ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ АНАЛОГИИ [1]

Ю. И. Ягн (Ленинград)

§ 1. Введение

Проф. Мор [2] показал, что изогнутая ось стержня может рассматриваться как эпюра изгибающего момента, создаваемого распределенными фиктивными силами, интенсивность которых определяется отношением изгибающего момента к жесткости стержня. Он применил эту аналогию к решению некоторых задач на расчет неразрезных балок и плоских рам. Проф. Рабинович [3] воспользовался аналогией для расчета неразрезных балок с помощью веревочного многоугольника. Проф. Горбунов [4] применил метод Мора к расчету замкнутого ломаного пространственного контура. Ряд применений аналогии даны проф. Беляковым. [5] В частности, им дано определение с помощью аналогии положений фокальных точек. Проф. Белякову принадлежит также обобщение аналогии на случай, когда брус подвергается не только изгибу, но и кручению.

В настоящей работе показано, что изучение малых деформаций стержневых систем может быть заменено рассмотрением уравновешенных фиктивных сил. С помощью такого метода вопросы, касающиеся определения перемещений и нахождения статически неизвестных величин (в стержнях, коленчатых валах, плоских и пространственных рамных конструкциях, в фермах и т. д.), могут быть разрешены с помощью одних условий равновесия фиктивных сил. При этом существующие методы решения означенных вопросов будут представляться как различные частные приемы составления этих уравнений равновесия. Применяемые в настоящее время различные формулы выводятся с помощью аналогии очень легко и наглядно.

Теория стержневых систем, основанная на предлагаемом методе, становится проще и приобретает большую цельность. Применяя к фиктивным нагрузкам начало наименьшей работы, получаем решение в общей форме, которая позволяет довольно легко установить, как выбрать неизвестные величины и возможные перемещения, чтобы получить решение в более простой форме.

---

[1] Краткое содержание этой работы напечатано в трудах 4-го Международного конгресса по технической механике, Кембридж 1934.

[2] Zts. des Arch. und Ingen Ver. zu Hannover, 1868; Der Eisenbau 1910, 1911, 1912.

[3] „Кинематический метод в строительной механике", Москва 1928.

[4] „Рамы и фермы" (сборник), Москва 1933.

[5] Štatica Nova (три сборника статей от 1929—1931 г.), а также последующее издание от 1933 г.

Если принять аналогию, то учение о деформации стержневых систем может быть сведено к определению лишь жесткости стержней. Прочие вопросы решаются по методам теоретической механики.

§ 2. Развитие аналогии для стержня с произвольной формой оси

Уравнения равновесия сил, приложенных к произвольной части стержня, заключенной между некоторыми сечениями 1 и 2 (рис. 1), представляются в осях, относящихся к первому сечению, в следующем виде:

$$\vec{V}_1=\vec{V}_1-\int_0^S \vec{q}ds-\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i, \quad (1)$$

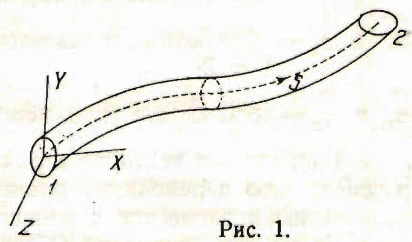

Рис. 1.

$$\vec{M}_2=\vec{M}_1-\int_0^S \vec{m}ds-\sum_{j=1}^{k}\vec{\mu}_i-\int_0^S[\vec{q}\,\vec{r}]\,ds-\sum_{i=1}^{n}[\vec{P}_i\vec{r}_i]-[\vec{V}_2\vec{r}_2]. \quad (2)$$

В этих уравнениях приняты следующие обозначения:

$\vec{q}$ — интенсивность распределенных сил;

$\vec{m}$ — интенсивность распределенных моментов;

$\vec{P}_i$ — сосредоточенные силы, число которых предположено равным n;

$\vec{\mu}_j$ — моменты сосредоточенных пар, число которых принято равным k;

$\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ — внутренние силы, приложенные к концевым сечениям 1 и 2;

$\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ — моменты внутренних сил, приложенных к концевым сечениям 1 и 2;

s — расстояние от сечения 1 до произвольного сечения, измеряемое по оси бруса;

S — длина оси бруса между сечениями 1 и 2.

