ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

К ЗАДАЧАМ О ВРАЩЕНИИ ВНУТРИ ЖИДКОСТИ И О КРУЧЕНИИ

Л. И. Седов (Москва)

Известно, [1] что разыскание плоского потенциального потока жидкости, находящейся вне или внутри вращающегося цилиндрического тела, и задача о кручении упругих цилиндров приводят к разысканию гармонической функции $\psi(x, y)$, в некоторой области $\mathfrak{D}$, на границе которой $\psi = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+\text{const}$. Область $\mathfrak{D}$ есть внешность или внутренность тела в плоскости сечения, перпендикулярного к образующим цилиндра.

Если известно конформное отображение области $\mathfrak{D}$ на внутренность круга, то решение этой задачи всегда можно написать с помощью интеграла Пуассона или бесконечного ряда. [2]

В предлагаемой заметке мы укажем на одно соображение, пользуясь которым, иногда можно значительно облегчить получение эффективных решений для этих задач.

Обозначим через $\varphi(x,y)$ гармоническую функцию, сопряженную с $\psi(x,y)$ Тогда

$$\varphi + i\psi = w(z),$$

где $z = x + iy$; $i^2 = -1$; $w(z)$ голоморфна внутри $\mathfrak{D}$.

Пусть $z = f(\zeta)$ [3]) есть функция, реализующая конформное отображение области $\mathfrak{D}$ на внутренность единичного круга K с центром в начале координат. Заменяя в $w(z)$ z через ζ, получим функцию $w(\zeta)$, голоморфную внутри K, на круге будем иметь:

$$\operatorname{Imag} w(\zeta) = \frac{i}{2} z\bar{z} + \text{const} = \frac{i}{2} f(\zeta)\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \text{const.}\ [4]$$

[1] С. А. Чаплыгин, О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. Труды ЦАГИ, вып. 19, стр. 9, 1926; H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, стр. 95, 1931; Love, The Mathem. Theorie of Elasticity, стр. 314, 1927.

К этой задаче же сводится разыскание ламинарного течения вязкой жидкости внутри цилиндрической трубы. См. Л. С. Лейбензон, Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 1, Москва 1931.

[2] Изложение этих способов решения содержится в книге Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Berlin, Springer, 1929.

[3] Мы рассматриваем случай, когда граница $\mathfrak{D}$ есть аналитическая кривая, следовательно $f(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta| = 1$.

[4] Здесь использованы следующие обозначения: $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$; если $f(\zeta) = \sum a_n\zeta^n$, то $\bar{f}(\zeta) = \sum \bar{a}_n\zeta^n$.

Пусть произведено разбиение функции $\frac{i}{2} f(\zeta) \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ на сумму из двух функций $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ так, что

$$\frac{i}{2} f(\zeta) \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta), \tag{1}$$

причем $f_1(\zeta)$ голоморфна везде внутри K, а $f_2(\zeta)$ голоморфна везде вне K.

Докажем, что

$$w(\zeta) = 2f_1(\zeta), \tag{2}$$

т. е. решение поставленной задачи сводится к указанному разбиению.

В самом деле: при $|\zeta| = 1$ справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Reel} f_1(\zeta) = -\operatorname{Reel} f_2(\zeta) = -\operatorname{Reel} \bar{f}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{3}$$

$$\operatorname{Imag} f_2(\zeta) = -\operatorname{Imag} \bar{f}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{4}$$

Функции $f_1(\zeta)$ и $-f_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ голоморфны внутри K и по (3) их действительные части равны на круге. Следовательно, во всей плоскости ζ справедливо равенство [1]

$$f_1(\zeta) = -\bar{f}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) + q, \tag{5}$$

где q — чисто мнимая константа.

В силу соотношений (4) и (5) очевидно, что при $|\zeta| = 1$

$$\operatorname{Imag} f_1(\zeta) = \operatorname{Imag} f_2(\zeta) + q.$$

Таким образом, функция $2f_1(\zeta) - q$ голоморфна внутри K и при $|\zeta| = 1$ мнимая часть ее равна $\frac{i}{2} f(\zeta) \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, поэтому будем иметь:

$$w(\zeta) = 2f_1(\zeta).$$

Аддитивную постоянную можно откинуть, так как она несущественна.

Требуемое разбиение особенно удобно производить, когда $f(\zeta)$ рациональная функция. Очевидно, $w(\zeta)$ в этом случае есть также рациональная функция.

Если $f(\zeta)$ полином, т. е.

$$f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n,$$

то

$$\begin{aligned} w(\zeta) = i\,[\bar{a}_1 (a_2\zeta + a_3\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^{n-1}) &+ \\ + \bar{a}_2 (a_3\zeta + a_4\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^{n-2}) &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + \bar{a}_{n-1} a_n \zeta], & \end{aligned}$$

следовательно в этом случае $w(\zeta)$ есть тоже полином.

[1] См. Hurwitz-Courant, стр. 323.

Если граница $\mathfrak{D}$ такова, что область $\mathfrak{D}$ не отображается с помощью полинома на круг, то всегда граничный контур можно сколь угодно мало (практически незаметно) изменить так, чтобы измененная область $\mathfrak{D}'$ отображалась на круг конформно с помощью полинома достаточно высокой степени [1] или с помощью рациональной функции. Это позволит получить решения для практических задач в конечном виде.

