ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
ТОМ III 1936 № 1

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ

П. Полубаринова-Кочина (Ленинград)

Известно, что для тонкой прямоугольной пластинки со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$ критическое значение сжимающей силы в случае опертых сторон определяется по формуле:

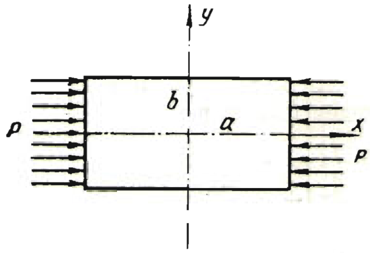

Рис. 1.

$$P = \frac{D\left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2}\right)^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}}, \tag{1}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки, E — модуль упругости, σ — отношение Пуассона, h — толщина пластинки; m и n — числа полуволн вдоль осей X и Y для искривленной пластинки. При этом уравнение прогибов пластинки, с точностью до постоянного множителя, может быть написано так:

$$w = \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}. \tag{2}$$

Чтобы получить для P критическое значение, нужно выбрать m и n так, чтобы P было наименьшим. Именно n должно равняться единице, m должно быть одним из двух целых чисел, ближайших к $\dfrac{a}{b}$. Формула (1) выводится из уравнения равновесия пластинки, составленного в предположении, что прогибы ее w малы по сравнению с толщиной, причем последняя предполагается малой по сравнению со сторонами $2a$ и $2b$ пластинки. Однако опыты показывают, что пластинка, находясь в состоянии изгиба, в момент потери устойчивости, выдерживает сжимающие силы, большие, чем те, которые даются формулой (1). Можно думать, что причиной этого расхождения является предположение о малости прогибов пластинки. В связи с этим в Научно-исследовательском аэро-институте при Институте инженеров гражданского воздушного флота инженером В. Ф. Рентелем была поставлена задача: определить величину сжимающей силы P, при которой имеет место выпучивание пластинки, в предположении, что прогибы пластинки одного порядка с толщиной ее (толщина предполагается малой по сравнению со сторонами пластинки). Настоящая статья дает метод решения поставленной задачи.

Известно, что при сделанных предположениях относительно толщины пластинки нельзя пренебрегать деформациями срединного слоя пластинки. Общая теория равновесия пластинки с учетом деформации срединного слоя (см., например, Love, A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity, стр. 558) приводит к такой системе дифференциальных уравнений изгиба пластинки:

$$\Delta\Delta\varphi = Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \tag{3}$$

$$D\Delta\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Здесь нормальная нагрузка p, которая фигурирует обычно в качестве слагаемого в правой части уравнения (4), отсутствует по самому условию задачи. Символ $\Delta\Delta$ означает бигармонический оператор:

$$\Delta\Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.$$

Постоянные D, E, h имеют указанные выше значения, φ есть функция напряжений, т. е. функция, через вторые производные от которой выражаются нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};\quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};\quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Граничные условия, отвечающие поставленной задаче, т. е. требованиям, что пластинка свободно оперта по краям и подвергается действию лишь сжимающих сил P, действующих на стороны $X = \pm a$, выразятся таким образом: при $x = \pm a$:

$$w = 0,\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -P,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$

при $y = \pm b$:

$$w = 0,\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Переходя к решению задачи, т. е. к определению значения P, положим:

$$w = \lambda w_1 + \lambda^3 w_2 + \lambda^5 w_3 + \ldots \tag{5}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda^2 \varphi_1 + \lambda^4 \varphi_2 + \ldots \tag{6}$$

$$P = P_0 + \lambda^2 P_1 + \lambda^4 P_2 + \ldots. \tag{7}$$

Подставим выражения (5) и (6) в уравнение (3) и (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в левых и правых частях этих уравнений. Тогда будем иметь:

$$\Delta\Delta\varphi_0 = 0, \tag{8}$$

$$D\Delta\Delta w_1 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}; \tag{9}$$

$$\Delta\Delta\varphi_1 = Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right], \tag{10}$$

$$D\Delta\Delta w_2 = \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} -$$
$$- 2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial y}. \tag{11}$$

Будем последовательно искать решения уравнений (8)—(11).