Квадратными скобками показаны векторные произведения

Направления внутренних сил $\vec{V}$ и моментов $\vec{M}$ предполагается определенными по рассмотрению действия отсеченной части, имеющей бо́льшие значения s, на отсеченную часть с меньшими значениями s.

Деформация оси стержня для той же части (1—2) при условии ничтожной малости перемещений будет определяться уравнениями:

$$\vec{\varphi}_2=\vec{\varphi}_1+\int_0^S\vec{\theta}ds+\sum_{i=1}^{n}\vec{\vartheta}_i, \quad (1')$$

$$\vec{u}_2=\vec{u}_1+\int_0^S\vec{\delta}ds+\sum_{j=1}^{k}\vec{\Delta}_j+\int_0^S[\vec{\theta}\,\vec{r}]\,ds+\sum_{i=1}^{n}[\vec{\vartheta}_i\vec{r}]-[\vec{\varphi}_2\vec{r}_2]. \quad (2')$$

В этих уравнениях приняты обозначения:

$\vec{\theta}$ — интенсивность угловой деформации элементов оси стержня ($\vec{\theta}ds$ — относительный угол поворота поперечных сечений, ограничивающих элемент оси длиною ds;

$\vec{\delta}$ — интенсивность линейной деформации элементов оси стержня ($\vec{\delta} ds$ — относительное линейное смещение концов элемента ds);

$\vec{\vartheta}_i$ — углы поворота в шарнирах, допускающих вращение; число таких шарниров предположено равным n;

$\vec{\Delta}_j$ — линейные перемещения в шарнирах, допускающих скольжение; число таких шарниров принято равным k;

$\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — абсолютные перемещения элементов оси, примыкающих к сечениям 1 и 2;

$\vec{\varphi}_1$ и $\vec{\varphi}_2$ — абсолютные углы поворота тех же элементов оси.

Направления векторов величин $\vec{\theta}\ \vec{\delta}\ \vec{\vartheta}_i\ \vec{\Delta}_j$ предположены определяемыми по рассмотрению перемещений элементов оси, имеющих большие значения s, по отношению к элементам с меньшими значениями s.

Сравнение уравнений (1′) и (2′), представляющих деформацию, с уравнениями равновесия (1) и (2), обнаруживает аналогию между ними. Следовательно, всякая ничтожно малая деформация стержня может рассматриваться как уравновешенная система некоторых фиктивных сил. Сохраним для фиктивных сил те же обозначения, что и для действительных сил, отмечая их звездочкой наверху.

Для того чтобы уравнения деформаций представлялись в виде уравнений равновесия фиктивных сил, следует принять следующие соотношения между векторами:

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}^* &= -\vec{\theta} \\ \vec{m}^* &= -\vec{\delta} \\ \vec{P}_i^* &= -\vec{\vartheta}_i \\ \vec{\mu}_j^* &= -\vec{\Delta}_j \\ \vec{V}^* &= \vec{\varphi} \\ \vec{M}^* &= \vec{u} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Таким образом стержень должен быть представлен нагруженным фиктивными распределенными силами и моментами с интенсивностями, соответственно равными интенсивностям узловых и линейных деформаций элементов стержня и фиктивными сосредоточенными силами и моментами, соответственно равными углам поворота и линейным перемещениям в шарнирах. По направлению векторы, изображающие все эти фиктивные силы и моменты, должны быть противоположны соответствующим векторам деформации.

Когда стержень нагружен таким образом, внутренние силы и моменты, действующие в его поперечных сечениях, будут равны по величине и одинаковы по направлению соответственно поворотам $\vec{\varphi}$ и перемещениям $\vec{u}$ этих сечений.

