ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

О СИЛЕ, ВЫНУЖДАЮЩЕЙ ВИХРЬ ДВИГАТЬСЯ ПРЕДНАЗНАЧЕННЫМ СПОСОБОМ

Л. И. Седов (Москва)

В настоящей заметке мы обобщаем теорему Жуковского о силе, действующей на связанный (присоединенный) вихревой шнур, для случая, когда движение жидкости неустановившееся.

Пусть задано какое-нибудь плоско-параллельное движение идеальной несжимаемой и однородной жидкости. Жидкость может быть конечной или бесконечной, может иметь свободные поверхности, может быть ограничена твердыми стенками и т. п.

Фиксируем наше внимание на цилиндрическом объеме жидкости V с высотой, равной единице; в плоскости движения этот объем ограничен замкнутым контуром C, который не имеет общих точек с границами жидкости.

Движение жидкости неустановившееся. Мы предположим, что вне C, непосредственно вблизи, движение жидкости непрерывно и потенциально.

Обозначим через $P = X_1 + iY_1$ сумму поверхностных сил, приложенных к частицам объема V вдоль его границы. Сумму всех остальных внешних сил, приложенных к частицам этого объема, обозначим через $F = X + iY$.

$F + P$ есть сумма всех внешних сил, под действием которых жидкость в рассматриваемом объеме V совершает заданное движение.

Установим соотношение для вычисления F. Пусть I есть количество движения объема V, имеем:

$$I = I_x + iI_y = \rho \int\limits_V (u + iv)\, d\sigma,$$

где ρ — плотность; u, v — проекции скорости на неподвижные оси координат.

Основное уравнение динамики дает:

$$\frac{dI}{dt} = F + P; \quad \text{откуда } F = \frac{dI}{dt} - P. \tag{1}$$

Характеристическую функцию течения вблизи C обозначим через $w(z, t) = \varphi + i\psi$, где $z = x + iy$, тогда $\frac{dw}{dz} = u - iv$. Вблизи C имеет место интеграл Лагранжа, и поэтому можем написать:

$$dP = ipdz = ip_0dz - i\rho\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dz - \frac{i\rho}{2}\,(u + iv)\,(u - iv)\, dz + i\rho U dz,$$

где dz есть элемент контура C, указывающий направление обхода по контуру против хода часовой стрелки; ρU есть потенциал внешних непрерывно распределенных массовых сил.

Заменив φ через $\frac{1}{2}(w+\overline{w})$ и интегрируя по замкнутому контуру C, будем иметь

$$P=-\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\frac{\partial}{\partial t}(w+\overline{w})\,dz-\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\frac{dw}{dz}\cdot\overline{\frac{dw}{dz}}\cdot dz+A, \tag{2}$$

где A — обобщенная сила Архимеда.

Для полной производной от количества движения жидкости объема V можем написать:

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\rho\int\limits_{C}(u+iv)\,\mathfrak{v}_n\,ds,$$

где $\mathfrak{v}_n$ — проекция скорости жидкости на внешнюю нормаль к C, $\frac{\partial I}{\partial t}$ есть локальная производная от количества движения, $\rho\int(u+iv)\,\mathfrak{v}_n\,ds$ есть конвективное изменение количества движения в единицу времени.

Принимая во внимание, что $\mathfrak{v}_n ds=d\psi=-\frac{i}{2}(dw-d\overline{w})$, найдем:

$$\frac{dI}{dt}=\rho\int\limits_{V}\frac{\partial(u+iv)}{\partial t}\,d\sigma-\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\overline{\frac{dw}{dz}}\cdot\frac{dw}{dz}\cdot dz+\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}\,dz. \tag{3}$$

На основании соотношений (1), (2) и (3) для силы F найдем:

$$F=\rho\int\limits_{V}\frac{\partial}{\partial t}(u+iv)\,d\sigma+\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}\,dz+\frac{i\rho}{2}\int\limits_{C}\frac{\partial}{\partial t}(w+\overline{w})\,dz-A. \tag{4}$$

Пользуясь соотношением (4), мы вычислим сосредоточенную силу, действующую на изолированный точечный вихрь в неустановившемся потоке и вынуждающую этот вихрь двигаться сквозь жидкость предназначенным способом.

