

О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПОДЪЕМНОМ КАНАТЕ

Н. П. Неронов (Ленинград)

Определение напряжений в подъемном канате для различных могущих встретиться на практике случаев составляло задачу многих исследований. Из новых работ следует указать весьма ценную монографию проф. А. С. Локшина.¹

Поперечными размерами каната обычно пренебрегают. Поэтому будем рассматривать канат, как упругую нить, и ограничимся случаем каната постоянного сечения.

Как показывают произведенные расчеты, для небольших высот подъема (100—150 м) вес каната составляет около $10\%—12\%$ от веса поднимаемой клетки с грузом. В этом случае допустимо первым пренебречь и считать канат нитью, не имеющей массы. При большой длине каната этого сделать нельзя и является необходимым учет как массы, так и веса каната. На основании сделанного замечания поставленная задача естественно распадается на две части. В настоящем исследовании мы ограничиваемся небольшими высотами подъема, приводя вопрос к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Общий случай является предметом изучения во второй части настоящей работы и представляет несколько большие трудности.

В связи с общим случаем нужно отметить работу проф. Е. Л. Николаи,² посвященную вопросу о колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется, а также работу проф. Havelock.³

§ 1. Вывод дифференциального уравнения движения клетки

Клеть A подвешена в точке B к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной оси горизонтальной O (рис. 1).

Предполагая отсутствие скольжения каната по барабану, будем считать скорость точки C каната по величине заданной функцией времени $v(t)$ и направленной вертикально вверх.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB от конца B (рис. 1) равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части каната MB , а второе $u(x, t)$ —

¹ „О динамических напряжениях в подъемных канатах“, приложение к № 12 за 1929 г. Горного журнала. Динамические напряжения в канатах переменной длины рассмотрены во второй части работы, см. стр. 89—120. На стр. 1—5 можно найти изложение истории вопроса.

Изв. Лен. политехн. ин-та, т. 28, 1921.

Phil. mag., 1923.

ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией переменных x и времени t .

Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости T каната в точке M :

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

где k обозначает некоторую положительную постоянную, а производная $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ — относительное удлинение.¹

Следствием пренебрежения массой, а значит и силами инерции каната является линейная зависимость $u(x, t)$ от x , т. е.

$$u(x, t) = xf(t), \quad T = kf(t). \quad (2)$$

Помещаем начала координат в точке C и направляем координатную ось вертикально вниз. Обозначаем координаты точек M и B соответственно через X и ξ . Тогда

$$X = \xi - x [1 + f(t)]. \quad (3)$$

Полагая $X = 0$, находим значение $x = l$, соответствующее точке C :

$$x = l = \frac{\xi}{1 + f(t)}. \quad (4)$$

Вычисляем скорость точки M каната, дифференцируя уравнение (3) по t :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - x \frac{df(t)}{dt}. \quad (5)$$

Применяем последнее уравнение к точке C :

$$v(t) = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi}{1 + f(t)} \frac{df(t)}{dt}. \quad (6)$$

Составляем дифференциальное уравнение движения клетки A , обозначая через m ее массу и через g ускорение свободного падения:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - kf(t). \quad (7)$$

Исключаем из уравнений (6) и (7) функцию $f(t)$:

$$m\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(m \frac{d^2\xi}{dt^2} - a \right) \left[\frac{d\xi}{dt} - v(t) \right], \quad (8)$$

где

$$a = mg + k. \quad (9)$$

¹ Значение k может быть найдено по формуле $k = EF$, где E обозначает модуль упругости для каната и F площадь его сечения. Теоретическое и экспериментальное определение значения E составляло задачу ряда работ, указание на которые можно найти в заметке акад. А. Н. Динника, см. Сборник „Прикладная математика и механика“ 1933, т. 1, вып. 2, стр. 335, § 7.

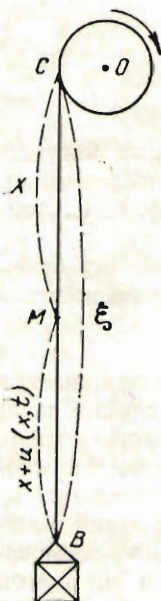


Рис. 1.