Величины $\vec{\theta}$ и $\vec{\delta}$ могут быть выражены в функции от действительных сил. В частном случае упругой деформации, подчиняющейся закону Гука, эти функции будут линейными, причем по элементарной теории деформации стержня они для компонентов в главных осях будут представляться в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_x^* &= -\theta_x = -\frac{M_x}{B_x}; \quad & m_x^* &= -\delta_x = -\frac{V_x}{A_x};\\ q_y^* &= -\theta_y = -\frac{M_y}{B_y}; \quad & m_y^* &= -\delta_y = -\frac{V_y}{A_y};\\ q_z^* &= -\theta_z = -\frac{M_z}{B_z}; \quad & m_z^* &= -\delta_z = -\frac{V_z}{A_z}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где B_x, B_y, B_z, A_x, A_y, A_z — соответствующие жесткости стержня. (Если ось X направлена по касательной к оси стержня, то B_x будет жесткостью кручения, B_y и B_z — жесткостями изгиба, A_x — жесткостью при растяжении и A_y и A_z — жесткостями при срезе).

В случае переменной температуры в уравнения (4) должны быть введены добавочные члены, учитывающие влияние температуры. Если принять одинаковое изменение температуры по всему объему стержня, то оно будет оказывать влияние только на продольную составляющую величины δ, т. е. на δ_x, если ось X предположена совмещенной с касательной к оси стержня.

Соответствующее уравнение из группы (4) тогда представится в виде:

$$m_x^* = -\delta_x = -\frac{V_x}{A_x} \mp \alpha t^0, \tag{4'}$$

где α — коэффициент теплового расширения, а t^0 — изменение температуры. Знак минус перед последним членом относится к случаю, когда направление оси X совпадает с направлением оси стержня S, и знак плюс к случаю противоположного направления оси X.

Что касается сосредоточенных фиктивных сил и моментов, представляющих вращения и смещения в шарнирах, а также фиктивных сил и моментов, приложенных к концам, представляющих вращения и перемещения концевых элементов оси, то они остаются неизвестными величинами, которые подлежат определению из условий равновесия фиктивных сил. Вследствие этого они могут рассматриваться как реактивные силы и моменты соответствующих фиктивных закреплений, которые должны быть введены в местах расположения действительных шарниров, а также на концах бруса. Легко убедиться, что, наоборот, все действительные закрепления должны быть преобразованы в соответствующие фиктивные шарниры, так как в этих сечениях соответствующие компоненты фиктивных сил должны обращаться в нуль. Эти изменения в конструкции стержня сводятся к следующему: все шарниры, допускающие вращение вокруг некоторых осей, становятся закреплениями, препятствующими движению вдоль тех же осей, а все шарниры, допускающие смещения в направлениях некоторых осей, становятся закреплениями, препятствующими вращению вокруг тех же осей и наоборот. Например, цилиндрический шарнир, допускающий лишь относительное вращение частей стержня относительно некоторой оси, превращается в опору, устраняющую возможность перемещения вдоль той же оси. Сферический шарнир превращается в опору, совершенно не допускающую перемещений. Подшипник, допускающий лишь вращение вокруг одной оси, превращается в шарнир, в котором оказывается невозможным только относительное смещение в направлении той же оси. Свободный конец стержня превращается в заделанный, а заделанный в свободный и т. д. Легко показать, что если стержень в действительности имеет только необходимые закрепления, реакция которых могут быть найдены по условиям равновесия, то и фиктивный стержень будет иметь лишь необходимые закрепления, реакции каковых найдутся из условий равновесия фиктивных сил. В случае дополнительных закреплений у действительного стержня, фиктивный стержень будет иметь соответствующее количество дополнительных шарниров, по условиям равновесия в которых могут быть определены все лишние неизвестные в действительном стержне. Таким образом, уравнения равновесия действительного стержня, совместно с уравнениями равновесия фиктивного стержня, всегда достаточны для решения задачи.

