при первом преобразовании равняется  $\frac{1}{3} D''O$ .

При втором перемещении многоугольник  $BCEF'''$  остается неподвижен, а вершина  $D'$  треугольника  $CD'E$  перемещается в точку  $D$  по линии, параллельной стороне  $CE$ . Центр тяжести четырехугольника  $BCEF'''$  не изменяет своего положения. Центр тяжести треугольника перемещается на вектор, равный  $\frac{1}{3}$  вектора  $D'D$ . Перемещение центра тяжести всей фигуры происходит на вектор, равный произведению  $\frac{1}{3}$  вектора  $D'D$  на отношение площади треугольника к площади всей фигуры, т. е. на  $\frac{1}{3}$  вектора  $QP$ .

Разбирая таким же образом дальнейшие преобразования фигуры, убедимся, что они вызывают последовательное перемещение центра тяжести по величине векторов, равных  $\frac{1}{3}$  вектора  $F''R$ ,  $\frac{1}{3}$  вектора  $ST$  и  $\frac{1}{3}$  вектора  $VW$ .

Произведенное построение дает в качестве геометрической суммы вектор  $Ne$ . Этот вектор равняется одной трети вектора, характеризующего перемещение центра тяжести треугольника  $D''EF'''$  в результате произведенных преобразований. Откладывая от точки  $N$  одну треть длины  $Ne$ , получаем вектор  $NZ$ , характеризующий перемещение центра тяжести при переходе от вспомогательного треугольника  $D''EF'''$  к многоугольнику  $ABCDEFGH$ . Точка  $Z$  — конец этого вектора — определяет положение центра тяжести многоугольника.

Заметим в заключение, что пунктирные линии могут быть опущены при построении.

#### § 4

Применение описанных приемов к нахождению центра тяжести плоской фигуры, ограниченной кривою линиею, связано с заменой криволинейного контура вписанной в него ломаной линией и определением положения центра

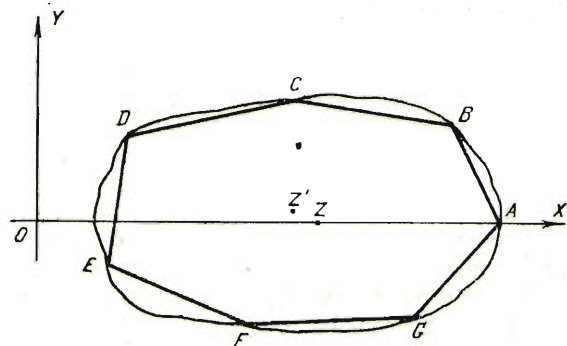


Рис. 9.

тяжести вписанного многоугольника вместо центра тяжести данной фигуры. Представляется интересным оценить величину погрешности в определении положения центра тяжести, связанную с такой заменой. Для этого проведем через центр тяжести  $Z$  площади данной фигуры произвольную прямую линию (рис. 9) и посмотрим, на каком расстоянии от этой прямой окажется центр тяжести  $Z'$  многоугольника, заменившего фигуру. Обозна-

чим расстояние точки  $Z'$  от прямой через  $d$ , площадь фигуры — через  $S$ . Момент площади многоугольника относительно рассматриваемой прямой мало разнится от момента площади фигуры, который равен нулю. Обозначим этот момент буквой  $\Delta$ . Наконец, буквой  $\Delta'$  обозначим разность между площадью многоугольника и площадью всей фигуры.

Расстояние  $d$  определяется формулой

$$d = \frac{|\Delta|}{S - \Delta'}. \quad (1)$$

Так как  $\Delta$  величина малая относительно  $S$ , то, пренебрегая малыми высших порядков, можем положить

$$d = \frac{|\Delta|}{S}.$$

Так как момент площади фигуры равен нулю, то величина  $\Delta$  равняется разности между моментом площади фигуры и площадью многоугольника,



т. е. моменту площади, заключенной между периметром многоугольника и периметром фигуры. Моменты участков последней площади, лежащие вне данной фигуры, берутся при этом со знаком +, моменты участков, приходящиеся внутри данной фигуры, со знаком —.