Полученное дифференциальное уравнение третьего порядка определяет функцию ξ при следующих начальных данных:

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} = \xi'_0.$$

Постоянная ξ_0'' находится из уравнения

$$\xi_0'' = g - \frac{k}{m} \left(\frac{\xi_0}{l_0} - 1 \right), \quad (10)$$

где l_0 обозначает нормальную длину каната BC в начальный момент.

Вид функции $v(t)$, входящей в дифференциальное уравнение (8), в каждом отдельном случае зависит от характера диаграммы окружной скорости на барабане. Рассмотрим наиболее подробно следующий частный, но имеющий большое распространение на практике случай, когда диаграмма скорости состоит из трех участков. Первый соответствует начальному периоду равноускоренного вращения барабана, второй — наиболее длительному периоду равномерного вращения и, наконец, последний — периоду равнозамедленного вращения. Результат интегрирования уравнения (8) для каждого из указанных выше периодов, конечно, будет различен. Все отмеченные случаи последовательно разбираются в нижеследующих параграфах.

В то время как мы получили для клетки дифференциальное уравнение движения (8) третьего порядка, в цитированной выше работе проф. А. С. Локшина¹ движение клетки приближенно определяется дифференциальным уравнением второго порядка. Выясним степень точности указанного приближения. С этой целью напишем дифференциальное уравнение движения клетки в виде:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - k \frac{\xi - l}{l},$$

где l попрежнему обозначает переменную нормальную длину каната BC , являющуюся неизвестной функцией времени. Вводим в рассмотрение абсолютную деформацию каната u :

$$u = \xi - l.$$

Отсюда

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2l}{dt^2}.$$

После соответствующей подстановки наше дифференциальное уравнение переписывается в следующей форме:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{ku}{l} + mg \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2l}{dt^2} \right).$$

Это точное уравнение переходит в приближенное уравнение проф. А. С. Локшина:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{ku}{l_0 + s(t)} + mg \left[1 - \frac{1}{g} \frac{d^2s(t)}{dt^2} \right],$$

¹ Ibid., стр. 89, см. уравнения (1) и (2), где u , как и у нас, обозначает абсолютное удлинение каната.

если сделать два предположения. Первое заключается в вычислении неизвестной величины l по формуле

$$l = l_0 + s(t),$$

где l_0 обозначает начальное значение переменной l , а $s(t)$ — взятую с соответствующим знаком длину дуги поворота барабана.

Вследствие малости деформаций каната первое допущение является приемлемым. Этого нельзя сказать о втором допущении, в силу которого вместо неизвестной производной $\frac{d^2 l}{dt^2}$ подставляется

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}.$$

В самом деле, исключение функции $f(t)$ из уравнений (4) и (6) настоящего параграфа дает

$$\frac{\frac{dl}{dt}}{l} = \frac{v(t)}{\xi}.$$

Благодаря малости деформаций каната ξ мало отличается от l и поэтому, на основании последнего равенства, $\frac{dl}{dt}$ мало отличается от $v(t)$.

Но вытекает ли отсюда, что тем же свойством обладают и производные этих функций, т. е. $\frac{d^2 l}{dt^2}$ и $\frac{dv(t)}{dt}$? В общем случае этого никоим образом нельзя утверждать. Напомним, что введение в вариационное исчисление понятия о сильной вариации функции именно основано на том, что графики двух функций могут иметь при одной и той же абсциссе мало отличающиеся между собой ординаты и в то же время весьма различные угловые коэффициенты. Поэтому мне кажется, что в данной задаче было бы желательно избежать приема решения, основанного на не вполне очевидном предположении.

§ 2. Случай равномерного вращения

Обозначим через v постоянную линейную скорость на окружности барабана. Имеем

$$s(t) = -vt,$$

ограничиваясь случаем поднятия клетки.

