ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНО НАГРЕТОМ КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

Н. Лебедев

Предположим, что дана длинная труба, имеющая внутри одну, а вне — другую температуру.

Допустим, далее, что эта температура зависит как от радиуса r, так и от полярного угла θ [1] и выражается какой-либо известной нам функцией переменных r и θ.

Поставим задачу определения напряжений, возникающих в любом месте трубы.

Деформацию трубы будем считать плоской. Тогда, как известно, [2] напряжения выражаются через бигармоническую функцию U, и частное решение уравнения Пуассона T_1. По формулам

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(U_1 - T_1)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(U_1 - T_1)}{\partial\theta^2} \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\partial^2(U_1 - T_1)}{\partial r^2} \\ \widehat{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(U_1 - T_1)}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2(U_1 - T_1)}{\partial r\,\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(U_1 - T_1)}{\partial\theta}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\nabla^2\nabla^2 U_1 = 0$; $\nabla^2 T_1 = t_1(r, \theta)$, причем $t_1(r, \theta)$ — функция распределения температуры в сечении трубы, умноженная на некоторый постоянный коэфициент.

Функцию $t_1(r, \theta)$ представим разложенной в ряд Фурье по cos и sin угла θ. Очевидно, коэфициенты при $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ будут о п р е д е л е н н ы м и функциями r.

Разложение имеет вид: [3]

$$t_1(r, \theta) = \varphi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(r)\cos n\theta + \psi_n(r)\sin n\theta, \tag{2}$$

---

[1] Если температура зависит от времени, то время можно рассматривать в качестве параметра, и последующие выкладки останутся неизменными.

[2] См. нашу статью в журнале „Прикл мат. и мех.“, т. 2, № 1, 1934.

[3] См. В. И. С м и р н о в, Курс высшей математики, т. 2, стр. 381 и 434.

где

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1(r, \zeta) \cos n\zeta \, d\zeta,$$

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_1(r, \zeta) \sin n\zeta \, d\zeta$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Член $\varphi_0(r)$ мы здесь отбросим. Решение, соответствующее этому члену, имеется в уже цитированной выше статье.

Функцию T_1 естественно искать в виде:

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + \chi_n(r) \sin n\theta]. \tag{3}$$

Подставив это значение T_1 в уравнение $\nabla^2 T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(r) \cos n\theta + \psi_n(r) \sin n\theta]$, найдем, что $f_n(r)$ и $\chi_n(r)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) = \varphi_n(r) \\ \chi_n''(r) + \frac{1}{r} \chi_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} \chi(r) = \psi_n(r) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для определения $f_n(r)$ введем в первое уравнение (4) новую переменную $z = \ln r$. После этой замены получаем:

$$f_n''(z) - n^2 f_n(z) = e^{2z} \varphi_n(e^z) = \omega_n(z). \tag{A}$$

Решение уравнения

$$f_n''(z) - n^2 f_n(z) = 0$$

есть

$$f_n(z) = a_n e^{nz} + b_n e^{-nz}.$$

Решение неоднородного уравнения (A) находится методом варьирования постоянных. Для этого будем считать a_n и b_n функциями от z. Производная от f_n есть

$$f_n'(z) = a_n' e^{nz} + b_n' e^{-nz} + n(a_n e^{nz} - b_n e^{-nz}).$$

Положим

$$a_n' e^{nz} + b_n' e^{-nz} = 0.$$

Тогда

$$f_n''(z) = n^2 f_n(z) + n(a_n' e^{nz} - b_n' e^{-nz}),$$

что с (A) дает

$$n(a_n' e^{nz} - b_n' e^{-nz}) = \omega_n(z).$$

Так как

$$b_n' = -a_n' e^{2nz}, \tag{B}$$

то $2na_n' e^{nz} = \omega_n(z)$, а деля на $2ne^{nz}$ и интегрируя, найдем

$$a_n = \frac{1}{2n}\int_{k_n'}^{e^z} e^{-nz}\omega_n(z)\,dz + A_n.$$

Точно также из (В)