Решение уравнения (8) при граничных условиях:

при $x = \pm a$:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} = -P_0, \quad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} = 0;$$

при $y = \pm b$:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} = 0$$

дает:

$$\varphi_0 = -\frac{P_0}{2}(y^2 - b^2)$$

(φ_0 определяется с точностью до линейной функции от x и y). Отсюда будем иметь:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} = P_0, \quad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} = 0.$$

При этом уравнение (9) примет вид:

$$D\Delta\Delta w_1 = -P_0\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}. \tag{12}$$

По обычной теории (см., например, Тимошенко, курс теории упругости т. II), положив

$$w_1 = \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} \tag{13}$$

и подставив это выражение в уравнение (12), найдем, что P_0 необходимо должно удовлетворять соотношению:

$$P_0 = \frac{D\left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2}\right)^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}}. \tag{14}$$

Это есть критическая сила, даваемая теорией тонкой пластинки, величина которой уже дана была нами в формуле (1).

Таким образом нами найдено первое приближение для величины P. Для получения следующего приближения, т. е. для отыскания величины P, чем мы в настоящей работе и ограничиваем нашу задачу, подставим выражение (13) для w_1 в правую часть уравнения (10). Будем иметь:

$$\Delta\Delta\varphi_1 = \frac{Ehm^2n^2\pi^4}{32a^2b^2}\left[\cos\frac{m\pi(x+a)}{a} + \cos\frac{n\pi(y+b)}{b}\right]. \tag{15}$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)},$$

где $\varphi_1^{(1)}$ есть частное решение неоднородного уравнения (15):

$$\varphi_1^{(1)} = (-1)^m \frac{Eha^2n^2}{32b^2m^2} \cos\frac{m\pi x}{a} + \frac{Ehb^2m^2}{32a^2n^2}(-1)^n \cos\frac{n\pi y}{b} - \frac{P_1}{2}y^2;$$

$\varphi_1^{(2)}$ есть решение однородного уравнения:

$$\Delta\Delta\varphi_1 = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям:
при $x = \pm a$:

$$\varphi_1^{(2)} = -\frac{Eha^2n^2}{32b^2m^2} + (-1)^{n+1}\frac{Ehb^2m^2}{32a^2n^2} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{16}$$

при $y = \pm b$:

$$\varphi_1^{(2)} = (-1)^{m+1}\frac{Ehn^2a^2}{32b^2m^2} \cos\frac{m\pi x}{a} - \frac{Ehb^2m^2}{32a^2n^2}; \tag{16'}$$

кроме того, на всем контуре прямоугольника, т. е. при $x = \pm a$, $y = \pm b$ нормальная производная $\varphi_1^{(2)}$ должна равняться нулю:

$$\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ при } x = \pm a,\ y = \pm b. \tag{16''}$$

Условия для $\varphi_1^{(2)}$ выбраны таким образом, чтобы функция: $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)}$ удовлетворяла контурным условиям:
при $x = \pm a$:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = -P_1; \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} = 0;$$

при $y = \pm b$:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0.$$

Функцию $\varphi_1^{(2)}$ можно определить по методу, применяемому проф. Б. М. Кояловичем в сочинении „Об одном уравнении с частным производным четвертого порядка“ (СПБ. 1902) — именно, можно искать решение в виде ряда:

$$\varphi_1^{(2)} = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} C_k E_k(x) \cos\frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k E_k^0(y) \cos\frac{k\pi x}{a}, \tag{17}$$

где

$$E_k(x) = \frac{k\pi x}{b}\,\frac{\operatorname{Sh}\frac{k\pi x}{b}}{\operatorname{Sh}\frac{k\pi a}{b}} - \frac{\operatorname{Ch}\frac{k\pi x}{b}}{\operatorname{Sh}\frac{k\pi a}{b}}\left(\frac{k\pi a}{b}\coth\frac{k\pi a}{b} + 1\right),$$

$$E_k^0(y) = \frac{k\pi y}{a}\,\frac{\operatorname{Sh}\frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{Sh}\frac{k\pi b}{a}} - \frac{\operatorname{Ch}\frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{Ch}\frac{k\pi b}{a}}\left(\frac{k\pi b}{a}\coth\frac{k\pi b}{a} + 1\right).$$