Пусть ξ_0 обозначает абсциссу клетки в начальный момент и предположим, что последний соответствует началу равномерного вращения ($t=0$).

Вместо ξ вводим новую неизвестную функцию x по формуле¹

$$\xi = \xi_0 - vt + x. \quad (11)$$

¹ Отметим во избежание недоразумений, что в наших обозначениях переменная x не совпадает с абсолютным удлинением каната u . Последнее равно $\xi - l$ и выражается через x следующим образом:

$$u = \xi - l = \xi - l_0 e^{\int_0^t \frac{v(t) dt}{\xi}},$$

где через e обозначено основание натуральных логарифмов,

$$\xi = \xi_0 + s(t) + x$$

и в частном случае равномерного вращения $s(t) = -vt$.

Дифференциальное уравнение (8) принимает вид

$$m(\xi_0 - vt + x) \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} - a \right). \quad (12)$$

Очевидно в данном случае имеет место частный интеграл

$$x = 0. \quad (13)$$

Ищем решение уравнения (12) соседнее по отношению к предыдущему, представляя функцию x бесконечным рядом

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots \quad (14)$$

и применяя метод последовательных приближений. В первом приближении ($x = x_1$) неизвестная функция определяется дифференциальным уравнением

$$(\xi_0 - vt) \frac{d^3x}{dt^3} = -a_1 \frac{dx}{dt}, \quad (15)$$

где

$$a_1 = \frac{a}{m} = g + \frac{k}{m}.$$

В дальнейшем мы ограничиваемся первым приближением, так как его точность для наших целей совершенно достаточна.

Вводим вместо переменных t, x новые τ, y по формулам

$$t = \frac{\xi_0}{v} + \frac{v}{a_1} \tau, \quad \frac{dx}{dt} = y. \quad (16)$$

Имеем

$$\tau \frac{d^2y}{d\tau^2} - y = 0. \quad (17)$$

Наконец, замена переменных

$$\tau = -\frac{w^2}{4}, \quad y = wz \quad (18)$$

приводит уравнение (17) к виду

$$w^2 \frac{d^2z}{dw^2} + w \frac{dz}{dw} + (w^2 - 1)z = 0. \quad (19)$$

Мы получили уравнение Бесселя. Его интеграл, содержащий бесселевы функции первого и второго рода:

$$z = C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w). \quad (20)$$

Через C_1 и D_1 обозначены произвольные постоянные. Возвращаемся к первоначальным переменным t и x :

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{2}{v} \sqrt{a_1(\xi_0 - vt)}, \\ \frac{dx}{dt} &= w [C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w)]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Отсюда, принимая во внимание, что на основании равенства (11) $x|_{t=0} = 0$,

$$x = \int_0^t \omega [C_1 J_1(\omega) + D_1 Y_1(\omega)] dt$$

или

$$x = -\frac{v}{2a_1} \int_{\omega_0}^{\omega} \omega^2 [C_1 J_1(\omega) + D_1 Y_1(\omega)] d\omega,$$

где

$$\omega_0 = \frac{2}{v} \sqrt{a_1 \xi_0}.$$

Выполняем квадратуру, пользуясь известными соотношениями ¹:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x).$$

Имеем

$$x = -\frac{v\omega^2}{2a_1} [C_1 J_2(\omega) + D_1 Y_2(\omega)] \Big|_{\omega_0}^{\omega}. \quad (22)$$

Равенство (11) позволяет написать уравнения для определения начальных значений x_0' , x_0'' производных функции x :

$$\xi_0' = -v + x_0', \quad \xi_0'' = x_0'',$$

где значения производных ξ_0' , ξ_0'' могут считаться известными (§ 1).