Для этого мы рассмотрим сначала случай, когда внутри жидкости имеется круглый цилиндрический вихрь радиуса r с центром в точке a. Окружность, ограничивающую этот вихрь, обозначим через C. Пусть внутри C все частицы жидкости имеют вращение с постоянной угловой скоростью ω.

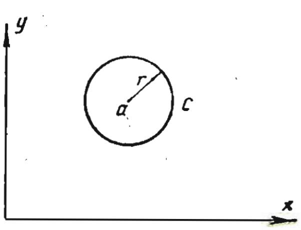

Рис. 1.

Мы предполагаем, что указанное вихревое движение есть единственная особенность течения жидкости около точки a в круге радиуса $r+\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Иначе говоря, мы рассматриваем такое движение жидкости, когда движение внутри C может быть получено как сумма некоторого потенциального движения и вращения жидкости как твердого тела около точки a, с угловой скоростью ω.

Движение бесконечной жидкости, порожденное круглым вихрем в точке a, вне C имеет характеристическую функцию

$$w^* = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - a),$$

где $\Gamma = 2\pi r^2 \omega$; Γ есть циркуляция вокруг вихря. Пусть $w(z, t)$ — характеристическая функция течения вблизи C.

По предположению $w - w^*$ есть голоморфная функция внутри круга $r + \varepsilon$. Функция $w - w^*$ зависит от граничных и прочих условий, которыми определяется движение жидкости. Следовательно внутри круга радиуса $r + \varepsilon$ с центром в точке a $w(z, t)$ имеет вид:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - a) + c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \ldots \tag{5}$$

Для комплексной скорости частиц жидкости вне C непосредственно вблизи имеем:

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - a} + c_1 + 2c_2 (z - a) + \ldots \tag{6}$$

Так как проекции скорости от вращения твердого тела суть $-\omega (y - a_y)$ и $\omega (x - a_x)$, где $a = a_x + i a_y$, то для скорости частиц жидкости внутри C можем написать:

$$u - iv = -i\omega \overline{(z - a)} + c_1 + 2c_2 (z - a) + \ldots \tag{7}$$

Заметим, что скорость частицы жидкости в центре вихря $u_a + iv_a = \overline{c_1}$ может не совпадать со скоростью центра вихря $\frac{da}{dt}$, которая задана наперед и с которой вихрь движется поступательно сквозь жидкость, вследствие некоторой системы внешних сил, действующих на жидкость.

Установив вид характеристической функции и характер поля скоростей, легко вычислить все интегралы в формулах (3) и (4).

При вычислениях мы выделяем члены нулевого порядка по r, так как в дальнейшем мы имеем в виду перейти к пределу при $r \to 0$ и $\omega \to \infty$, но так, чтобы $\Gamma = 2\pi r^2 \omega = \text{const}$.

Обозначим:

$$J_1 = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t} (u + iv)\, d\sigma; \qquad J_3 = \frac{i}{2} \int\limits_{C} \frac{\partial}{\partial t} (w + \overline{w})\, dz;$$

$$J_2 = \frac{i}{2} \int\limits_{C} \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2} dz; \qquad J_4 = -\frac{i}{2} \int\limits_{C} \overline{\frac{dw}{dz}} \cdot \frac{dw}{dz}\, dz.$$

На основании (7) имеем:

$$\frac{\partial (u + iv)}{\partial t} = -i\omega \frac{da}{dt} + \frac{d\overline{c_1}}{dt} + 2 \frac{d\overline{c_2}}{dt} \overline{(z - a)} - \overline{c_2} \frac{d\overline{a}}{dt} + \ldots \tag{α}$$

Пользуясь (α), для J_1 получим:

$$J_1 = -i\pi r^2 \omega \frac{da}{dt} + O(r)^{1}$$

или

$$J_1 = -\frac{i\Gamma}{2} \frac{da}{dt} + O(r). \tag{8}$$

[1] Символ $O(r)$ обозначает величину, стремящуюся к нулю вместе с r.

