О МЕТОДЕ КОУЭЛЛА

Ф. В. Флоринский (Днепропетровск)

Настоящая небольшая работа посвящается разработке метода Коуэлла — метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, сравнительно мало известного у нас,[1] который между тем может и должен занять одно из основных мест в технических вычислениях.

Под „методом Коуэлла", в тесном смысле этого выражения, подразумевается метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, который Коуэлл (Kowell) применял для вычисления орбиты кометы Галлея. В настоящей работе рассматривается, помимо уравнений второго порядка, перенесение этого метода и на интегрирование уравнений первого порядка. В дальнейшем мы надеемся разобрать этот метод и в приложении к уравнениям высших порядков.

§ 1. Рассмотрим сначала этот метод в применении к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Пусть дано уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

и начальные условия: $x=x_0$ и $y=y_0$.

Зададимся величиной промежутка между двумя последовательными значениями независимого переменного:

$$h=x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}.$$

Задачу ставим так: зная x_n и y_n, определить значение y_{n-1}, т. е. значение y, соответствующее $n+1$-ому значению x.

§ 2. Выведем общее выражение для вычисления y_{n+1}. В основу положим известную интерполяционную формулу:

$$y=y_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots, \tag{1}$$

которую перепишем так:

$$y_{n+k}=y_n+a_1(kh)+a_2(kh)^2+a_3(kh)^3+\ldots; \tag{2}$$

тут $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — постоянные коэффициенты, а $x=kh$ — значение аргумента, которому соответствует y_{n+k} значение функции.

Продифференцировав уравнение (2) по x, мы получим выражение для правой части нашего уравнения:

$$f_{n+k}=a_1+2a_2(kh)+3a_3(kh)^2+4a_4(kh)^3+5a_5(kh)^4+6a_6(kh)^5+ 7a_7(kh)^6+\ldots \tag{3}$$

[1] См. Баев. О методе Коуэлла. „Известия Русского Астрономического О-ва" за 1912—1913 г. (вып. XVIII).

Далее, из формулы (2) подставляя соответственно:

$k=1$ и $k=-1$, получим:

$$y_{n+1}=y_n+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+a_4h^4+a_5h^5+a_6h^6+a_7h^7, \tag{4}$$

$$y_{n-1}=y_n-a_1h+a_2h^2-a_3h^3+a_4h^4-a_5h^5+a_6h^6-a_7h^7 \tag{5}$$

и, подставляя в формулу (3) $k=-1, 0, 1, 2, 3,$

$$f_{n-1}=a_1-2a_2h+3a_3h^2-4a_4h^3+5a_5h^4-6a_6h^5+7a_6h^7, \tag{6}$$

$$f_n=a_1, \tag{7}$$

$$f_{n+1}=a_1+2a_2h+3a_3h^2+4a_4h^3+5a_5h^4+6a_6h^5+7a_7h^6, \tag{8}$$

$$f_{n+2}=a_1+4\,a_2h+12\,a_3h^2+32\,a_4h^3+80\,a_5h^4+192\,a_6h^5+448\,a_7h^6, \tag{9}$$

$$f_{n+3}=a_1+6a_2h+27a_3h^2+108a_4h^3+405a_5h^4+1458a_6h^5+5103a_7h^6, \tag{10}$$

$$f_{n+4}=a_1+8a_2h+48a_3h^2+256a_4h^3+1280a_5h^4+6144a_6h^5+28\,672a_7h^6, \tag{11}$$

$$f_{n+5}=a_1+10a_2h+75a_3h^2+500a_4h^3+3125a_5h^4+18\,750a_6h^5+ \\ +109\,375a_7h^6, \tag{12}$$

$$f_{n+6}=a_1+12a_2h+108a_3h^2+864a_4h^3+6480a_5h^4+46\,656a_6h^5+ \\ +326\,592a_7h^6, \tag{13}$$

$$f_{n+7}=a_1+14a_2h+147a_3h^2+1372a_4h^3+12\,005a_5h^4+100\,842a_6h^5+ \\ +823\,543a_7h^6, \tag{14}$$

