ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА [1]

Я. Л. Нудельман (Одесса)

За последние годы интегральные уравнения получили большое применение в вопросах математической физики. Исследование общих свойств, присущих различным задачам, наиболее просто и изящно достигается применением методов интегральных уравнений.

Сила этого метода кроется в том, что довольно большое разнообразие задач сводится к интегральным уравнениям одного и того же типа. Прекрасной иллюстрацией сказанного служит теория колебаний, где различные по типу диференциальные уравнения вибраций струны, стержня, мембраны и т. п., сводятся к интегральному уравнению Fredholm'a.

E. Trefftz'y принадлежит инициатива применения интегральных уравнений к вопросам устойчивости.[2] Для случая прямолинейного стержня переменного сечения, нагруженного переменной осевой силой, для весьма общего случая опорных закреплений Trefftz составляет интегральное уравнение продольного изгиба.

В настоящей работе, используя уравнение Trefftz'a, автор исследует влияние дополнительных опорных закреплений на величину критических сил при продольном изгибе.

§ 1. Интегральное уравнение продольного изгиба

Для последовательности изложения повторим в совершенно иной форме результаты, полученные Trefftz'ом. Тем более, что, как видно будет из вывода, уравнение справедливо для более общего случая продольного изгиба, чем это следует из статьи Trefftz'a. В основу вывода положена математическая аналогия задачи о продольном изгибе прямолинейного стержня с одной из задач по теории вибраций. Последняя, на основании простых механических соображений, сводится к интегральному уравнению Fredholm'a.

Пусть нам дан прямолинейный стержень переменного сечения, длину которого обозначим через l. На число и характер опорных закреплений не будем накладывать никаких ограничений, допуская даже, что стержень частично либо полностью лежит на сплошном упругом основании. Как известно, для рассматриваемого общего случая диференциальное уравнение продольного изгиба записывается так:

$$[EJ(x)y'']'' + \lambda\left[\frac{d\rho(x)}{dx}\, y'\right]' + K(x)y = 0, \qquad (1)$$

[1] Доклад, прочитанный 29/VI 1934 г. на II Всесоюзном математическом съезде.
[2] E. Trefftz, Z. f. ang. Math. u. Mech. 3, 272, 1923.

где $EJ(x)$ — жесткость в плоскости изгиба, $\lambda \frac{d\rho(x)}{dx}$ — равнодействующая осевых сил, лежащих слева от точки x, а $K(x)$ — коэфициент упругого оседания.

С другой стороны, для амплитудного прогиба свободных колебаний этого же стержня, при учете только сил инерции вращения поперечных сечений, мы приходим к тому же диференциальному уравнению с теми же условиями на границах, только под λ необходимо понимать квадрат частоты свободного колебания, а

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \sigma J(x),$$

где σ — плотность материала стержня.

Обозначим через $K(x, s)$ прогиб в точке x, вызванный единичной силой, приложенной в точке s. Нетрудно видеть, что тогда $\frac{\partial K(x, s)}{\partial s}$ — прогиб в точке x, вызванный единичной сосредоточенной парой в точке s, а $\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s}$ — тангенс угла поворота сечения в точке x, вызванный той же парой.

На основании принципа наложения деформаций, прогиб в точке x, вызванный любой системой внешних пар, лежащих в плоскости изгиба, равен

$$y(x) = \int_0^l \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} dM(s), \tag{2}$$

где $dM(s)$ — момент пары, действующей на участке ds, а интеграл взят в смысле Stieltjes'a, благодаря чему формула справедлива как для сплошной моментной нагрузки, так и для сосредоточенных пар.

Для свободных гармонических колебаний стержня, при учете только влияния сил инерции вращения поперечных сечений, в момент, когда прогиб достигает амплитудного значения, можно считать, что балка нагружена моментной нагрузкой интенсивности $\lambda\sigma J(x) y'(x)$, а следовательно,

$$y(x) = \lambda \int_0^l \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} y'(s) \sigma J(s) ds. \tag{3}$$

Заменяя $\sigma J(s) ds$ через $d\rho(s)$ и диференцируя обе части уравнения по x, приходим, для случая продольного изгиба, к „нагруженному" интегральному уравнению Fredholm'a, написанному в интегралах Stieltjes'a: [1]

$$y'(x) = \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s} y'(s) d\rho(s). \tag{4}$$

[1] Подробную теорию „нагруженных" интегральных уравнений можно найти в фундаментальной работе N. Gunter'a, Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathematique, изд. Академии наук СССР, Ленинград, 1932. Случай, который может нас интересовать, когда $\rho(s)$ имеет конечное число разрывов 1-го рода, рассмотрен еще Kneser'ом, Rendiconti di Palermo, t. 37, 1914.