Если у стержня имеются закрепления, которые допускают некоторые ограниченные перемещения или вращения, то на фиктивном стержне также могут быть показаны соответствующие шарниры, но при этом у шарниров должны быть приложены компоненты фиктивных сил, представляющие перемещения, допускаемые закреплениями.

§ 3. Обобщение аналогии на стержневую систему

Для каждого стержня, заключенного между двумя узлами системы, аналогия, очевидно, остается той же самой, как описано в предыдущем параграфе, но по концам его должны быть приложены фиктивные силы, зависящие от деформации других стержней. Если стержень прикреплен к узлу жестко, то компоненты фиктивных сил на его конце должны быть равны соответствующим перемещениям узла; если же в соединении имеются те или иные шарниры, то соответствующие компоненты фиктивных сил будут независимы от соответственных перемещений узла. Вследствие этого связь между фиктивными силами на концах стержней, сходящихся у некоторого узла, будет выражаться равенством между собою соответствующих компонентов, в отношении которых прикрепление концов является жестким. Если узел не допускает различных перемещений в направлении оси X для концов k сходящихся у него стержней, то условия связи должны быть представлены в виде:

$$M_{x1}^* = M_{x2}^* = M_{x3}^* = \ldots = M_{xk}^*. \tag{5}$$

Когда узел не допускает различных вращений вокруг оси концов k сходящихся у него стержней, условия должны быть написаны в виде:

$$V_{x1}^* = V_{x2}^* = V_{x3}^* = \ldots = V_{xk}^*. \tag{5'}$$

Эти равенства будут играть для фиктивных сил ту же роль, что и условия равновесия узлов для действительных сил. Мы назовем эти равенства воображаемыми условиями равновесия узлов фиктивной системы. Легко убедиться, что общее число действительных и воображаемых условий равновесия узлов вместе с условиями равновесия действительных и фиктивных сил, приложенных к стержням, достаточно для решения задачи, т. е. чтобы определить все компоненты действительных и фиктивных сил в сечениях. Иными словами, уравнения равновесия фиктивных сил (включая условия вида 5 и 5′ воображаемого равновесия узлов) позволяют определить все статические неизвестные (в обычном смысле) компоненты действительных сил и все компоненты перемещений. Обозначая r число стержней системы, мы будем иметь $24r$ неизвестных компонентов действительных и фиктивных сил, приложенных по их концам (шесть действительных и шесть фиктивных на каждом конце). Из шести уравнений равновесия действительных сил и шести уравнений равновесия фиктивных сил, приложенных к каждому стержню, могут быть определены $12r$ компонентов. Для прочих $12r$ компонентов остаются действительные и воображаемые условия равновесия узлов. Предположим сначала, что все связи в узлах заданной системы жесткие. Тогда, обозначая k_i число концов стержней, сходящихся около узла i, будем иметь $6(k_i - 1)$ воображаемых условий равновесия формы (5) и (5′). Принимая во внимание, что для узла могут быть составлены 6 уравнений равновесия действительных сил, получаем, что общее число действительных и воображаемых условий равновесия для каждого узла будет равно $6k_i$. Поскольку общее число концов стержней равно $2r$, число всех уравнений равновесия узлов получается равным $12r$, т. е. достаточно для определения остающихся $12r$ неизвестных. При этом в расчет, очевидно, принимаются во внимание также узлы, скрепленные с основанием. Хотя для таких узлов действительные условия равновесия не могут быть использованы, но общее количество уравнений остается тем же (равным $6k_i$), так как для этих узлов число воображаемых условий равновесия будет не $6(k_i - 1)$ а $6k_i$, поскольку все компоненты фиктивных сил в сечениях стержней у неподвижно закрепленного узла должны равняться нулю. При наличии шарниров, как у незакрепленных узлов, так и у узлов, скрепленных с основанием, равенство между числом уравнений и числом неизвестных сохранится, ибо уменьшение числа воображаемых условий равновесия будет компенсироваться соответствующим уменьшением неизвестных компонентов действительных сил.