$$b_n = -\frac{1}{2n}\int_{l_n'}^{e^z} c^{nz}\,\omega_n(z)\,dz + B_n.$$

Окончательно для $f_n(z)$ имеем [1]

$$f_n(z) = A_n e^{nz} + B_n e^{-nz} +$$

$$+\frac{e^{nz}}{2n}\int_{k_n'}^{e^z} e^{-nz}\,\omega_n(z)\,dz - \frac{e^{-nz}}{2n}\int_{l_n'}^{e^z} e^{nz}\,\omega_n(z)\,(dz). \qquad (B)$$

Для $\chi_n(z)$ получим аналогичное выражение.

После подстановки их в (3) и перехода к переменной r, получаем [2]

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r^n}{2n}\int_{k_n}^{r} r^{-n+1}\varphi_n(r)\,dr - \frac{r^{-n}}{2n}\int_{l_n}^{r} r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\right\}\cos n\theta +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r^n}{2n}\int_{l_n}^{r} r^{-n+1}\psi_n(r)\,dr - \frac{r^{-n}}{2n}\int_{l_n}^{r} r^{n+1}\psi_n(r)\,dr\right\}\sin n\theta. \qquad (5)$$

Теперь остается найти функцию U_1. Ее необходимо взять в виде [3]

$$U = (b_1 r^3 + \alpha_1 r^{-1})\cos\theta + (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1})\sin\theta +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n r^n + b_n r^{n+2} + \alpha_n r^{-n} + \beta_n r^{-n+2}\}\cos n\theta +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{c_n r^n + d_n r^{n+2} + \gamma_n r^{-n} + \delta_n r^{-n+2}\}\sin n\theta. \qquad (6)$$

Мы проделаем вычисления только для членов функций U_1 и T_1 с $\cos n\theta$, а для членов с $\sin n\theta$ напишем по аналогии.

Для напряжений, получившихся от $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, соответственно введем обозначения со значком один и два.

---

[1] За k_n' и l_n' можно брать какие угодно постоянные величины. Окончательный результат остается неизменным.

[2] Члены с произвольными коэфициентами A_n и B_n мы здесь не учитываем. При той же степени произвольные войдут в самую функцию U_1, и поэтому для окончательного распределения напряжения безразлично, существуют или нет члены A_n и B_n.

[3] См. С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, изд. 1914 г., и Coker and Filon, Photo-Elastizity.

Так как, учитывая только члены с $\cos n\theta$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial\theta^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-n}{2}r^{n-2}\int\limits_{k_n}^{r}r^{-n+1}\varphi_n(r)\,dr+\right.\\
&\left.+\frac{1+n}{2}r^{-n-2}\int\limits_{l_n}^{r}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\right\}\cos n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^*(r)\cos n\theta\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial T_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T_1}{\partial r\,\partial\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1-n}{2}r^{n-2}\int\limits_{k_n}^{r}r^{-n+1}\varphi_n(r)\,dr+\right.\\
&\left.+\frac{1+n}{2}r^{-n-2}\int\limits_{l_n}^{r}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\right\}\sin n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(r)\sin n\theta\\
&\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1-n}{2}r^{n-2}\int\limits_{k_n}^{r}r^{-n+1}\varphi_n(r)\,dr-\right.\\
&\left.-\frac{1+n}{2}r^{-n-2}\int\limits_{l_n}^{r}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr+\varphi_n(r)\right\}\cos n\theta=\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-f_n^*(r)+\varphi_n(r)\right]\cos n\theta
\end{aligned}
\right\}\quad(7)
$$