Разность между двумя последовательными значениями производной f будем обозначать:

$$\Delta f_n=f_{n+1}-f_n$$

и называть „первою разностью"; точно также „вторая" разность:

$$\Delta^2 f_n=\Delta f_n-\Delta f_{n-1}=f_{n+1}-2f_n+f_{n-1};$$

„четвертая":

$$\Delta^4 f_{n-1}=\Delta^3 f_n-\Delta^3 f_{n-1}=f_{n+3}-4f_{n+2}+6f_{n+1}-4f_n+f_{n-1}$$

и т. д.; подставляя в последние выражения $f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, \ldots$ из формул (6—14), мы получим следующие значения разностей:

$$\Delta^2 f_{n-1}=6a_3h^2+10a_5h^4+14a_7h^6, \tag{15}$$

$$\Delta^4 f_{n-1}=120a_5h^4+720a_6h^5+3360a_7h^6, \tag{16}$$

$$\Delta^5 f_{n-1}=720a_6h^5+7560a_7h^6, \tag{17}$$

$$\Delta^6 f_{n-1}=5040a_7h^6, \tag{18}$$

остальными членами пренебрегаем.

Из формул (4—5):

$$y_{n+1}-y_{n-1}=2a_1h+2a_3h^3+2a_5h^5+2a_7h^7. \tag{19}$$

Из формул (7, 15—18):

$$2hf_n=2a_1h$$

$$\frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1}=2a_3\,h^3+3\frac{1}{3}\,a_5\,h^5+4\frac{2}{3}\,a_7\,h^7,$$

$$\frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1}=1\frac{1}{3}\,a_5\,h^5+8a_6\,h^6+37\frac{1}{3}\,a_7\,h^7,$$

$$\frac{h}{90}\Delta^5 f_{n-1}=8a_6\,h^6+84a_7\,h^7,$$

$$\frac{37}{3780}h\Delta^6 f_{n-1}=49\frac{1}{3}\,a_7\,h^7.$$

Таким образом:

$$2hf_n + \frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1} - \frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1} + \frac{h}{90}\Delta^5 f_{n-1} - \frac{37}{3780} h\Delta^6 f_{n-1} =$$

$$= 2a_1 h + 2a_3 h^3 + 2a_5 h^5 + 2a_7 h^7 = y_{n+1} - y_{n-1} \text{ (см. формулу 19)},$$

откуда:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n + \frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1} - \frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1} + \frac{h}{90}\Delta^5 f_{n-1} - \frac{37h}{3780}\Delta^6 f_{n-1}. \quad (20)$$

Это и есть формула для численного интегрирования уравнений первого порядка.

При выводе выражения для интегрирования уравнений второго порядка Коуэлл в целях упрощения формулы, в виду незначительной величины разностей $\Delta^5 f_{n-1}$ и $\Delta^4 f_{n-1}$, считает их равными.

Такое допущение сделаем мы и для уравнений первого порядка. Тогда:

$$\frac{h}{90}\Delta^5 f_{n-1} - \frac{37h}{3780}\Delta^6 f_{n-1} \approx \frac{h}{90}\Delta^6 f_{n-1} - \frac{37h}{3780}\Delta^6 f_{n-1} = \frac{h\Delta^6 f_{n-1}}{756},$$

и формула (20) примет вид:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n + \frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1} - \frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1} + \frac{h}{756}\Delta^6 f_{n-1}. \quad (21)$$

Вследствие малости разностей $\Delta^5 f_{n-1}$ и $\Delta^6 f_{n-1}$ формула (21) практически дает результаты той же степени точности, что и выражение (20). Но формула (21) более удобна для пользования, нежели (20), в виду более быстрой сходимости.

§ 3. Процесс интегрирования располагается следующим образом. Пусть дано уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и начальные условия: $x = x_0$ и $y = y_0$.

Задаемся величиной промежутка h и вычисляем y_1, соответствующее: $x_1 = x_0 + h$. Для вычисления y_1 существует много способов. Один из простейших — вычисление при помощи ряда Тейлора. Составляем таблицу (см. табл. I), куда заносим имеющиеся и вычисленные значения.