§ 4. Приложение начала возможных перемещений

Поскольку решение всех задач, касающихся расчета стержней и стержневых систем, может быть получено с помощью условий статики, наиболее общая форма решения может быть найдена с помощью применения начала возможных перемещений. При этом аналогия позволяет построить применение начала возможных перемещений так, что обе системы — действительная и фиктивная — будут рассматриваться как недеформируемые. Применяя начало возможных перемещений к действительной системе, получим уравнения для отыскания статически определенных компонентов возникающих в ней сил. Для этого, как известно, необходимо, устранив соответствующие связи, использовать получившиеся подвижности для составления уравнений работ.

Деформации и компоненты статически неопределенных сил действительной системы будут находиться путем применения начала возможных перемещений к фиктивной системе. Если в фиктивной системе сохранены все связи и, следовательно, число ее подвижностей равно числу статически неопределенных величин, уравнение работ фиктивных сил представится в виде:

$$\int_0^S (\vec{q}^* \vec{u}^*)\, ds + \int_0^S (\vec{m}^* \vec{\varphi}^*)\, ds = 0. \qquad (6)$$

Величины $\vec{u}^*$ и $\vec{\varphi}^*$ суть любые перемещения и вращения элементов оси стержней, совместимые с условием их недеформируемости и с конструкцией фиктивных связей. Интегралы предполагаются распространенными на все стержни системы. Круглые скобки обозначают скалярные произведения. С помощью уравнения (6) могут быть непосредственно найдены все статически неопределенные величины. Такой путь решения с обычной точки зрения будет относиться к методу сил.

В случае, когда в фиктивной системе устраняется часть связей, вследствие чего она приобретает дополнительные подвижности, уравнение (6) должно быть дополнено членами, представляющими работу реакций устраненных фиктивных связей. Поскольку эти реакции представляют деформации действительной системы, уравнение работ в этом случае будет служить не только для определения статически неизвестных величин, но и для нахождения компонентов деформации действительной системы. При этом путем соответствующего подбора возможных перемещений можно получить уравнения, содержащие в качестве неизвестных только реакции фиктивных связей, каковые таким образом будут найдены ранее определения статически неизвестных величин. С обычной точки зрения такой путь будет относиться к методу деформаций.

Выбирая возможные перемещения таким образом, чтобы уравнение работ вообще заключало как некоторые реакции фиктивных связей, так и известное число статически неизвестных величин, будем получать решения, которые при обычной терминологии должны быть отнесены к смешанному методу.

Таким образом, применяя начало возможных перемещений к фиктивной системе, удается охватить решения по всем основным существующим методам, различие между которыми с точки зрения аналогии оказывается только в выборе возможных перемещений при составлении уравнений работ фиктивных сил.

Бо́льшая или меньшая простота решения будет зависеть в каждом случае от того, насколько удачно выбраны возможные перемещения. Применение метода аналогии к конкретным случаям показывает, что в значительном числе задач без особых затруднений удается найти возможные перемещения, при которых исключаются все неизвестные кроме одной, т. е. решение представляется в виде наиболее простых уравнений.

Начало возможных перемещений в применении к двум системам — действительной и фиктивной — с точки зрения аналогии приобретает особый смысл и ему может быть дана новая своеобразная формулировка.

Из аналогии видно, что если фиктивную систему принять за действительную, то действительная система будет для нее соответствующей фиктивной, вследствие чего перемещения фиктивной системы могут быть истолкованы как компоненты внутренних сил в действительной системе. Поскольку предположено, что перемещения $\vec{u}^*$ и $\vec{\varphi}^*$ совершаются без деформации стержней фиктивной системы, они должны быть представлены силами и моментами в сечениях действительной системы, находящимися в равновесии при отсутствии активной внешней нагрузки (так как, согласно аналогии, нагрузка представляет деформацию, каковая по условию отсутствует).