и аналогично для функции U_1, то

$$
\left.
\begin{aligned}
&\widehat{rr}_1=\left[2b_1 r-\frac{2d_1}{r^3}-f_1^*(r)\right]\cos\theta+\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(1-n)\,a_n r^{n-2}+(n+2-n^2)\,b_n r^n-n(1+n)\,\alpha_n r^{-n-2}-\right.\\
&\left.-(n-2+n^2)\,\beta_n r^{-n}-f_n^*(r)\right\}\cos n\theta\\
&\widehat{r\theta}_1=\left[2b_1 r-\frac{2\alpha_1}{r^3}-\varphi_1^*(r)\right]\sin\theta+\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)\,a_n r^{n-2}+n(n+1)\,b_n r^n-n(1+n)\,\alpha_n r^{-n-2}-\right.\\
&\left.-n(n-1)\,\beta_n r^{-n}-\varphi_n^*(r)\right\}\sin n\theta\\
&\widehat{\theta\theta}_1=\left[6b_1+\frac{2\alpha_1}{r^3}+f_1^*(r)-\varphi_1(r)\right]\cos\theta+\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n-1)a_n r^{n-2}+(n+1)(n+2)\,b_n r^n+\right.\\
&\left.+n(n+1)\,\alpha_n r^{-n-2}+(n-2)(n-1)\beta_n r^{-n}+f_n^*(r)-\varphi(r)\right\}\cos n\theta
\end{aligned}
\right\}\quad(8)
$$

Все произвольные постоянные определяются из условий на контурах.

При отсутствии внешних сил на контуре, т. е. при $r = \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases}$ должно быть

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr}_1 &= 0 \\ \widehat{r\theta}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Для краткости записи обозначим

$$n(1-n) = p_n, \quad n(1+n) = t_n$$

$$n+2-n^2 = q_n, \quad n-2+n^2 = s_n.$$

Тогда контурные условия (C) напишутся в виде (из условия равенства нулю коэфициентов при $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\ 2b_1R_1 - \frac{2\alpha_1}{R_1^3} = f_1^*(R_1) = R_1^{-3}\int_{k_1}^{R_1} r^2\varphi_1(r)\,dr \\
&\text{b)}\ 2b_1R_2 - \frac{2\alpha_1}{R_2^3} = f_1^*(R_2) = R_2^{-3}\int_{k_1}^{R_1} r^2\varphi_1(r)\,dr \\
&\text{c)}\ p_nR_1^{n-2}a_n + q_nR_1^nb_n - t_nR_1^{-n-2}\alpha_n - s_nR_1^{-n}\beta_n = f_n^*(R_1) \\
&\text{d)}\ p_nR_2^{n-2}a_n + q_nR_2^nb_n - t_nR_2^{-n-2}\alpha_n - s_nR_2^{-n}\beta_n = f_n^*(R_2) \\
&\text{e)} - p_nR_1^{n-2}a_n + t_nR_1^nb_n - t_nR_1^{-n-2}\alpha_n + p_nR_1^{-n}\beta_n = \varphi_n^*(R_1) \\
&\text{f)} - p_nR_2^{n-2}a_n + t_nR_2^nb_n - t_nR_2^{-n-2}\alpha_n + p_nR_2^{-n}\beta_n = \varphi_n^*(R_2)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Уравнения c), d), e), f) имеют смысл только для $n \geqslant 2$. [1]

Из a) и b) легко находим

$$\left.\begin{aligned}
2\alpha_1 &= \frac{R_1^3R_2^3\,[R_2f_1^*(R_1) - R_1f_1^*(R_2)]}{R_1^4 - R_2^4} = \frac{R_2^4\int_{k_2}^{R_1} r^2\varphi_1(r)\,dr - R_1^4\int_{k_1}^{R_2} r^2\varphi_2(r)\,dr}{R_1^4 - R_2^4} \\
2b_1 &= R_1^3f_1^*(R_1) - R_2^3f_1^*(R_2) = -\frac{\int_{R_1}^{R_2} r^2\varphi_1(r)\,dr}{R_1^4 - R_2^4}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для определения a_n, b_n, α_n и β_n из последних четырех уравнений (9) исключим a_n; сложив (c) с (e) и (d) с (f), имеем два уравнения; третье уравнение получим умножением (c) на R_2^{n-2}, (d) на R_1^{n-2} и вычитанием одного из другого.