Составляем уравнения для нахождения произвольных постоянных C_1 и D_1

$$\left. \begin{aligned} C_1 J_1(\omega_0) + D_1 Y_1(\omega_0) &= \frac{u_0'}{\omega_0}, \\ C_1 J_0(\omega_0) + D_1 Y_0(\omega_0) &= -\frac{u_0'' v}{2a_1}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Находим из уравнения (7) натяжение T каната

$$T = kf(t) = mg - \frac{2a_1 m}{v} [C_1 J_0(\omega) + D_1 Y_0'(\omega)]. \quad (24)$$

Сравнение числовых результатов, полученных на основании последней формулы, а также отличной от нее формулы для того же случая проф. А. С. Локшина, ² является нашей ближайшей задачей.

При наличии таблиц бесселевых функций вычисления для случая равномерного вращения барабана весьма упрощаются.

В рудничной практике аргумент ω может быть довольно велик. Поэтому приведем асимптотические выражения для бесселевых функций при большом значении аргумента: ³

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P(x) \cos\left(x - \frac{2n+1}{4} \pi\right) - Q(x) \sin\left(x - \frac{2n+1}{4} \pi\right) \right],$$

¹ N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, 1904, S. 28.

² А. С. Локшин, *ibid.*, § 59.

³ N. Nielsen, *idem*, S. 156, § 59.

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P(x) \sin \left(x - \frac{2n+1}{4} \pi \right) + Q(x) \cos \left(x - \frac{2n+1}{4} \pi \right) \right],$$

где

$$P(x) = 1 + \sum \frac{(-1)^s}{2s!} \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \dots [4n^2 - (4s - 1)^2]}{(8x)^{2s}},$$

$$Q(x) = \frac{4n^2 - 1}{8x} + \sum \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \dots [4n^2 - (4s + 1)^2]}{(8x)^{2s+1}},$$

и в двух предыдущих суммах расходящихся рядов нужно брать только конечное число первых членов ($s = 1, 2, 3, \dots$).

§ 3. Случай равнопеременного вращения

Этот случай может иметь место при поднятии клетки в начальный период (равноускоренное вращение), а также в период торможения (равнозамедленное вращение).

Равноускоренное вращение. Обозначим через v_0 начальную линейную скорость при $t = 0$ и через j — постоянное тангенциальное ускорение на окружности барабана. Тогда

$$s(t) = -v_0 t - \frac{1}{2} j t^2.$$

Так же, как в предыдущем параграфе, вводим новую неизвестную функцию x :

$$\xi = \xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 + x, \quad (25)$$

где ξ_0 обозначает начальную абсциссу клетки.

Дифференциальное уравнение движения клетки переписывается следующим образом:

$$m \left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 + x \right) \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - m j - a \right). \quad (26)$$

В первом приближении функция x определяется уравнением:

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 \right) \frac{d^3 x}{dt^3} = -a_2 \frac{dx}{dt}, \quad (27)$$

где

$$a_2 = \frac{m j + a}{m} = j + g + \frac{k}{m}.$$

Производим замену переменных

$$z = \frac{v_0 + j t}{\sqrt{2 j \xi_0 + v_0^2}}, \quad y = \frac{dx}{dt}. \quad (28)$$

Наконец вводим сокращенное обозначение

$$k_1^2 = \frac{2a_2}{j} = \frac{2}{j} \left(j + g + \frac{k}{m} \right).$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} + k_1^2 y = 0. \quad (29)$$

В условиях практики параметр k_1 имеет большое значение. Поэтому будет целесообразным искать асимптотическое выражение интеграла предыдущего уравнения при больших значениях k_1 .

С уравнением вида (29) столкнулся в своих исследованиях проф. А. С. Локшин¹. Он нашел нужное нам асимптотическое выражение двумя способами. Первый принадлежит Ногн'у², второй основан на применении весьма остроумной замены переменных в дифференциальном уравнении (29). Именно сначала вводится новая переменная R , связанная с y соотношением

$$y = (1 - z^2)^{\frac{1}{4}} R. \quad (30)$$

Дифференциальное уравнение (29) преобразуется следующим образом:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 R}{dz^2} - z \frac{dR}{dz} + \left[k_1^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(1 - z^2)} \right] R = 0. \quad (31)$$

Далее при выполнении неравенства

$$z = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2jk_0 + v_0^2}} < 1$$

можно всегда положить

$$z = \sin p. \quad (32)$$

Уравнение (31) принимает вид

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + \left(k_1^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4 \cos^2 p} \right) R = 0. \quad (33)$$

При большом значении параметра k_1 неравенство $k_1^2 > \frac{3}{4 \cos^2 p} - \frac{1}{4}$ имеет силу для значительного интервала времени при поднятии клетки.