Полагая в выражении (17) один раз $x = a$, другой раз $y = b$ и приравнивая получающиеся при этом выражения $\varphi_1^{(2)}$ соответствующим контурным значениям $\varphi_1^{(2)}$ (формулы 16), получим:

$$\alpha+\sum_{k=1}^{\infty} C_k E_k(a)\cos\frac{k\pi y}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k D_k E_k^0(y)=$$

$$=-\frac{Eha^2m^2}{32b^2m^2}+(-1)^{n+1}\frac{Ehb^2m^2}{32a^2m^2}\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{18}$$

$$\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k C_k E_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty} D_k E_k^0(b)\cos\frac{k\pi x}{a}=$$

$$=(-1)^m+\frac{Ehn^2a^2}{32b^2m^2}\cos\frac{m\pi x}{a}-\frac{Ehb^2m^2}{32a^2n^2}. \tag{18}$$

В этих тождествах можно заменить E_k и E_k^0 их разложениями в ряды Фурье:

$$E_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)\frac{4a^3bk^3}{\pi(k^2a^2+i^2b^2)}\cos\frac{inx}{a};$$

$$E_k^0(y)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{4ab^3k^3}{\pi(k^2b^2+i^2a^2)^2}\cos\frac{iny}{b}.$$

Тогда в уравнениях (18) можно приравнять коэффициенты при $\cos\frac{iny}{b}$ для первого уравнения, при $\cos\frac{inx}{a}$ для второго уравнения. Получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&C_iE_i(a)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{i+k}D_k\frac{4ab^3k^3}{\pi}\frac{1}{(k^2b^2+i^2a^2)^2}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}Eh}{32}\cdot\dfrac{b^2m^2}{a^2n^2}\\ \text{при } i=n\\ 0 \text{ при } i\neq n\end{cases}\\
&D_iE_i^0(b)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{i+k}C_k\frac{4a^3bk^3}{\pi}\frac{1}{(k^2a^2+i^2b^2)^2}=\begin{cases}(-1)^{m+1}\dfrac{Eh}{32}\dfrac{a^2n^2}{b^2m^2}\\ \text{при } i=m\\ 0 \text{ при } i\neq m\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Имеем здесь систему бесчисленного множества уравнений для определения бесчисленного множества коэффициентов D_i и C_i (постоянная α не представляет интереса, потому уравнение для нее не написано).

Если бы мы определили коэффициенты C_i и D_i, то, подставив их в выражение для $\varphi_1^{(2)}$ и вспомнив выражение $\varphi_1^{(1)}$, нашли бы φ_1:

$$\varphi_1=\varphi_1^{(1)}+\varphi_1^{(2)}=\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}C_kE_k(x)\cos\frac{k\pi y}{b}+\sum_{k=1}^{\infty}D_kE_k^0(y)\cos\frac{k\pi x}{a}+$$

$$+(-1)^m\frac{Eh}{32}\frac{a^2n^2}{b^2m^2}\cos\frac{m\pi x}{a}+(-1)^n\frac{Eh}{32}\frac{b^2m^2}{a^2n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}-\frac{P_1}{2}y^2.$$

Подставим теперь этот ряд для φ_1, так же как значение для w_1, в уравнение (11). Перенося член с $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$ влево, получим:

$$D\Delta\Delta w_2 + P_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[\left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2} \frac{k^2\pi^2}{b^2} E_k(x) - \frac{n^2\pi^2}{4b^2} E_k''(x) \right) \right] \cdot$$

$$\cos\frac{k\pi y}{b} \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} +$$

$$+ \frac{mn\pi^2}{2ab} \frac{k\pi}{b} E_k'(x) \sin\frac{k\pi y}{b} \cos\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cos\frac{n\pi(y+b)}{2b} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left[\left(\frac{\pi^2 n^2}{4b^2} \frac{k^2\pi^2}{a^2} E_k^0(y) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{m^2\pi^2}{4a^2} E_k^0(y) \right) \cos\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} +$$

$$\left. + \frac{mn\pi^2}{2ab} \frac{k\pi}{a} E_k^{0''}(y) \sin\frac{k\pi x}{a} \cos\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cos\frac{n\pi(y+b)}{2b} \right] +$$

$$+ (-1)^m \frac{m^2n^2\pi^4}{4a^2b^2} M \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} +$$

$$+ (-1)^n \frac{m^2n^2\pi^4}{4a^2b^2} N \cos\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} +$$

$$+ P_1 \frac{m^2n^2}{4a^2} \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}. \qquad (20)$$

