ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ III 1936 № 1

МЕЛКИЕ ЗАМЕТКИ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. М. Шепелев[1] (*Москва*)

Как известно, вопрос об устойчивости движения динамической системы с двумя степенями свободы, при довольно общих условиях, сводится к вопросу об ограниченности, при всех значениях $x > 0$, интегралов следующего линейного диференциального уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,y = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$ есть заданная функция независимой переменной x, определенная при всех значениях $x > 0$.

В настоящей заметке мы показываем, что интегралы уравнения (1) будут ограничены, если функция $p(x)$ будет удовлетворять следующим двум условиям: 1) $0 < a^2 \leqslant p(x)$, где a — положительная константа, и 2) $p(x)$ есть функция с ограниченным изменением при $x > 0$, т. е. существует положительная константа M, такая, что для любой системы значений x, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |p(x_{i+1}) - p(x_i)| < M.$$ [2]

Кроме того, в конце заметки мы дает геометрический прием для построения функций $p(x)$, удовлетворяющих первому из отмеченных условий, но для которых интегралы уравнения (1) не будут ограничены.

1. *Вспомогательные предложения.* Вывод признака устойчивости и конструкция примера основаны на двух элементарных леммах, с доказательства которых мы и начнем.

---

[1] Излагаемые ниже результаты были получены совместно с М. А. Лаврентьевым.

[2] Этот критерий является обобщением критерия, данного Н. Е. Жуковским (Математический сборник, т. 14, вып. 3, стр. 588, 1898). Н. Е. Жуковский показал, что интегралы уравнения (1) будут ограничены, если функция $p(x)$ будет удовлетворять следующим двум условиям: 1) $p(x) \geqslant a^2$, 2) $p(x)$ при $x > 0$ имеет конечное число максимумов и минимумов. Наш результат был доложен на заседании Московского НИИ математики и механики в январе 1927 г.

Лемма 1. Пусть функция $p(x)$ определяется следующими условиями:

$$p(x)=a^2 \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x < x_0+\frac{\pi}{2a}$$

$$p(x)=b^2 \quad \text{при} \quad x_0+\frac{\pi}{2a} \leqslant x \leqslant x_0+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=x_1,$$

где x_0, a и b произвольные положительные числа. Обозначим через $y=y(x)$ интеграл уравнения (1), удовлетворяющий следующим начальным условиям:

$$y(x_0)=0 \quad y'(x_0)=k.$$

При этих обозначениях будем иметь:

$$y(x_1)=0, \quad y^1(x_1)=-\frac{b}{a}k$$

$$\underset{x_0 \leqslant x \leqslant x_1}{\text{Max}} |y(x)|=\frac{|k|}{a}$$

Доказательство. Не нарушая общности результата, очевидно можем считать $x_0=0$; тогда получим:

$$x_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Изучаемый интеграл примет вид:

$$y(x)=\frac{k}{a}\sin ax \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2a}$$

$$y(x)=\frac{k}{a}\cos b\left(x-\frac{\pi}{2a}\right) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2a} \leqslant x \leqslant x_1.$$

Отсюда:

$$y(x_1)=\frac{k}{a}\cos\frac{\pi}{2}=0, \quad y'(x_1)=-\frac{b}{a}k$$

$$\underset{x_0 \leqslant x \leqslant x_1}{\text{Max}} |y(x)|=\left|y\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right|=\frac{|k|}{a}.$$

Лемма 2. Пусть функция $p(x)$ есть функция с ограниченным изменением; пусть кроме того:

$$a^2 \leqslant p(x) \leqslant b^2. \tag{2}$$

Обозначим через $y=y(x)$ интеграл уравнения (1), удовлетворяющий начальным условиям:

$$y(x_0)=0 \quad \text{и} \quad y'(x_0)=k.$$

Пусть $x_1>x_0$ есть корень уравнения $y(x)=0$, следующий за корнем x_0. При этих условиях имеем:

$$\frac{|k|}{b} \leqslant \underset{x_0 \leqslant x \leqslant x_1}{\text{Max}} |y(x)| \leqslant \frac{|k|}{a}, \tag{3}$$

$$|y'(x)| \leqslant \frac{b}{a} \cdot |k|. \tag{4}$$

Доказательство. Начнем с доказательства неравенства (3). Для этой цели введем два вспомогательных диференциальных уравнения:

$$y'' + a^2 y = 0$$
$$y'' + b^2 y = 0$$

и построим для каждого из них интеграл, удовлетворяющий тем же начальным условиям, которым удовлетворяет изучаемый интеграл $y = y(x)$.