---

[1]) Как видим, при $n \geqslant 2$ имеются четыре коэфициента. Для $n = 1$ их только два. Два других исчезают из условий однозначности перемещений.

Следовательно,

$$
\left.\begin{array}{c}
R_1^{\,n}(q_n+t_n)\,b_n-2R_1^{\,-n-2}\,t_n\alpha_n+R_1^{\,-n}(p_n-s_n)\,\beta_n=f_n^{\,*}(R_1)+\varphi_n^{\,*}(R_1)\\
R_2^{\,n}(q_n+t_n)\,b_n-2R_2^{\,-n-2}\,t_n\alpha_n+R_2^{\,-n}(p_n-s_n)\,\beta_n=f_n^{\,*}(R_2)+\varphi_n^{\,*}(R_2)\\
(R_1^{\,n}R_2^{\,n-2}-R_2^{\,n}R_1^{\,n-2})\,q_nb_n-(R_2^{\,n-2}R_1^{\,-n-2}-\\
-R_1^{\,n-2}R_2^{\,-n-2})\,t_n\alpha_n-(R_2^{\,n-2}R_1^{\,-n}-R_1^{\,n-2}R_2^{\,-n})\,s_n\beta_n=\\
=R_2^{\,n-2}f_n^{\,*}(R_1)-R_1^{\,n-2}f_n^{\,*}(R_2)
\end{array}\right\}\qquad(11)
$$

Отсюда по правилам определителей находим неизвестные величины:

$$
b_n=\frac{\Delta b_n}{\Delta_n};\quad \alpha_n=\frac{\Delta\alpha_n}{\Delta_n};\quad \beta_n=\frac{\Delta\beta_n}{\Delta_n},\qquad(12)
$$

где

$$
\Delta_n=-t_n\begin{vmatrix}
(q_n+t_n)R_1, & 2R_1^{-n-2} & R_1^{-n}(p_n-s_n)\\
(q_n+t_n)R_2 & 2R_2^{-n-2} & R_2^{-n}(p_n-s_n)\\
(R_1^nR_2^{n-2}-R_2^nR_1^{n-2})q_n, & (R_2^{n-2}R_1^{-n-2}-R_1^{n-2}R_2^{-n-2}), & (R_2^{n-2}R_1^{-n}-R_1^{n-2}R_2^{-n})s_n
\end{vmatrix}
$$

а Δb_n, $\Delta\alpha_n$, $\Delta\beta_n$ есть Δ_n, в котором один из столбцов, состоящих из коэфициентов при соответствующем неизвестном, заменен свободными членами.

Введя обозначение $\dfrac{R_1}{R_2}=\gamma$ и проделав алгебраические вычисления, имеем:

$$
\Delta_n=\{\,2q_n(p_n-s_n)(1-\gamma^{-2})^2+2s_n(q_n+t_n)(1-\gamma^{-4}-\gamma^{2n-2}-\gamma^{-2n-2})-
$$

$$
-(q_n+t_n)(p_n-s_n)\,\gamma^{-2n-2}\}\,R_2^{\,-4}t_n
$$

$$
\Delta b_n=\{\,(1+n)\,R_1^{\,-n-2}\int\limits_{l_n}^{R_1}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\,[2s_n(\gamma^{-n}-\gamma^{n-2})+
$$

$$
+(p_n-s_n)(\gamma^{-n}-\gamma^n)\,\gamma^{-2}]-(1+n)\,\gamma^{-n-2}\int\limits_{l_n}^{R_2}r^{n+1}\varphi_n(r)\,[2s_n(\gamma^{-n}-\gamma^{n-2})+
$$