Здесь

$$M = \frac{Eh}{32} \frac{a^2n^2}{b^2m^2}; \quad N = \frac{Eh}{32} \frac{b^2m^2}{a^2n^2}.$$

Уравнение (20) представляет собою неоднородное уравнение, причем мы знаем, что соответствующее ему однородное уравнение при P, определяемом формулой (14), имеет решение, отличное от нуля вида (13). Поэтому коэффициент при $\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}$ в правой части уравнения (20) не может быть произвольным, но должен удовлетворять некоторому соотношению. Последнее может быть получено следующим образом: умножим обе части уравнения (20) на $\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}$ и возьмем интеграл по площади прямоугольника, составляющего пластинку, т. е. по x в пределах от $-a$ до $+a$, по y в пределах от $-b$ до $+b$. При этом большая часть членов пропадает, и мы получаем:

$$0 = (-1)^n \frac{m^2n\pi^2}{4a^2} C_n + (-1)^m \frac{mn^2\pi^3}{4b^2} D_m - \frac{m^2n^2\pi^4}{8ab} (M+N) + \frac{m^2\pi^2}{4} \frac{b}{a} P_1,$$

откуда:

$$P_1 = \frac{Eh}{64} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \left(\frac{a^2n^2}{b^2m^2} + \frac{b^2m^2}{a^2n^2} \right) + (-1)^n C_n \frac{\pi n}{ab} + (-1)^m D_m \frac{\pi m}{ab}. \qquad (21)$$

Как видно, для определения второго члена в разложении в ряд силы P:

$$P=P_0+P_1\lambda^2+\ldots$$

нужно найти лишь два коэффициента: C_n и D_m. Они определяются из системы уравнений (19). Системы такого рода разбираются проф. Б. М. Кояловичем в работе „Исследования о бесконечных системах линейных уравнений", напечатанной в Известиях Физико-математического института им. В. А. Стеклова (издание Академии наук, 1930 г., том III), где автором дан метод последовательных приближений для решения такого рода системы. В случае квадратной пластинки, когда $a=b$ и $m=n=1$, имеем:

$$P_1=\frac{Eh}{32}\frac{\lambda^2}{a^2}-\frac{\pi C_1}{a^2}-\frac{\pi D_1}{a^2}.$$

Вычисления дают для C_1 и D_1:

$$C_1=D_1=-\frac{Eh}{32}\frac{\mathrm{Sh}^2\pi}{\pi}\cdot 0{,}755,$$

откуда для P_1 получаем:

$$P_1=0{,}451\frac{Eh}{a^2}$$

и

$$P\approx P_0+P_1\lambda^2=\frac{\pi^2h^3E}{12(1-\sigma^2)a^2}+0{,}451\frac{Eh\lambda^2}{a^2}. \qquad (22)$$

Что касается величины λ, то в первом приближении ее можно считать равной наибольшему прогибу пластинки.

ZUM PROBLEM DER PLATTENSTABILITÄT

Von *P. Polubarinova-Kotschina* (*Leningrad*)

(Zusammenfassung)

Ist eine Platte gegeben, deren Durchbiegungen w gross, das heisst vergleichbar mit der Dicke, aber klein im Vergleich mit den Kanten der Platte $2a$ und $2b$ sind, so lauten die Gleichgewichtsgleichungen der Platte (ohne senkrechte Belastung) wie (3) und (4). Hier ist φ die Spannungsfunktion, E — Elastizitätsmodul, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — Biegungssteifigkeit, σ — Poissonsche Konstante. Man sucht die Lösung dieses Systems in der Form der Reihen (5) und (6), wo λ ein Parameter ist. Dann ist der Wert der entsprechenden Druckkraft P auch in der Form der Reihe (7) darstellbar. Die ersten Glieder dieser Entwicklung bestimmt man nach den Formeln (14) und (21), wobei C_n und D_m die Lösungen des Systems (19) sind.