Если мы покажем теперь, что ядро $\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s}$ является положительно определенным, и ограничимся случаем, когда функция $\rho(x)$ монотонно возрастает, то уравнение (4) будет иметь только положительные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ с фундаментальными функциями $y_1'(x)$, $y_2'(x), \ldots, y_n'(x), \ldots$, ортогональными в смысле Чебышева — Stieltjes'a.

Для ядра такого типа, как показал Kneser, справедлива теорема Mercer'a:

$$\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x) y_i'(s)}{\lambda_i},$$

а решение неоднородного уравнения:

$$y'(x) = f(x) + \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s} y'(s)\, d\rho(s)$$

получаем по формуле:

$$y'(x) = f(x) + \lambda \int_0^l \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, d\rho(s), \tag{5}$$

где резольвента равна

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x) y_i'(s)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{6}$$

Положительность ядра $\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s}$ проще всего доказать так. На основании единой формулы перемещений Мора

$$K(x, s) = \int_0^l \frac{M(r, x) M(r, s)}{EJ(r)}\, dr,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x \partial s} = \int_0^l \frac{\frac{\partial M(r, x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial M(r, s)}{\partial s}}{EJ(r)}\, dr;$$

а ядра такого типа положительно определенные.[1]

В дальнейшем нам придется пользоваться такими разложениями:

$$\frac{\partial K(x, s)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x) y_i(s)}{\lambda_i}$$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i}.$$

[1] Г. Виарда, Интегральные уравнения, Гостехиздат, М.-Л. 1933, стр. 159—160.

к которым приходим, интегрируя ядро $\frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\, \partial s}$. Отметим, что оба ряда сходятся абсолютно и притом равномерно относительно обеих переменных.

§ 2. Введение опоры, ограничивающей вертикальное перемещение опорного сечения

Предположим, что точку a балки мы закрепим упругой пружиной с коэфициентом осадки α (осадка от силы, равной единице). Тогда $\overline{K}(x, s)$ — прогиб в точке x от единичной силы в точке s для балки с добавочным закреплением

$$\overline{K}(x, s) = K(x, s) - N(s)\, K(x, a),$$

где $N(s)$ — реакция пружины при нагрузке балки единичной силой в s.

При $x = a$

$$\alpha N(s) = K(a, s) - N(s)\, K(a, a),$$

откуда

$$N(s) = \frac{K(a, s)}{K(a, a) + \alpha}.$$

Окончательно для балки с добавочным закреплением получаем такое ядро:

$$\frac{\partial^2 \overline{K}(x, s)}{\partial x\, \partial s} = \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\, \partial s} - \frac{\frac{\partial K(x, a)}{\partial x}\, \frac{\partial K(a, s)}{\partial s}}{K(a, a) + \alpha}. \tag{7}$$

Не трудно видеть, что интегральная форма

$$\overline{I}(\varphi, \varphi) = \int\int \frac{\partial^2 \overline{K}(x, s)}{\partial x\, \partial s}\, \varphi(x)\, \varphi(s)\, d\rho(x)\, d\rho(s)$$

для нового ядра, оставаясь положительной, будет меньше интегральной формы $I(\varphi, \varphi)$ старого ядра, т. е.

$$I(\varphi, \varphi) > \overline{I}(\varphi, \varphi) > 0,$$

а отсюда следует,[1] что критические силы при наложении добавочного закрепления не уменьшаются. Разберем это явление подробней. На основании (4) и (7) получаем интегральное уравнение для балки с добавочным закреплением:

$$y'(x) = \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\, \partial s}\, y'(s)\, d\rho(s) - \frac{\partial K(x, a)}{\partial x}\, \frac{\lambda \int_0^l \frac{\partial K(a, s)}{\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s)}{K(a, a) + \alpha}.$$

Подбирая постоянный множитель при $y'(x)$ [2] так, чтобы

$$K(a, a) + \alpha = -\lambda \int_0^l \frac{\partial K(a, s)}{\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s), \tag{8}$$

[1] Курант-Гильберт, Методы математической физики, ГТТИ, 1933, стр. 124.
[2] Так как $y'(x)$ определено до постоянного сомножителя.