$$
+(p_n-s_n)(\gamma^{-n}-\gamma^n)]+2\,(p_n-s_n)\,[f_n^{\,*}(R_1)-
$$

$$
-\gamma^{n-2}f_n^{\,*}(R_2)]\,(1-\gamma^{-2})\,\gamma^{-n}\}\,R_2^{\,-n-4}\,t_n
$$

$$
\Delta\alpha_n=\{\,(1+n)\,R_1^{\,-n-2}\int\limits_{l_n}^{R_1}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\,[q_n(p_n-s_n)(1-\gamma^{-2})\,\gamma^n+
$$

$$
+s_n(q_n+t_n)(1-\gamma^{2n-2})\,\gamma^{-n}]-
$$

$$
-(1+n)\,R_2^{\,-n-2}\int\limits_{l_n}^{R_2}r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\,[q_n(p_n-s_n)(1-\gamma^{-2})+
$$

$$+s_n(q_n+t_n)(1-\gamma^{2n-2})]-(q_n+t_n)(p_n-s_n)[f_n^*(R_1)-$$
$$-\gamma^{n-2}f_n^*(R_2)](\gamma^n-\gamma^{-n})\}R_2^{n-2}$$

$$\Delta\beta_n=\{(1+n)R_1^{-n-2}\int_{l_n}^{R_1} r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\,[2q_n(1-\gamma^{-2})\gamma^n-$$
$$-(q_n+t_n)(\gamma^{-n}-\gamma^n)\gamma^{-2}]-$$
$$-(1+n)R_2^{-n-2}\int_{l_n}^{R_2} r^{n+1}\varphi_n(r)\,dr\,[2q_n(1-\gamma^{-2})\gamma^{-2}-$$
$$-(q_n+t_n)(\gamma^{-n}-\gamma^n)\gamma^{n-2}]-2[f_n^*(R_1)-$$
$$-\gamma^{n-2}f_n^*(R_2)](q_n+t_n)(\gamma^n-\gamma^{-n-2})\}R_2^{n-4}t_n \tag{13}$$

Таким образом α_1, β_1, b_n, α_n, β_n известны, а величину a_n можно определить из любого уравнения (c), (d), (e), (f) (9). Оно равно:

$$a_n=\frac{t_n}{p_n}(R_1^2b_n-R_1^{-2n}\alpha_n)+R_1^{-2n+2}\beta_n-\frac{1}{p_nR_1^{n-2}}\varphi_n^*(R_1). \tag{14}$$

Вставив (13) в (12), а (14) и (10) в уравнения (8), будем иметь возможность вычислить напряжения $\widehat{rr}_1$, $\widehat{\theta\theta}_1$, $\widehat{r\theta}_1$.

Напряжения $\widehat{rr}_2$ и $\widehat{\theta\theta}_2$ получаются из $\widehat{rr}_1$ и $\widehat{\theta\theta}_1$ заменой cos на sin и $\varphi_n(r)$ на $\psi_n(r)$, а $\widehat{r\theta}_2$ кроме того еще переменой знака.

Окончательно для полного напряжения получаем алгебраическую сумму напряжений со значками 1 и 2:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=\widehat{rr}_1+\widehat{rr}_2\\ \widehat{\theta\theta}&=\widehat{\theta\theta}_1+\widehat{\theta\theta}_2\\ \widehat{r\theta}&=\widehat{r\theta}_1+\widehat{r\theta}_2\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

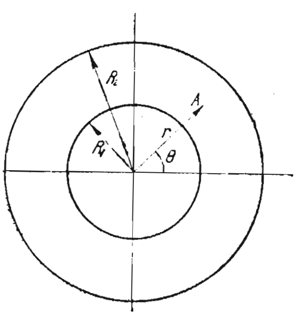

Рис. 1.

Как видим, формулы для напряжений очень громоздки.

Удобнее и быстрее для каждого конкретного случая вычислить предварительно в численном виде величины a_n, b_n, α_n и β_n, а затем уже вставлять в выражения (8).