На основании (6) можем написать:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{\Gamma}{\pi i}\frac{c_1}{z-a} + \ldots \qquad (\beta)$$

Взяв вычет около полюса подинтегральной функции, найдем:

$$J_2 = \frac{i}{2}\overline{2\Gamma c_1} = i\Gamma \bar{c}_1. \qquad (9)$$

Далее, так как

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+\bar{w}) = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\frac{da}{dt} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\overline{z-a}}\frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{1}{r}O(r),$$

то для J_3 можем написать:

$$J_3 = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{re^{i\theta}}\frac{da}{dt} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{re^{-i\theta}}\frac{d\bar{a}}{dt} + \ldots\right] rie^{i\theta}\, d\theta,$$

откуда находим:

$$J_3 = -\frac{i\Gamma}{2}\frac{da}{dt} + O(r). \qquad (10)$$

Вставляя значения J_1, J_2, J_3 в формулу (4), получим:

$$F = -i\rho\Gamma\left(\frac{da}{dt} - \bar{c}_1\right) + O(r) - A. \qquad (11)$$

Разность между скоростью перемещения центра вихря $\frac{da}{dt}$ и скоростью частицы жидкости в центре вихря $\bar{c}_1$ естественно назвать скоростью вихря относительно жидкости

$$\frac{da}{dt} - \bar{c}_1 = \mathfrak{v}_{\text{от.}}\,.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получим изолированный точечный вихрь и для силы F найдем:

$$F = -i\rho\Gamma\mathfrak{v}_{\text{от.}}\,. \qquad (12)$$

Будем называть вихри свободными, если $\mathfrak{v}_{\text{от.}} = 0$; в противном случае будем их называть связанными.

Связанные вихри можно вводить при схематическом рассмотрении потоков, внутри которых имеются малые крылья, двигающиеся заданным образом. Сила противодействия со стороны жидкости будет равна $i\rho\Gamma\mathfrak{v}_{\text{от.}}$, т. е. и в общем случае неустановившегося движения это будет сила Жуковского.

Вычислим еще в отдельности: силу инерции $-\frac{dI}{dt}$ объема жидкости V и силу P, действующую на объем V со стороны внешней жидкости при $r \to 0$.

Очевидно для этого достаточно найти предел интеграла, обозначенного через J_4.

Пользуясь разложением (6), для $\frac{dw}{dz}\cdot\overline{\frac{dw}{dz}}$ получим:

$$\frac{dw}{dz}\cdot\overline{\frac{dw}{dz}} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{c_1}{\overline{z-a}} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{\bar{c}_1}{z-a} + \frac{1}{r}O(r)\ldots \qquad (\gamma)$$

и следовательно:

$$J_4 = -\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2} - \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{c_1}{re^{-i\theta}} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{\bar{c}_1}{re^{i\theta}} + \ldots\right] rie^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= -\frac{i\Gamma\bar{c}_1}{2} + O(r). \tag{13}$$

На основании соотношений (2) и (3), пользуясь значениями J_1, J_2, J_3, J_4, переходя к пределу при $r \to 0$, получим:

$$-\frac{dI}{dt} = \frac{i\rho\Gamma\mathfrak{v}_{\text{от.}}}{2}$$

$$P = \frac{i\rho\Gamma\mathfrak{v}_{\text{от.}}}{2}.$$

Таким образом, мы заключаем, что сила F составляется из двух равных сил, из которых одна зависит от инерции жидкости, находящейся в вихревом движении, а другая от инерции окружающей жидкости.

Вычислим теперь еще сумму моментов внешних сил относительно начала координат, поддерживающих заданное движение вихря.

Обозначим через K момент количества движения жидкости круглого вихря относительно начала координат.