Представляем R бесконечным рядом

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \dots$$

и применяем метод последовательных приближений. В дальнейшем мы ограничиваемся первым приближением ($R = R_0$), дающим главную часть искомого асимптотического выражения для моментов времени не слишком удаленных от начального. В первом приближении функция R определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + k_1^2 R = 0. \quad (34)$$

Отсюда

$$R = C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p. \quad (35)$$

Определяем произвольные постоянные C_2 и D_2 :

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{k_1} (R_0 k_1 \cos k_1 p_0 - R_0' \sin k_1 p_0), \\ D_2 &= \frac{1}{k_1} (R_0 k_1 \sin k_1 p_0 + R_0' \cos k_1 p_0), \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

¹ А. С. Локшин, *ibid.*, § 61—63.

² *Mathematische Annalen*, 1899, Band 52, S. 271, 340.

где

$$R_0 = R \Big|_{p=p_0}, \quad R_0' = \frac{dR}{dp} \Big|_{p=p_0},$$

$$z = \sin p = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}},$$

$$z_0 = \sin p_0 = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \Big|_{t=0} = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}.$$

При помощи равенств (28), (30), (32) вычисляем значения R_0 и R_0' , которые в дальнейшем будут считаться известными, так же как и значения постоянных C_2 и D_2 ,

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= x_0' \left(1 + \frac{v_0^2}{2j\xi_0} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ R_0' &= \frac{(2j\xi_0 + v_0^2)^{\frac{1}{4}}}{2(2j\xi_0)^{\frac{3}{4}}} (4x_0''\xi_0 + x_0'v_0). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Значения x_0' , x_0'' находятся на основании равенств (25) из уравнений

$$\xi_0' = -v_0 + x_0', \quad \xi_0'' = -j + x_0''.$$

Возвращаемся к функции y :

$$\left. \begin{aligned} y &= (C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p) \cos^{\frac{1}{2}} p = \\ &= (1 - z^2)^{\frac{1}{4}} [C_2 \cos(k_1 \arcsin z) + D_2 \sin(k_1 \arcsin z)] = \\ &= \left[\frac{2j \left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 \right)}{2j\xi_0 + v_0^2} \right]^{\frac{1}{4}} \\ &\left[C_2 \cos \left(k_1 \arcsin \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \right) + D_2 \sin \left(k_1 \arcsin \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Теперь определение функции x приводится к выполнению квадратуры, принимая во внимание, что $x|_{t=0} = 0$,

$$x = \int_0^t y dt = \frac{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}{j} \int_{p_0}^p (C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p) \cos^{\frac{3}{2}} p dp. \quad (39)$$

Мы не останавливаемся на дальнейшем изучении полученного интеграла, как не представляющем особенного практического интереса.

Переходим к определению усилия T каната из уравнения

$$T = kf(t) = mg + mj - m \frac{dy}{dt}. \quad (40)$$

Вычисляем значение входящей сюда производной $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{j \cos \frac{1}{2} p \cos k_1 p}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \left[k_1 (C_2 \operatorname{tg} k_1 p - D_2) + \frac{1}{2} (C_2 + D_2 \operatorname{tg} k_1 p) \operatorname{tg} p \right]. \quad (41)$$

Выражение для T получается иным, чем у проф. А. С. Локшина. Была бы интересна числовая оценка результатов.