В качестве примера и одновременно для проверки вышеприведенных вычислений рассмотрим трубку, температура в которой меняется по закону

$$t_1=Ar\cos 2\theta.$$

Тогда

$$\varphi_2(r)=Ar;\quad T_1=\frac{1}{5}Ar^3\cos 2\theta;\quad f_2^*(r)=-\frac{1}{5}Ar;\quad \varphi_2^*(r)=\frac{4}{5}Ar;$$

$$f_2^*(r)+\varphi_2^*(r)=\frac{3}{5}Ar.$$

Для простоты вычислений положив $\gamma = \frac{1}{2}$, получим

$$\Delta_2 = -2 \cdot 3^6 R_2^{-4}$$

$$\Delta b_2 = -\frac{22 \cdot 27}{5} A R_2^{-5} \qquad b_2 = \frac{11}{5 \cdot 27} A R_2^{-1}$$

$$\Delta d_2 = -\frac{27}{2 \cdot 5} A R_2 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{540} A R_2^5$$

$$\Delta \beta_2 = \frac{6 \cdot 27}{5} A R_2^{-1} \qquad \beta_2 = -\frac{1}{45} A R_2^3,$$

а по уравнению (14)

$$a_2 = \frac{5}{36} A R_2.$$

Напряжения, после подстановки найденных неизвестных, будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr}_1 &= \left(-\frac{5}{18} R_2 - \frac{1}{90} R_2^5 r^{-4} + \frac{4}{45} R_2^3 r^{-2} + \frac{1}{5} r\right) A \cos 2\theta \\ \widehat{r\theta}_1 &= \left(\frac{5}{18} R_2 - \frac{1}{90} R_2^5 r^{-4} + \frac{22}{45} R_2^{-1} r^2 + \frac{2}{45} R_2^3 r^{-2} - \frac{4}{5} r\right) A \sin 2\theta \\ \widehat{\theta\theta}_1 &= \left(\frac{5}{18} R_2 + \frac{1}{90} R_2^5 r^{-4} + \frac{44}{45} R_2^{-1} r^2 - \frac{6}{5} r\right) A \cos 2\theta \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Напряжения $\widehat{\theta\theta}_1$ на внешнем и на внутреннем контуре для каждого определенного θ оказываются одного знака:

при $r = R_1$

$$\widehat{\theta\theta}_1 = \frac{A}{10} \cos 2\theta,$$

при $r = R_2$

$$\widehat{\theta\theta}_1 = \frac{A}{15} \cos 2\theta.$$

Если температура распределяется по закону $t_1 = Ar \sin 2\theta$, то

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr}_2 &= \quad (\qquad) A \sin 2\theta \\ \widehat{r\theta}_2 &= -(\qquad) A \cos 2\theta \\ \widehat{\theta\theta}_2 &= \quad (\qquad) A \sin 2\theta \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где при данных условиях ( ) совпадает с выражением в скобках ур-ний (15).

Для сплошного кругового стержня необходимо взять

$$\alpha_1 = 0, \quad 2b_1 = \frac{1}{R_1} f_1^*(R_1) = R_1^{-4} \int_{R_1}^{R} r^2 \varphi_1(r)\, dr$$

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_n = 0,$$

а a_n и b_n определятся из двух уравнений:

$$p_n R_1^{n-2} a_n + q_n R_1^{n} b_n = f_n^* (R_1)$$

$$-p_n R_1^{n-2} a_n + t_n R_1^{n} b_n = \varphi_n^* (R_1);$$

откуда

$$b_n = \frac{f_n^*(R_1) + \varphi_n^*(R_2)}{R_1^n (q_n + t_n)}$$

$$a_n = \frac{t_n f_n^*(R_1) - q_n \varphi_n^*(R_2)}{p_n R_1^{n-2} (t_n - q_n)}.$$

Ленинград, март 1934.