придаем уравнению такой вид:

$$y'(x) = \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\, \partial s} y'(s)\, d\rho(s) + \frac{\partial K(x, a)}{\partial x}.$$

Таким образом, мы пришли к неоднородному интегральному уравнению, решение которого получаем по (5)

$$y'(x) = \frac{\partial K(x, a)}{\partial x} + \lambda \int_0^l \Gamma(x, s; \lambda) \frac{\partial K(s, a)}{\partial s}\, d\rho(s).$$

Вставляя из (6) значение резольвенты и разлагая $\frac{\partial K(s, a)}{\partial s}$ по билинейной формуле, имеем

$$y'(x) = \frac{\partial K(x, a)}{\partial x} + \lambda \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i'(s)}{\lambda_i - \lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j'(s)\, y_j(a)}{\lambda_j}\, d\rho(s).$$

Последнее выражение значительно упрощается, так как ряды, стоящие под знаком суммы, сходятся равномерно, а функции $y_1'(x)$, $y_2'(x), \ldots, y_i'(x), \ldots$ представляют систему нормированных ортогональных функций.

Интегрируя под знаком суммы, получаем

$$y'(x) = \frac{\partial K(x, a)}{\partial x} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i(a)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

Полученное значение для $y'(x)$ вставляем в уравнение (8):

$$K(a, a) + \alpha = -\lambda \int_0^l \frac{\partial K(a, s)}{\partial s} \frac{\partial K(s, a)}{\partial s}\, d\rho(s) -$$

$$-\lambda^2 \int_0^l \frac{\partial K(a, s)}{\partial s} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(s)\, y_i(a)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}\, d\rho(s).$$

Разлагая $K(a, a)$, $\frac{\partial K(a, s)}{\partial s}$ и $\frac{\partial K(s, a)}{\partial s}$ по билинейной формуле и интегрируя под знаком суммы, имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(a)}{\lambda_i} + \alpha + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(a)}{\lambda_i^2} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(a)}{\lambda_i^2(\lambda_i - \lambda)} = 0.$$

Собирая члены с одинаковыми коэфициентами, получаем окончательное уравнение для определения критических сил балки с дополнительным закреплением:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(a)}{\lambda_i - \lambda} + \alpha = 0. \tag{9}$$

Исследуя это уравнение, установим ряд общих положений.

Теорема 1. При введении опоры, ограничивающей вертикальное перемещение опорного сечения, каждая критическая сила возрастает, но не превышает следующей.

$$\lambda_1 < \overline{\lambda}_1 \leqslant \lambda_2 < \overline{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i < \overline{\lambda}_i \leqslant \lambda_{i+1} < \ldots.$$

Для доказательства заметим, что функция $F(\lambda)$ — монотонно возрастающая. Действительно, диференцируя по λ, получаем

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(a)}{(\lambda_i - \lambda)^2} > 0.$$

С другой стороны, в каждом из интервалов $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ функция $F(\lambda)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а следовательно, имеет в этом интервале один и только один корень.

Теорема остается справедливой и в том случае, когда $y_{i+1}(a) = 0$, т. е. опора совпадает с одним из узлов $i+1$-ой фундаментальной функции. Согласно доказанному, теорема верна, если мы опору сдвинем сколь угодно мало в сторону от узла, а так как характеристические числа меняются непрерывно с ядрами, [1] то теорема верна и при совпадении узла с опорой.

Теорема 2. С увеличением жесткости пружины, т. е. с уменьшением α, критические силы возрастают.

Действительно, с увеличением α положительная часть уравнения возрастает, а следовательно, критическая сила будет меньше. Верно, конечно, и обратное положение.

При α, стремящемся к ∞, $\overline{\lambda}_i$ стремится к λ_i.

§ 3. Введение опоры, ограничивающей поворот опорного сечения

Предположим, что в точке a на балку наложена дополнительная связь, препятствующая свободному вращению опорного сечения. Допустим, что при повороте сечения на угол β в точке наложения связи возникает реактивная пара величиной в единицу. Для такой балки угол поворота сечения в точке x от единичной пары в s — $\frac{\partial^2 \overline{K}(x, s)}{\partial x\, \partial s}$ получаем как сумму углов, вызванных в первоначальной балке той же парой и реактивной парой $m(s)$ в точке наложения связи, т. е.

$$\frac{\partial^2 \overline{K}(x, s)}{\partial x\, \partial s} = \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\, \partial s} - m(s)\, \frac{\partial^2 K(x, a)}{\partial x\, \partial s}.$$

При $x = a$

$$\beta M(s) = \frac{\partial^2 K(a, s)}{\partial x\, \partial s} - m(s)\, \frac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\, \partial s}.$$

Разрешая уравнение относительно $m(s)$, получаем

$$m(s) = \frac{\dfrac{\partial^2 K(a, s)}{\partial x\, \partial s}}{\dfrac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\, \partial s} + \beta},$$

[1] Курант-Гильберт, Методы математической физики, стр. 140.