Равнозамедленное вращение. Сохраняем все прежние обозначения. Будем производить отсчет времени от начала равнозамедленного вращения. Имеем

$$s(t) = -v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

Вводим новую неизвестную функцию x по формуле

$$\xi = \xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 + x. \quad (42)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение в первом приближении

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \right) \frac{d^3 x}{dt^3} = -a_3 \frac{dx}{dt}, \quad (43)$$

где

$$a_3 = -j + g + \frac{k}{m}.$$

Аналогично предыдущему производим замену переменных:

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}, \quad y = \frac{dx}{dt}. \quad (44)$$

Вводим обозначение

$$k_2^2 = \frac{2a_3}{j} = \frac{2}{j} \left(-j + g + \frac{k}{m} \right).$$

Дифференциальное уравнение (43) преобразуется следующим образом:

$$(1 + z^2) \frac{d^3 y}{dz^2} + k_2^2 y = 0. \quad (45)$$

Благодаря большому значению параметра k_2 представляет интерес асимптотическое выражение интеграла уравнения (45) при $k_2 \rightarrow \infty$.

Следя прежнему методу¹, вводим вместо y новую переменную R по формуле

$$y = (1 + z^2)^{\frac{1}{4}} R. \quad (46)$$

Дифференциальное уравнение (45) заменяется следующим:

$$(1 + z^2) \frac{d^2 R}{dz^2} + z \frac{dR}{dz} + \left[k_2^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(1 + z^2)} \right] R = 0. \quad (47)$$

¹ А. С. Локшин, *ibid.*, § 67.

Положим

$$z = \sin hp. \quad (48)$$

Уравнение (47) переписывается в виде:

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + \left(k_2^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cos h^2 p} \right) R = 0. \quad (49)$$

Если параметр k_2 достаточно велик, неравенство

$$k_2^2 > \left| \frac{1}{4} - \frac{3}{4 \cos h^2 p} \right|$$

имеет место для всего периода равнозамедленного вращения барабана.

Применяем метод последовательных приближений, представляя R бесконечным рядом:

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \dots$$

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию R в первом приближении ($R = R_0$), имеет вид:

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + k_2^2 R = 0. \quad (50)$$

Интегрирование дает

$$R = C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p. \quad (51)$$

Произвольные постоянные C_3 и D_3 определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{k_2} (R_0 k_2 \cos k_2 p_0 - R_0' \sin k_2 p_0), \\ D_3 &= \frac{1}{k_2} (R_0 k_2 \sin k_2 p_0 + R_0' \cos k_2 p_0). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_0 &= R \Big|_{p=p_0}, \quad R_0' = \frac{dR}{dp} \Big|_{p=p_0}, \\ z &= \sinh p = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}, \\ z_0 &= \sinh p_0 = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}} \Big|_{t=0} = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}. \end{aligned}$$

Равенства (44), (46), (48) позволяют найти значения R_0 и R_0'

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= x_0' \left(1 - \frac{v_0^2}{2j\xi_0} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ R_0' &= - \frac{(2j\xi_0 - v_0^2)^{\frac{1}{4}}}{2(2j\xi_0)^{\frac{3}{4}}} (4\xi_0 x_0'' + x_0' v_0). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

При помощи равенства (42) определяем значения x_0' , x_0'' из уравнений

$$\xi_0' = -v_0 + x_0', \quad \xi_0'' = j + x_0''.$$

В дальнейшем значения R_0 и R_0' , а следовательно также значения постоянных C_3 и D_3 , считаются известными. Возвращаемся к функции y :

$$\begin{aligned}
 y &= (C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p) \cosh^{\frac{1}{2}} p = (1 + z^2)^{\frac{1}{4}} \\
 & [C_3 \cos(k_2 \operatorname{arcsinh} z) + D_3 \sin(k_2 \operatorname{arcsinh} z)] = \\
 & = \left[\frac{2j \left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \right)}{2j \xi_0 - v_0^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left[C_3 \cos \left(k_2 \operatorname{arcsinh} \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j \xi_0 - v_0^2}} \right) + \right. \\
 & \left. + D_3 \sin \left(k_2 \operatorname{arcsinh} \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j \xi_0 - v_0^2}} \right) \right]. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Определение функции x требует выполнения квадратуры:

$$x = \int_0^t y dt = - \frac{\sqrt{2j \xi_0 - v_0^2}}{j} \int_{v_0}^p (C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p) \cosh^{\frac{3}{2}} p dp. \quad (55)$$