Приняв рассматриваемую прямую за ось и относя рассматриваемую фигуру к системе прямоугольных координат, получаем для  $\Delta$  выражение

$$\Delta = \int \int_T y \, dx \, dy, \tag{2}$$

где интегрирование распространяется на область  $T$ , заключенную между периметром многоугольника и периметром фигуры. Обозначим через  $y$  ординату периметра фигуры и через  $Y$  ординату периметра многоугольника, получим отсюда формулу

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b (Y^2 - y^2) \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b (Y'^2 - y'^2) \, dx,$$

где интегрирование распространяется по отрезку оси  $OX$ , заключенному внутри фигуры, как для нижней части фигуры, так и для верхней. Знаками  $Y'$  и  $y'$  обозначены ординаты точек периметра фигуры и многоугольника, лежащих ниже оси  $OX$ .

Представляем это равенство в виде

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b (Y - y) \left( \frac{Y + y}{2} \right) \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b (Y' - y') \left( \frac{Y' + y'}{2} \right) \, dx \tag{3}$$

и обозначим через  $H$  максимальную величину разностей  $(Y - y)$  и  $(Y' - y')$ . Из равенства (3) следует

$$|\Delta| < H \left( \int_a^b \frac{Y + y}{2} \, dx + \int_a^b \left| \frac{Y' + y'}{2} \right| \, dx \right). \tag{4}$$

Сумма интегралов, стоящих в правой части равенства (4), выражает площадь некоторой фигуры, заключающейся между данной фигурой и многоугольником. Площадь ее мало отличается от площади  $S$ . Таким образом окончательно получаем

$$|\Delta| < H \cdot S$$

и из равенства (1) вытекает

$$d < H. \tag{5}$$

Неравенство (5) показывает, что величина  $d$  не превосходит наибольшего значения разности между ординатой фигуры и ординатой многоугольника.

Так как расстояние между  $Z'$  и  $Z$  есть расстояние от точки до определенной прямой, проходящей через точку, то оценка, данная для случая любой прямой, будет сохраняться в силе и для этого случая.

Окончательно приходим к следующему правилу. Величина уклонения центра тяжести от его истинного положения характеризуется средним расстоянием точек контура фигуры от точек многоугольника.

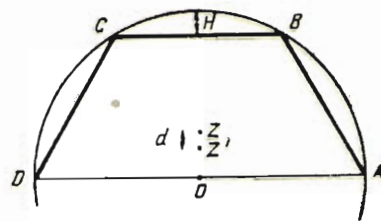


Рис. 10.

Заметим, что эта оценка в большинстве случаев дает лишь верхний предел погрешности, и истинная ошибка значительно меньше.

Полученное правило иллюстрируем примером. Положим, что, желая определить истинное положение центра тяжести полукруга, мы заменили бы полукруг правильным полумногоугольником с 4 сторонами. Как центр тяжести полукруга  $Z$ , так и центр  $Z'$  тяжести полумногоугольника лежат на диаметре окружности, перпендикулярном  $AD$ .

Нижеследующая таблица дает величину  $d$  для различных значений  $n$  и соответствующее максимальное значение  $H$  расстояния от точек окружности до многоугольника. Числа таблицы даны в долях радиуса  $K$ .

| $n$   | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $d:R$ | 0,039 | 0,022 | 0,012 | 0,009 | 0,007 | 0,006 | 0,005 | 0,004 |
| $H:R$ | 0,183 | 0,075 | 0,049 | 0,034 | 0,025 | 0,019 | 0,015 | 0,012 |

Из таблицы видно, что  $d$  остается все время значительно меньшим  $H$ . Если принять за среднее уклонения точек окружности от точек многоугольника половину максимальной величины, то и тогда полученная оценка погрешности будет несколько велика.

Все сказанное здесь подтверждает, что прием определения положения центра тяжести плоской фигуры, основанный на замене криволинейной фигуры многоугольником, позволяет при сравнительно небольшом числе сторон многоугольника достигать вполне удовлетворительных результатов.