откуда ядро для балки с наложенной связью

$$\frac{\partial \overline{K}^2(x, s)}{\partial x\,\partial s} = \frac{\partial K^2(x, s)}{\partial x\,\partial s} - \frac{\dfrac{\partial^2 K(a, s)}{\partial x\,\partial s}\;\dfrac{\partial^2 K(x, a)}{\partial x\,\partial s}}{\dfrac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\,\partial s} + \beta}.$$

В дальнейшем проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего параграфа. Интегральное уравнение для балки с добавочным закреплением

$$y'(x) = \lambda \int_0 \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\,\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s) - \frac{\partial^2 K(x, a)}{\partial x\,\partial s}\;\frac{\lambda \displaystyle\int_0 \frac{\partial^2 K(a, s)}{\partial x\,\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s)}{\dfrac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\,\partial s} + \beta}.$$

Подбирая постоянный множитель при $y'(x)$ так, чтобы

$$\frac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\,\partial s} + \beta = -\lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(a, s)}{\partial x\,\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s), \tag{10}$$

приходим опять к неоднородному интегральному уравнению

$$y'(x) = \frac{\partial^2 K(x, a)}{\partial x\,\partial s} + \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x\,\partial s}\, y'(s)\, d\rho(s),$$

решение которого, согласно (5), имеет вид

$$y'(x) = \frac{\partial^2 K(x, a)}{\partial x\,\partial s} + \lambda \int_0^l \Gamma(x, s; \lambda)\, \frac{\partial^2 K(s, a)}{\partial x\,\partial s}\, d\rho(s).$$

Вставляя вместо резольвенты ее значение и разлагая ядро по билинейной формуле, получаем

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i'(a)}{\lambda_i} + \lambda \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i'(s)}{\lambda_i - \lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j'(s)\, y_j'(a)}{\lambda_i}\, d\rho(s),$$

откуда, делая соответствующие преобразования, имеем

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i'(a)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'(x)\, y_i'(a)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

Вставляя полученное значение для $y'(x)$ в уравнение (10) и вновь разлагая ядра по билинейной формуле, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i} + \beta + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i^2} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i^2(\lambda_i - \lambda)} = 0,$$

откуда уравнение критических сил для балок с наложенной связью указанного типа имеет вид:

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i - \lambda} + \beta = 0. \tag{11}$$

Исследуя это уравнение методами предыдущего параграфа, легко показать также для этого типа добавочных опор справедливость теорем 1 и 2.

Отметим, наконец, что уравнения (9) и (11) могут служить для приближенного определения критических сил. Ограничившись в формулах (9) и (11) конечным числом членов, мы сводим задачу к решению алгебраического уравнения.

Особенно простые приближенные уравнения получаются, если улучшить сходимость ряда, стоящего в левой части уравнения (11). Для этого, например, можно воспользоваться очевидным тождеством

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i - \lambda} = \frac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\, \partial s} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i'^2(a)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

Для балок постоянного сечения ($EJ(x) = \text{const}$) значение $\dfrac{\partial^2 K(a, a)}{\partial x\, \partial s}$ можно найти в любом курсе сопротивления материалов, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{y_i'^2(a)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}$ сходится быстрее ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{y_i'^2(a)}{\lambda_i - \lambda}$.

В частном случае, для балки с одним упруго защемленным и другим шарнирно опертым концом, имеем такое приближенное уравнение для первой критической силы:

$$(2A - 15)\lambda^2 + (51 - 10A)\lambda_1 \lambda + 8A\lambda_1^2 = 0,$$

где $A = \pi^2 + 3\beta l \lambda_1$, а $\lambda_1 = \dfrac{\pi^2 EJ}{e^2}$. Как легко подсчитать, наибольшая погрешность не превышает $1{,}5\%$.

В заключение считаю приятным долгом выразить искреннюю благодарность проф. М. Г. Крейну, по совету и под руководством которого выполнена настоящая работа.

INTEGRALGLEICHUNGEN IN DER THEORIE DER KNICKUNG

J. Nudelmann (*Odessa*)

Zusammenfassung

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur Frage des Einflusses der nachträglichen Stabstützungen auf die Grösse der kritischen Kräfte bei einer Knickung.

Es wird die Knickgleichung (9) für den Fall eines geradlinigen Stabes von veränderlichem Querschnitt, der von Axialkräften belastet ist, und für einen sehr allgemeinen Fall von Stützungen aufgestellt.

Nach der Untersuchung dieser Gleichung ergeben sich folgende Lehrsätze:

1. Bei der Einführung einer Stützung die entweder nur die seitlichen Auslenkungen oder nur die Drehbewegungen des Stützquerschnittes beschränkt wächst jede kritische Kraft, ohne, aber, die folgende zu überschreiten.

2. Mit der Steifigkeit der Stützung wachsen auch die kritischen Kräfte.