ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

# О РАБОТЕ П. Ф. ПАПКОВИЧА „ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ОСНОВНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ“[1]

*Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн (Одесса)*

В виду упоминания о работе П. Ф. Папковича „Об одной форме основных диференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов“, которое имеется в рецензии Л. Лойцянского и А. Лурье[2] на книгу „Механика за 15 лет в СССР“, считаем нужным отметить, что П. Ф. Папкович допустил в своей работе ошибку, лишающую работу ее предполагавшегося значения.

Рассматривая диференциальные уравнения малых колебаний материальной системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial q_k'}+\frac{\partial V}{\partial q_k}=Q_k \quad (k=1, 2, \ldots, m),$$

где живая сила $T$, потенциальная энергия $V$ и функция рассеяния $\Phi$ определяются равенствами:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}q_i'q_k', \quad \Phi=\frac{1}{2}\sum B_{ik}q_i'q_k', \quad V=\frac{1}{2}\sum C_{ik}q_iq_k$$

$$(A_{ik}=A_{ki}, \quad B_{ik}=B_{ki}, \quad C_{ik}=C_{ki} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots, m),$$

автор составляет две квадратичные формы (каждая от $2m$ переменных $q_k$ и $r_k=q_k'$)

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{m}\{A_{ik}r_ir_k-C_{ik}q_iq_k\}$$

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{m}\{B_{ik}r_ir_k+C_{ik}(r_iq_k+r_kq_i)\},$$

---

[1] Изв. Лен. политехн. ин-та, т. 32, стр. 25—38, 1929.

[2] Прикл. мат. и мех., т. I, вып. 1, стр. 148. Ленинград 1933.

с помощью которых он записывает диференциальные уравнения колебаний в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r_k}\right)+\frac{\partial W}{\partial r_k}=Q_k \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial W}{\partial q_k}=0 \end{aligned}\right\} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Далее автор рассматривает подстановки

$$\left.\begin{aligned} q_k=\sum_{j=1}^{m} V_{kj}p_j \qquad (12) \\ r_k=\sum_{j=1}^{m} \mu_{kj}p_j \qquad (13) \end{aligned}\right\} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и пишет:

„2°. Подстановки (12) и (13) можно всегда подобрать так, чтобы функции $L$ и $W$ были освобождены от произведений различных переменных вида $p_i p_j$".

Между тем, известно, что если две данные квадратичные формы обе являются неопределенными, то не всегда возможно линейным преобразованием переменных освободить одновременно эти формы от членов, содержащих произведения разных переменных.

Однако можно было бы думать, что для форм $L$ и $W$ ввиду их специального характера это предложение имеет место. Следующий пример разубеждает нас в этом.

Пусть

$$T=\frac{1}{2}(q_1'^2+q_2'^2), \quad \Phi=\frac{1}{2}(q_1'^2+3q_2'^2), \quad V=\frac{1}{2}(q_1^2+3q_2^2+2q_1q_2).$$

Легко видеть, что эти формы $T$, $\Phi$, $V$ никаким линейным преобразованиям переменных не могут быть одновременно все три освобождены от произведений разных переменных.

Диференциальные уравнения свободных колебаний в этом случае принимают такой вид:

$$\begin{aligned} q_1''+q_1'+q_1+q_2=0 \\ q_2''+3q_2'+q_1+3q_2=0. \end{aligned}$$

Эта система диференциальных уравнений имеет такое частное решение:

$$q_1=te^{-t}, \quad q_2=e^{-t}-te^{-t},$$

чего не могло бы быть, если бы для рассматриваемого примера существовало преобразование переменных, предлагаемое П. Ф. Папковичем.

Таким образом, процитированное выше утверждение, на котором П. Ф. Папкович строит все свои дальнейшие выводы, является неверным.

Рассуждения автора остаются, однако, в силе, если ограничиться случаем, когда все элементарные делители матрицы

$$\| A_{ik}\alpha^2+B_{ik}\alpha+C_{ik} \| \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

простые.

Но в этом случае преобразование переменных, предложенное П. Ф. Папковичем, является излишним, ибо каждому корню $\alpha_i$ кратности $r_i$ характеристического уравнения

$$|A_{ik}\alpha^2+B_{ik}\alpha+C_{ik}|=0 \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

соответствуют $r_i$ линейно независимых частных решений вида

$$V_{1j}e^{\alpha_i t},\quad V_{2j}e^{\alpha_i t},\quad \ldots,\quad V_{mj}e^{\alpha_i t} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r_i),$$

где числа $V_{1j},\ V_{2j},\ \ldots,\ V_{mj}$ определяются из такой системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}(A_{sk}\alpha_i^2+B_{sk}\alpha_i+C_{sk})\,V_{kj}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{25}$$

с матрицей коэфициентов ранга $m-r_i$.

Интересно отметить, что если бы форма $V$ была отрицательно определенной, а $T$ — положительно определенной, то формы $L$ и $W$ можно было бы одновременно освободить от произведения разных переменных. К сожалению, этот случай не представляет интереса для механики материальной системы.

## НЕСКОЛЬКО СЛОВ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ М. Г. КРЕЙНА И Ф. Р. ГАНТМАХЕРА

*П. Ф. Папкович (Ленинград)*

Я должен признать, что действительно сделал ошибку, полагая, что в общий интеграл малых свободных колебаний системы, не имеющей гироскопических членов, время $t$ вне знака показательных функций не входит. Это лишает мои рассуждения общности, но, конечно, не всего их значения.

Все рассуждения моей статьи, к которой мои оппоненты относятся столь пренебрежительно, целиком применимы к исследованию всех простейших малых колебаний системы, кроме тех, в общий интеграл которых при движении системы по инерции время входит вне знака показательных функций. Я думал, что у систем без гироскопических членов такие случаи вообще невозможны. Как показали мои оппоненты, такие случаи могут иметь место, но только когда характеристический определитель имеет кратные корни, и при этом далеко не всегда, когда он таковые имеет. Таким образом мои рассуждения следует признать применимыми к исследованию громадного большинства всех простейших колебаний системы, а не всех, как я первоначально ошибочно принял. В некоторых исключительных случаях к исследованию некоторых простейших колебаний требуется специальный подход.

Путем дальнейшего обобщения понятия о главных координатах можно показать, что понятие это может облегчить исследование простейших колебаний системы даже и в этих специальных частных случаях. Я этого не сделал, так как вообще не заметил этих случаев. Мои оппоненты этого тоже, к сожалению, не сделали, повидимому не видя в этом смысла и надобности. Для них, повидимому, задача вообще кончается составлением уравнений типа уравнений (25), ибо только при таком их понимании можно вообще понять фразу о том, что предложенное мною преобразование переменных излишне, раз уравнения (25) могут быть получены и без него.

Я вводил это преобразование переменных, конечно, не для того, чтобы вывести формулы (25), и выводом формул (25), конечно, решение ни одной практической задачи не кончается. Целью моей было физически осмыслить весь дальнейший ход решения задачи, и этой цели преобразование переменных, мною предложенное, достигает по отношению, как теперь выясняется, не ко всем, как я первоначально думал, а по отношению к громадному большинству колебаний, подлежащих рассмотрению. Я позволяю себе поэтому общую оценку моей статьи, данную моими оппонентами, считать слишком поспешной и полагаю, что все мои рассуждения следует не сдать в архив, как то предложено Крейном и Гантмахером, а продолжить и соответствующим образом дополнить.

Вообще, заметив в здании брешь, можно ее устранять не только путем расширения этой бреши до размеров всего сооружения, а путем заделки.