ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

# РЕФЕРАТЫ

F. Tricomi. Sul problema della trave soggetta a uno sforza di taglio (Atti della Accademia Naz. dei Lincei, VI ser., Vol. XVIII, № 11, 1933, p. 484 — 488).

Известно, что касательные напряжения в случае изгиба балки, заделанной на одном конце и нагруженной на свободном конце силой $Q$ (параллельной одной из главных осей инерции $Y$ поперечного сечения), определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Q}{2\,(m+1)\,J}\left[m\,\frac{\partial\psi}{\partial x} - (2m+1)\,xy\right] \\ \tau_{yz} &= \frac{Q}{2\,(m+1)\,J}\left[m\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{1}{2}\,(2\,m-1)\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2\right] \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

где $\frac{1}{m}$ коэфициент Пуассона, $J$ — момент инерции сечения относительно нейтраль-

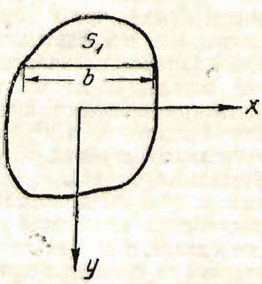


Рис. 1.

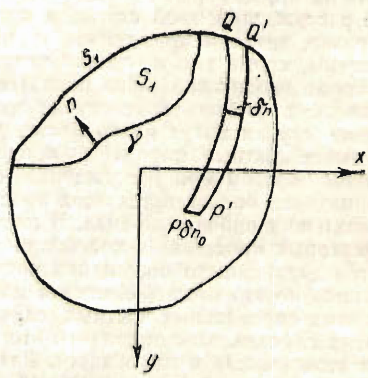


Рис. 2.

ной оси $X$ и $\psi\,(x, y)$ — гармоническая внутри сечения функция, нормальная производная которой на контуре сечения удовлетворяет условию:

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{2\,m+1}{m}\,xy\,\frac{dx}{dn} + \frac{1}{2\,m}\left[(2m-1)\,x^2 + y^2\right]\frac{dy}{dn}. \tag{2}$$

В сопротивлении материалов при рассмотрении касательных напряжений при изгибе приводится выражение для среднего значения $\overline{\tau}_{yz}$ напряжения $\tau_{yz}$ вдоль хорды $b$ сечения, параллельной оси $X$. Это выражение имеет вид:

$$\overline{\tau}_{yz} = \frac{Q}{bJ}\int\int\limits_{S_1} y\,dS, \tag{3}$$

где обозначения указаны на рис. 1. В реферируемой заметке Tricomi показано, что эта формула (3) представляет непосредственно следствие того, что интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутому контуру обращается в нуль. При этом (3) может быть обобщено в том смысле, что хорду $b$ можно заменить произвольной кривой $\gamma$, если притом $\overline{\tau}_{yz}$ заменить средним значением вдоль кривой составляющей $\tau_n$ полного касательного напряжения $\tau$ (т. е. напряжения, компоненты которого суть $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$) вдоль нормали к $\gamma$. При обозначениях рис. 2 формула Tricomi будет

$$\overline{\tau}_n = \frac{Q}{bJ} \int\limits_{S_1}\int y dS, \tag{4}$$

причем теперь под $b$ подразумевается длина кривой $\gamma$. Доказательство этого утверждения можно получить, если заметить, что

$$\overline{\tau}_n\, b = \int\limits_{\gamma} \tau_n ds, \quad \tau_n = \frac{Q}{2(m+1)} \left\{ m\,\frac{d\psi}{dn} - (2m+1)\,xy\,\frac{dx}{dn} - \frac{1}{2}\left[(2m-1)\,x^2 + y^2\right]\frac{dy}{dn} \right\},$$

и выразить, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\psi}{dn}\, ds + \int\limits_{S_1} \frac{d\psi}{dn}\, ds = 0.$$

В первом интеграле надо $\frac{d\psi}{dn}$ заменить по формуле (5), а во втором подставить вместо $\frac{d\psi}{dn}$ ее значение (2). Тогда, применив один раз преобразование Гаусса, придем к формуле (4).

Если известны линии касательных напряжений при изгибе для данного сечения, т. е. кривые, касательная в каждой точке которых имеет направление касательного напряжения в этой точке, то на основе формулы Tricomi можно дать способ графоаналитического определения уже не среднего, а истинного значения касательного напряжения в данной точке. В самом деле, пусть $PQ$ и $P'Q'$ — две весьма близкие кривые касательных напряжений, $\overline{PP'} = \delta n_0$ — отрезок нормали к этим кривым. Применим формулу (4) к кривой $QPP'Q'$; замечая, что $\tau_n = 0$ вдоль $QP$ и $Q'P'$ и $\tau_n = \tau$ вдоль $PP'$, найдем

$$\delta n_0 \cdot (\overline{\tau})_{\overline{PP'}} = \frac{Q}{J} \int\limits_{S_1}\int y dS, \tag{5}$$

причем в данном случае $S_1$ есть площадь замкнутой кривой $QPP'Q'Q$. Но заменяя $dS$ через $\delta n \cdot ds$ и замечая, что при $P \to P'$, $(\overline{\tau})_{\overline{PP'}} \to \tau\,(P)$, получим

$$\tau\,(P) = \frac{Q}{J} \int\limits_{P}^{Q} \frac{\delta n}{\delta n_0}\, y ds, \tag{6}$$

где интегрирование ведется вдоль кривой $PQ$ и отношение $\frac{\delta n}{\delta n_0}$ в каждой точке этой кривой может быть снято с чертежа. Получить линии напряжения можно экспериментальным путем по методу аналогии Прандтля в применении к задаче изгиба (см., например, Т и м о ш е н к о, Теория упругости, ч. 1, стр. 332, 1934).

*А. Лурье*