Таким образом можно сказать, что возможные перемещения, совместимые со связями в фиктивной системе, являются такими, которые, будучи приняты за компоненты внутренних действительных сил, удовлетворят условиям равновесия всех частей действительной системы при отсутствии активных нагрузок, т. е. за возможные перемещения фиктивной системы могут быть приняты любые компоненты внутренних сил, которые возможны в ненагруженной действительной системе. Это положение совершенно аналогично тому, которое может быть высказано для возможных перемещений в действительной системе.

В самом деле, возможными перемещениями в действительной системе являются такие перемещения, которые, удовлетворяя всем связям, очевидно, не должны вызывать деформирования или излома стержней, а потому они суть такие компоненты внутренних фиктивных сил, которые должны удовлетворять условиям равновесия фиктивных сил при отсутствии активной фиктивной нагрузки.

Вышеизложенное позволяет дать следующую общую формулировку начала возможных перемещений сразу для действительной и фиктивной систем, называя их системами сопряженными друг с другом.

„Работа нагрузок, приложенных к той или иной стержневой системе, находящейся в равновесии, равна нулю на таких перемещениях, которые, будучи приняты за компоненты внутренних сил в ненагруженной сопряженной системе, будут удовлетворять всем условиям ее равновесия".

§ 5. О некоторых приложениях аналогии

Не останавливаясь подробно на таком вопросе, как расчет неразрезных балок, отметим только, что для определения параметров возможных перемещений, при которых в уравнении работ остается лишь один неизвестный опорный момент, получаются весьма простенькие зависимости, при последовательном решении которых в каждой остается лишь по одному неизвестному параметру (рекуррентная система).

Аналогия весьма упрощает расчет многоопорных коленчатых валов, устраняя все трудности, с которыми сопряжен анализ деформации коленчатого вала, и позволяя с одинаковым успехом проводить расчет, как для прямоугольных, так и косоугольных колен (с наклонными щеками). В случае колен, расположенных в одной плоскости или во взаимно перпендикулярных плоскостях, применение начала возможных перемещений к фиктивным силам дает возможность построить расчет так же просто, как указано выше для обыкновенных неразрезных балок.

Начало возможных перемещений для фиктивных сил также оказывается очень полезным при расчете рамных конструкций. Один из способов состоит в рассмотрении отдельных полигонов рамы. Если оси s для всех стержней полигона заданы в одинаковом направлении вокруг его контура, то, как легко видеть из аналогии, фиктивные силы, приложенные к полигону, должны удовлетворять условиям равновесия. Задавая различные возможные перемещения одному или нескольким полигонам рамной конструкции, получим более или менее простые уравнения равновесия фиктивных сил. Подбор возможных перемещений, при которых в уравнениях работ будет лишь по одной наизвестной, во многих случаях производится без затруднений.

Аналогия весьма удобна также для проверки результатов решений, полученных другими методами. Когда эпюры изгибающих моментов, крутящего момента, а также растягивающей силы и перерезывающих сил получены, они могут быть легко выверены по условиям равновесия фиктивных нагрузок, определяемых по формулам (4). Когда влиянием на деформацию растягивающих и перерезывающих сил пренебрегают, условиям равновесия должны удовлетворить только фиктивные нагрузки, определяемые по эпюрам изгибающих и крутящего моментов.

В заключение покажем, как просто могут быть получены с помощью уравнений равновесия фиктивных сил различные известные формулы, применяемые в строительной механике. В качестве примера дадим вывод уравнения четырех моментов. Рассмотрим два смежных стержня системы (рис. 2). Допустим, что стержни совершают виртуальные повороты соответственно вокруг осей Y_1 и Y_2, причем эти повороты таковы, что концы стержней, соединяющиеся в O,

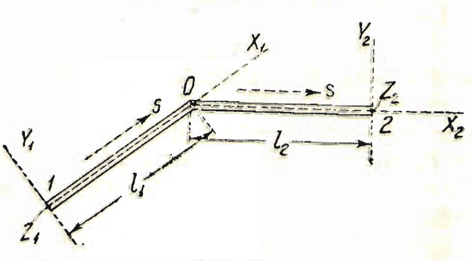

Рис. 2.