Искомые интегралы будут соответственно:

$$y = \frac{k}{a} \sin a(x - x_0) \tag{5}$$

$$y = \frac{k}{a} \sin b(x - x_0). \tag{6}$$

В силу условия (2) и известных свойств однородных линейных уравнений второго порядка, кривая $y = y(x)$ при $x_0 < x < x_1$ будет принадлежать области, ограниченной кривой (5) и осью x-ов. Отсюда, замечая, что

$$\left| \frac{k}{a} \sin a(x - x_0) \right| \leqslant \frac{|k|}{a},$$

получаем правую часть неравенства (3).

Аналогично, кривая (6) при $x_0 < x < x_0 + \frac{\pi}{b}$ будет принадлежать области, ограниченной кривой $y = y(x)$ и осью x-ов. Отсюда получаем левую часть неравенства (3).

Заметим, что неравенство (3) распространяется также на случай, когда x_1 будет корнем уравнения $y(x) = 0$, предшествующим корню x_0; в этом случае неравенство (3) примет вид

$$\frac{|k|}{b} \leqslant \underset{x_1 \leqslant x \leqslant x_0}{\mathrm{Max}} |y(x)| \leqslant \frac{|k|}{a}. \tag{3'}$$

Перейдем к доказательству неравенства (4). Допустим от противного, что

$$|y'(x_1)| > \frac{b}{a} |k|;$$

но в таком случае, применяя к интегралу $y = y(x)$ левую часть неравенства (3′), получим:

$$\underset{x_0 \leqslant x \leqslant x_1}{\mathrm{Max}} |y(x)| > \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} |k| > \frac{|k|}{a},$$

что противоречит второй части неравенства (3).

2. *Критерий устойчивости.* Приведем еще раз формулировку критерия.

Т е о р е м а. Если функция $p(x)$ есть функция с ограниченным изменением на всей положительной полуоси и если $p(x) \geqslant a^2 > 0$, то все интегралы уравнения (1) при $x > 0$ ограничены.

Доказательство. Пусть $y = y(x)$ есть произвольный интеграл уравнения (1) и пусть

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

где

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots,$$

суть все нули этого интеграла при $x > 0$. Положим:

$$a_n^2 = \min_{x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n} p(x)$$

$$b_n^2 = \operatorname{Max}_{x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n} p(x).$$

Из условий теоремы имеем: $a_n > a$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Так как по условию $p(x)$ есть функция с ограниченным изменением на всей положительной полуоси, то отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2)$ есть ряд сходящийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) < \infty. \tag{5}$$

Покажем теперь, что числовая последовательность $|y'(x_n)|$ ограничена. В самом деле, в силу леммы 2 имеем:

$$|y'(x_n)| \leqslant \frac{b_n}{a_n} |y'(x_{n-1})|.$$

Следовательно, полагая $|y'(x_0)| = k$, получим:

$$|y'(x_n)| \leqslant k \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdots \frac{b_n}{a_n}.$$

Этим самым наша задача приводится к доказательству сходимости бесконечного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{b_n - a_n}{a_n}\right)$$

или, что то же самое, к доказательству сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{a_n}.$$

В силу неравенств $a_n > a$ и (5) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 - a_n^2}{a_n(b_n + a_n)} < \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 - a_n^2) < \infty.$$

Отсюда, принимая во внимание (5), заключаем, что существует константа K, для которой при любом n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ имеем:

$$|y'(x_n)| < K;$$

но в таком случае, применяя неравенство (3) леммы 2, при любом n будем иметь:

$$\operatorname{Max}_{x_n < x < x_{n+1}} |y(x)| \leqslant \frac{K}{a} = M,$$

ч. и т. д.