Имеем:

$$K = \rho\int_V (xv - yu)\, d\sigma = -\rho\,\mathrm{Reel}\, i\int_V \bar{z}(u + iv)\, d\sigma.$$

Силы, происходящие от давлений вдоль C, проходят через центр круга C, и поэтому сумма моментов этих сил относительно центра C равна нулю. Сумма моментов этих сил относительно начала координат будет равна моменту силы P; если считать ее приложенной в точке a, этот момент равняется:

$$-\mathrm{Reel}\, i\bar{a}P.$$

Уравнение моментов количеств движения дает:

$$\mathfrak{M} - \mathrm{Reel}\, i\bar{a}P = \frac{dK}{dt};$$

но

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} - \rho\,\mathrm{Reel}\, i\int_C \bar{z}(u + iv)\,\mathfrak{v}_n ds$$

или

$$\frac{dK}{dt} = -\rho\,\mathrm{Reel}\, i\left[\int_V \bar{z}\frac{\partial(u + iv)}{\partial t}\, d\sigma + \frac{i}{2}\int_C \overline{z\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz} - \right.$$

$$\left. -\frac{i}{2}\int_C \bar{z}\cdot\overline{\frac{dw}{dz}}\cdot\frac{dw}{dz}\, dz\right].$$

Таким образом, для $\mathfrak{M}$ можем написать:

$$\mathfrak{M} = -\mathrm{Reel}\, i\bar{a}F - \rho\,\mathrm{Reel}\, i\left[\int_V \overline{(z - a)}\frac{\partial(u + iv)}{\partial t}\, d\sigma + \right.$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{C} \overline{(z-a)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}\,dz-\frac{i}{2}\int \overline{(z-a)}\,\frac{\overline{dw}}{dz}\cdot\frac{dw}{dz}\,dz\Bigg].$$

На основании разложения (α) легко видеть, что

$$\int \overline{(z-a)}\cdot\frac{\partial(u+iv)}{\partial t}\,d\sigma = O(r).$$

Принимая во внимание разложение (β), найдем

$$\mathrm{Reel}-\frac{1}{2}\int \overline{(z-a)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}\,dz = O$$

и, наконец, на основании разложения (γ) очевидно, что

$$\mathrm{Reel}\,\frac{1}{2}\int \overline{(z-a)}\,\frac{\overline{dw}}{dz}\cdot\frac{dw}{dz}\,dz = O(r).$$

Таким образом, переходя к пределу при $r\to 0$, получим

$$\mathfrak{M} = -\,\mathrm{Reel}\,i\bar{a}F$$

или

$$\mathfrak{M} = -\rho\Gamma\,\mathrm{Reel}\,\bar{a}\mathfrak{v}_{\text{от.}}\,. \tag{14}$$

Следовательно, момент всех сил, создающих движение точечного вихря относительно центра вихря, всегда равен нулю.

В заключение заметим, что в действительности вихри с конечной циркуляцией и с бесконечно малой площадью сечения, стягивающейся к точке, не могут существовать внутри жидкости, так как это приводит к бесконечным отрицательным давлениям. Это замечание справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движения. В последнем случае в формуле Лагранжа будут два члена, обращающихся в бесконечность:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ \text{и}\ \mathfrak{v}^2.$$

Эти бесконечности не могут погасить друг друга, так как они различного порядка.

Однако, когда с точки зрения рассматриваемой задачи можно пренебрегать размерами сечения вихря (физически бесконечно малого), все предыдущие результаты получают определенный физический смысл. Вычисленные силы будут практически достаточными приближениями к реально существующим силам.

ÜBER DIE KRAFT, WELCHE EINE GEGEBENE BEWEGUNG DES WIRBELS ERZEUGT

Von *L. Sedov* (*Moskau*)

(Zusammenfassung)

Der Verfasser zeigt, dass eine gegebene Bewegung eines gebundenen Punktwirbels in der ebenen nichtstationären Strömung einer idealen Flüssigkeit durch die äussere Einzelkraft $F = X + iY$ erzeugt wird. Dabei ist:

$$F = -\,i\rho\Gamma\mathfrak{v}_{\text{rel}}\,,$$

wo: ρ — die Dichte, Γ — die Zirkulation um den Wirbel, und $\mathfrak{v}_{\text{rel}}$ — die komplexe Geschwindigkeit, welche der Differenz zwischen der Geschwindigkeit des Wirbels und der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in dem Punkte, wo sich der Wirbel befindet, ist.