получают одинаковые перемещения вдоль оси Z. Составляя уравнение работ фиктивных сил на этих перемещениях, после простых преобразований получим:

$$(M_{z1} + 2M_{z0}')\, l_1 B_{z2} + (M_{z2} + 2M_{z0}'')\, l_2 B_{z1} + 6\left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} B_{z2} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} B_{z1}\right) +$$

$$+ 6 B_{z1} B_{z2} \left\{ \frac{M_{Y_1 1}{}^{*} - M_{Y_1 0}{}^{*}}{l_1} + \frac{M_{Y_2 2}{}^{*} - M_{Y_2 0}{}^{*}}{l_2} \right\} = 0,$$

где M_{z1}, M_{z0}', M_{z0}'', M_{z2} — четыре опорные момента;

B_{z1}, B_{z2} — жесткости стержней;

$\frac{\omega_1}{B_{z1}}$ и $\frac{\omega_2}{B_{z2}}$ — равнодействующие фиктивных сил, соответствующих изгибающим моментам, определенным для стержней, как для балок с шарнирными опорами по концам.

a_1, b_2 — плечи упомянутых равнодействующих относительно осей Y_1 и Y_2 соответственно.

$M_{y_1 1}{}^{*}$, $M_{y_1 0}{}^{*}$, $M_{y_2 2}{}^{*}$, $M_{y_2 0}{}^{*}$ — фиктивные изгибающие моменты в концевых сечениях стержней, которые равны соответствующим перемещениям концов параллельно осям Y_1 и Y_2.

Легко видеть, что уравнение (10), написанное нами непосредственно как условие равновесия фиктивных сил, и есть известное уравнение четырех моментов.

THE METHOD OF ANALOGY IN THE THEORY OF STRUCTURES

By *J. Jagn* (*Leningrad*)

Summary

It has been shown by Prof. Mohr[1] that the deflection curve of a bar may be considered as the diagram of the bending moment produced by the imaginary forces equal in magnitude to the actual bending moments divided by the rigidity of the bar. He applied this analogy to certain problems in continuous beams and plane frames. Prof. Rabinovitch[2] used the analogy in the application of the funicular polygon to continuous beams. Prof. Gorbunoff[3] has applied Mohr's method to the three-dimensional frame, representing a single closed polygon. Some applications of the analogy are given by Prof. Beljakoff.[4]

In the present paper the author shows that the study of the deformation of bars or of systems of bars can in general be replaced by the study of the equilibrium of imaginary forces. By this method all problems concerning deformations and statically indeterminate forces (viz. in beams, crankshafts, plane and three-dimensional framed structures and trusses etc.) can be solved by using only equations of equilibrium. Moreover the existing methods of solving the above problems will be shown to be particular methods of forming the equations of equilibrium for the imaginary forces. The formulae now in use can be readily deduced.

Once the Analogy is accepted, the study of deformations can be reduced simply to the questions of the rigidities of the bars. Other problems are solved

[1] Zts. des Arch. und Ingen. Ver. zu Hannover, 1868; Der Eisenbau, 1910, 1911, 1912.
[2] „Kinematic method in Structural Statics", Moscow. 1928.
[3] „Frames and Trusses" (collection of papers), Moscow, 1933.
[4] „Statica Nova", Kiev, 1929, 1931 and 1933.

by the methods of rational mechanics. The application of the principle of virtual work can be composed in such a way, that both systems — real and imaginary — are considered as absolutely undeformable and the principle of virtual work can be formulated as follows: „The work done by the loads applied to a system of bars being in equilibrium is equal to zero, when the displacements are such, that if they weie regarded as the internal forces in the unloaded conjugate system, they would satisfy all the conditions of its equilibrium".

Application of the principle of virtual work leads to a solution in a general form, which allows the unknown quantities and the virtual displacements to be so chosen as to simplify the solution.