Примеры

1) Найдем $w(\zeta)$ для задачи о вращении с единичной угловой скоростью эллиптического цилиндра с полуосями a и b внутри бесконечной жидкости. [2]

Внешность эллипса в плоскости z отображается конформно на внутренность единичного круга в плоскости ζ с помощью функции

$$z = f(\zeta) = \frac{1}{2}\left[(a-b)\zeta + (a+b)\frac{1}{\zeta}\right],$$

откуда

$$\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left[(a-b)\frac{1}{\zeta} + (a+b)\zeta\right].$$

На основании (1) и (2) немедленно получаем:

$$w(\zeta) = \frac{i}{4}(a^2 - b^2)\zeta^2.$$

Если вращение происходит с угловой скоростью ω, то

$$w(\zeta) = \frac{i\omega}{4}(a^2 - b^2)\zeta^2.$$

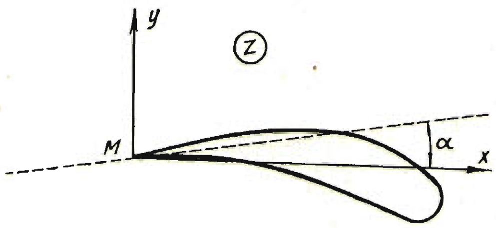

Рис. 1.

1) Рассмотрим задачу о вращении цилиндрического крыла, ограниченного инверсией параболы, [3] внутри бесконечной жидкости.

Пусть вращение происходит около острой кромки M, куда помещаем также начало координат (рис. 1). Внешность крыла отображается на внутренность единичного круга с помощью функции

$$z = f(\zeta) = -\frac{aR}{2}\left[\frac{1}{\zeta} + (\mu - 2) + (1-\mu)^2\frac{\zeta}{1-\mu\zeta}\right],$$

где $a, R > 1$, — действительные положительные постоянные; $\mu = 1 - \frac{e^{-i\alpha}}{R}$; $|\mu| < 1$; a определяет масштаб; R и α — параметры, от которых зависит толщина и вогнутость крыла. В плоскости z ось x параллельна первой оси крыла. При поступательном движении вдоль оси x возможно бесциркуляционное потенциальное обтекание с конечной скоростью у острия.

[1] В конкретных примерах приближенного решения можно использовать соображения, развитые Л. В. Канторовичем в его работе „О конформном отображении", Матем. сборник, т. 40, вып. 3, 1933.

[2] В цитированной работе С. А. Чаплыгин решает эту задачу, вычисляя интеграл Пуассона (см. стр. 23).

[3] Это крыло общеизвестно под названием крыла Жуковского.

Имеем:

$$i\omega f(\zeta)\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=$$

$$=\frac{i\omega a^2R^2}{4}\left[\frac{1}{\zeta}+(\mu-2)+(1-\mu)^2\frac{\zeta}{1-\mu\zeta}\right]\left[\zeta+(\overline{\mu}-2)+(1-\overline{\mu})^2\frac{1}{\zeta-\overline{\mu}}\right].$$

Произведя перемножение и отбрасывая члены, имеющие полюса внутри круга и голоморфные вне круга, найдем:

$$w(\zeta)=\frac{i\omega a^2R^2}{4}\,\frac{\zeta}{1-\mu\zeta}\left[\zeta+(\mu-2)+\frac{(1-\mu)^2(\mu+\overline{\mu}-2)}{1-\mu\overline{\mu}}\right].$$

Очевидно этим способом легко можно находить движение жидкости при вращении крыльев более общего типа, например крыльев Mises'a.

BEITRAG ZU DEN AUFGABEN ÜBER DREHUNG INNERHALB EINER FLÜSSIGKEIT UND ÜBER TORSION

Zusammenfassung

L. Sedov (Moska)

Wir betrachten die Aufgabe der Bestimmung der Funktion

$$w(z)=\varphi+i\psi \qquad (z=x+iy)$$

die holomorph im Innern eines durch eine analytische Kurve begrenzen Gebietes $\mathfrak{D}$ ist, wobei an der Grenze $\mathfrak{D}$ die Bedingung $\psi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\text{const}$ erfüllt ist.

Es sei $z=f(\zeta)$ die Funktion, welche die konforme Abbildung des Gebietes $\mathfrak{D}$ auf des Innere eines Einheitskreises liefert. Für die Bestimmung von $w(\zeta)$ bei $|\zeta|=1$, haben wir die Bedingung:

$$\text{Imag}\, w(\zeta)=\frac{i}{2}z\overline{z}+\text{const}=\frac{i}{2}f(\zeta)\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\text{const}.$$

Wir beweisen, dass

$$w(\zeta)=2f_1(\zeta),$$

wo $f_1(\zeta)$ aus der Beziehung

$$\frac{i}{2}f(\zeta)\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta)$$

bestimmt wird. Dabei: $f_1(\zeta)$ ist holomorph innerhalb des Einheitskreises und $f_2(\zeta)$ ausserhalb des Einheitskreises. An den Beispielen sind die Vereinfachungen gezeigt die durch diese Bemerkung erzielt werden können.