Полученные результаты позволяют найти усилие T каната:

$$T = kf(t) = mg - mj - m \frac{dy}{dt}, \quad (56)$$

где

$$\frac{dy}{dt} = \frac{j \cosh^{-\frac{1}{2}} p \cos k_2 p}{\sqrt{2j \xi_0 - v_0^2}} [k_2 (C_3 \operatorname{tg} k_2 p - D_3) - \frac{1}{2} (C_3 + D_3 \operatorname{tg} k_2 p) \operatorname{th} p]. \quad (57)$$

Таким образом в случае, если диаграмма окружной скорости барабана состоит из участков, соответствующих равномерному или равнопеременному вращению, можно аналитически на основании вышеприведенных формул найти изменение натяжения каната за весь период поднятия клетки.

§ 4. Общий случай

Выше (§ 1) было выведено дифференциальное уравнение движения клетки в следующей форме ($a = mg + k$):

$$m \xi \frac{d^3 \xi}{dt^3} = \left(m \frac{d^2 \xi}{dt^2} - a \right) \left[\frac{d \xi}{dt} - v(t) \right]. \quad (58)$$

В общем случае функция $v(t)$ может быть произвольной. Мы будем считать ее голоморфной. Если это условие не выполняется для всей диаграммы окружной скорости на барабанах, то предположим, что диаграмма может быть разбита на конечное число таких частей, где предыдущие условия выполнены. Наши дальнейшие рассуждения будут относиться к любой из этих частей.

Заметим прежде всего, что прежний способ интегрирования уравнения (58), основанный на подстановке

$$\xi = \xi_0 + s(t) + z,$$

где

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt,$$

в общем случае, т. е. при произвольном виде функции $v(t)$, не приводит к цели, так как частный интеграл

$$x = 0$$

теперь уже не будет иметь место.

Применяя теорему Коши, представим интеграл уравнения (58) в виде целого ряда

$$\xi = \xi_0 + \xi_0^{(1)} t + \frac{\xi_0^{(2)}}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{\xi_0^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \dots, \quad (*)$$

где производные $\xi_0^{(3)}$, $\xi_0^{(4)}$, ..., вычисленные при $t=0$, находятся: первая непосредственно из уравнения (58), а остальные путем его последовательных дифференцирований.

Упомянутая теорема позволяет найти радиус сходимости полученного ряда, а также оценить погрешность при замене бесконечного ряда (*) конечным числом его первых членов.

SUR LA TENSION DU CÂBLE PENDANT L'ASCENSION DE LA CAGE DU Puits DE MINÉ

par N. Neronoff (Leningrade)

Résumé

Réolvons le problème posé approximativement en négligeant la masse du câble sans grande importance en comparaison de la masse de la cage du puits de mine, la hauteur de l'ascension étant supposée petite (100—150 m). Enfin considérons le câble comme un fil élastique.

Formons l'équation différentielle (du troisième ordre) du mouvement de la cage

$$m\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(m \frac{d^2\xi}{dt^2} - a \right) \left[\frac{d\xi}{dt} - v(t) \right], \quad (1)$$

où $a = mg + k$ et m désigne la masse de la cage, ξ — son abscisse (l'axe de ξ est dirigé verticalement vers le bas), g — l'accélération due à la pesanteur, k — le coefficient figurant dans la loi de Hooke et enfin $v(t)$ — la vitesse des points extérieurs du tambour tournant, $v(t)$ étant une fonction donnée du temps t .