3. *Пример неустойчивости.* В приведенном критерии устойчивости мы имеем два условия существенно различной природы: 1) $p(x) > a^2$ и 2) функция $p(x)$ есть функция с ограниченным изменением. Отсюда естественно воз-

никает вопрос: нельзя ли, не нарушая результата, одно из отмеченных условий заменить условием менее жестким? Для периодических $p(x)$ Ляпунов показал, что первого [1] условия для устойчивости не достаточно. Мы сейчас приведем пример функции $p(x)$, стремящейся, при неограниченном возрастании x, к определенному пределу, функции, для которой интегралы уравнения (1) будут неограничены. [2]

Для этой цели построим последовательность чисел

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

определенных следующим условием:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right).$$

Положим:

$$p(x) = 1 \quad \text{при} \quad x_{n-1} \leqslant x < x_{n-1} + \frac{\pi}{2}$$

$$p(x) = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad x_{n-1} + \frac{\pi}{2} \leqslant x < x_n$$

и покажем, что $p(x)$ есть искомая функция. В самом деле, каждому из двух отмеченных выше условий ($p(x) > a^2$, $\lim p(x) = a^2$) построенная функция удовлетворяет. Нам остается показать, что при построенной функции $p(x)$ уравнение (1) имеет неограниченный интеграл. Рассмотрим интегральную кривую $y = y(x)$, выходящую из начала координат. Пусть $y'(0) = k > 0$, в таком случае, применяя лемму 1, получим:

$$|y'(x_n)| = k \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\max_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)| = k \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Так как правая часть последнего равенства при n, стремящемся в бесконечность, стремится тоже в бесконечность, то отсюда заключаем, что рассматриваемый интеграл не ограничен.

Приведенный нами пример функции $p(x)$ может показаться несколько искусственным; заметим, что, несущественно меняя данную выше конструкцию, можно построить функцию $p(x)$, аналитическую вдоль действительной оси, удовлетворяющую каждому из условий $p(x) > a^2$ и $\lim p(x) = a^2$, функцию, для которой интегралы уравнения (1) также не будут ограничены.

Столь же элементарными конструкциями можно показать, что невозможно также существенно ослабить первое условие ($p(x) \geqslant a^2$).

Поступила 1. II. 1934.

[1] Общая задача об устойчивости движения, стр. 189, Харьков 1892.

[2] В цитированной на стр. 144 работе Н. Е. Жуковский высказал уверенность в том, что при этих условиях интегралы будут всегда ограничены.

ZUR FRAGE DER STABILITÄT DER BEWEGUNG

Zusammenfassung

V. M. Chepeleff (*Moskau*)

Wie bekannt, lässt sich die Frage der Stabilität der Trajektorie der Bewegung eines dynamischen Systems mit zwei Freiheitsgraden bei genügend allgemeinen Bedingungen auf die Frage zurückführen ob die Integrale folgender linearen Differentialgleichung für alle Werte $x > 0$ beschränkt bleiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,y = 0 \tag{1}$$

wobei $p(x)$ eine vorgegebene für alle Werte $x > 0$ definierte Funktion der unabhängigen Veränderlichen x ist.

In dieser Note zeigen wir, dass die Integrale der Gleichungen (1) beschränkt sind, wenn die Funktion $p(x)$ folgenden Bedingungen genugt: 1) $0 < a^2 \leqslant p(x)$, wobei a eine positive Konstante, und 2) $p(x)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung für $x > 0$ ist, das heisst es existiert eine Konstante M, so dass für jedes Wertsystem von x: $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_h$, die Ungleichüng erfüllt ist:

$$\sum_{i=1}^{h-1} |p(x_{i+1}) - p(x_i)| < M.$$

Ausserdem geben wir am Ende der Note ein geometrisches Verfahren an zur Konstruktion von Funktionen $p(x)$, welche die erste der erwähnten Bedingungen erfüllen, die Integrale der Gleichung (1) aber nicht beschränkt sind.