Dans le cas général, l'intégrale de l'équation (1) peut être représentée par une série entière en t (le théorème d'existence de Cauchy)

$$\xi = \xi_0 + \xi_0' t + \frac{\xi_0''}{1 \cdot 2} t^2 + \dots, \quad (2)$$

la fonction $v(t)$ étant supposée holomorphe. Passons à l'examen des cas particuliers suivants, qui présentent quelque intérêt pratique, quand la rotation du tambour est uniforme ou uniformément accélérée (retardée), c'est à dire

$$v(t) = -v_0 \pm jt, \quad s(t) = \int_0^t v(t) dt = -v_0 t \pm \frac{1}{2} jt^2. \quad (3)$$

Introduisons une fonction inconnue nouvelle x

$$\xi = \xi_0 + s(t) + x. \quad (4)$$

1. Le premier cas ($j=0$, le tambour tourne uniformément et $v(t) = \text{const} = -v$). Dans la première approximation la fonction x est déterminée par l'équation différentielle suivante $\left(a_1 = \frac{a}{m}\right)$

$$(\xi_0 - vt) \frac{d^3x}{dt^3} = -a_1 \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

qui à l'aide de la substitution

$$t = \frac{\xi_0}{v} - \frac{v}{4a_1} \omega^2, \quad \frac{dx}{dt} = \omega z \quad (6)$$

peut être réduite à l'équation de Bessel

$$\omega^2 \frac{d^2z}{d\omega^2} + \omega \frac{dz}{d\omega} + (\omega^2 - 1)z = 0. \quad (7)$$

Donc, x s'exprime par les fonctions de Bessel

$$x = -\frac{v\omega^2}{2a_1} [C_1 J_2(\omega) + D_1 Y_2(\omega)] \Big|_{\omega_0}^{\omega}, \quad (8)$$

où

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{v} \sqrt{a_1 \xi_0}$$

et C_1, D_1 désignent des constantes arbitraires.

2. Le deuxième cas (la rotation du tambour est uniformément accélérée). L'équation différentielle déterminant la fonction x dans la première approximation à la forme

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2\right) \frac{d^3x}{dt^3} = -a_2 \frac{dx}{dt}, \quad (9)$$

où

$$a_2 = j + g + \frac{k}{m}.$$

Faisons le changement des variables

$$z = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}, \quad y = \frac{dx}{dt}. \quad (10)$$

Nous aurons

$$(1 - z^2) \frac{d^2y}{dz^2} + k_1^2 y = 0, \quad (11)$$

où

$$k_1^2 = \frac{2a_2}{j}.$$

Le paramètre k_1 étant assez grand, cherchons l'expression asymptotique de l'intégrale de l'équation (11) quand $k_1 \rightarrow \infty$. Nous aurons dans la première approximation

$$y \sim (1 - z^2)^{\frac{1}{4}} [C_2 \cos(k_1 \arcsin z) + D_2 \sin(k_1 \arcsin z)], \quad (12)$$

où C_2 et D_2 sont des constantes arbitraires.

3. Le troisième cas (la rotation du tambour est uniformément retardée). Nous obtenons l'équation différentielle déterminant la fonction x dans la forme

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2\right) \frac{d^3 x}{dt^3} = -a_3 \frac{dx}{dt}, \quad (13)$$

où

$$a_3 = -j + g + \frac{k}{m}.$$

Le changement des variables

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}, \quad y = \frac{dx}{dt} \quad (14)$$

permet de remplacer l'équation (13) par l'équation suivante

$$(1 + z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} + k_2^2 y = 0, \quad (15)$$

où

$$k_2^2 = \frac{2a_3}{j}.$$

Grâce à la grande valeur du paramètre k_2 il est utile d'avoir l'expression asymptotique de l'intégrale de l'équation (15) quand $k_2 \rightarrow \infty$. Nous aurons dans la première approximation

$$y \sim (1 + z^2)^{\frac{1}{4}} [C_3 \cos(k_2 \operatorname{arcsinh} z) + D_3 \sin(k_2 \operatorname{arcsinh} z)] \quad (16)$$

en désignant par C_3 et D_3 des constantes arbitraires.

Enfin la tension T du câble est déterminée par l'équation

$$T = mg - m \frac{d^2 \xi}{dt^2}. \quad (17)$$