Таблица 1

№	x	y	$f=y^1$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
0	x_0	y_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$	$\Delta^6 f_0$
1	x_1	y_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	$\Delta^5 f_1$	$\Delta^6 f_1$
2	x_2	y_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$	$\Delta^5 f_2$	$\Delta^6 f_2$
3	x_3	y_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^3 f_3$	$\Delta^4 f_3$	$\Delta^5 f_3$	
4	x_4	y_4	f_4	Δf_4	$\Delta^2 f_4$	$\Delta^3 f_4$	$\Delta^4 f_4$		
5	x_5	y_5	f_5	Δf_5	$\Delta^2 f_5$	$\Delta^3 f_5$			
6	x_6	y_6	f_6	Δf_6	$\Delta^2 f_6$				
7	x_7	y_7	f_7	Δf_7					
8	x_8	y_8	f_8						

Величины: f_0, f_1, Δf_0 вычисляются непосредственно, что же касается разностей $\Delta^2 f_0$, $\Delta^4 f_0$, $\Delta^6 f_0$ входящих в формулу (21), то их у нас нет и их придется для вычисления y_2 „угадывать".

Если точность наших вычислений позволяет нам ограничиться второй разностью, то для возможности продолжать интегрирование по методу Коуэлла, достаточно предварительно вычислить (напр. по формуле Тейлора) только одно значение функции: y_1, соответствующее $x_1 = x_0 + h$. Для вычисления y_2 можно сразу воспользоваться формулой (21), „угадывая" $\Delta^2 f_0$. Это „угадывание" производится довольно просто. В процессе интегрирования мы подмечаем закон изменения второй разности $\Delta^2 f_{n-1}$, так что ориентировочная величина ее, близко подходящая к действительному значению, нам будет всегда известна.

Опасность искажения точности результата в случае неудачного „угадывания" здесь совершенно исключается благодаря непрерывному контролю „угадывания", позволяющему обнаруживать даже небольшие отклонения. Так, „угадав" $\Delta^2 f_{n-1}$ и вычислив y_{n+1}, мы находим f_{n+1}, Δf_n и определяем $\Delta^2 f_{n-1} = \Delta f_n - \Delta f_{n-1}$. В случае значительного отклонения „угаданного" значения разности от вычисленного нужно сделать пересчет. Для начала, в большинстве случаев, можно положить $\Delta^2 f_0 = 0$.

Если точность наших вычислений требует наличия, напр. четвертой разности, предварительно следует вычислить y_1, y_2 и y_3 (напр. по формуле Тейлора или последовательным приближением) и затем „угадывать" четвертые разности и т. д.

§ **4.** Сравним теперь метод Коуэлла с другими методами численного интегрирования, в первую очередь с лучшим из остальных — методом Адамса—Штёрмера.[1]

Преимущества метода Коуэлла перед методом Штёрмера заключается, во-первых, в том, что выражение (21) представляет собою более быстро сходящийся ряд, чем формула Штёрмера:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{2} h\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} h\Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8} h\Delta^3 f_{n-3} + \\ + \frac{251}{720} h\Delta^4 f_{n-4} + \frac{95}{288} h\Delta^5 f_{n-5} + \frac{19087}{60480} h\Delta^6 f_{n-6}. \tag{22}$$

С другой стороны, чтобы иметь возможность продолжать вычисления по формуле (21), требуется меньшее число предварительных точек, чем требует формула (22). Уменьшение числа предварительных точек является ощутимым преимуществом, так как эти точки нужно находить при помощи других методов, что бывает иногда очень затруднительно по всей громоздкости.

Преимущества метода Коуэлла перед другими (Рунге, Эйлера, Коши и др.) в значительно упрощенной и более быстрой вычислительной работе при достижении весьма значительной степени точности.

Существенным недостатком метода является необходимость „угадывать" разности высших порядков, но этот недостаток больших затруднений на практике не вызывает.

§ **5.** В процессе интегрирования может получится, что откидываемые разности, незначительные в начале, увеличатся по абсолютной

[1] А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. Акад. Наук СССР, 1933 г.

величине настолько, что станут оказывать влияние на точность результата. В таком случае следует добавлять соответствующие члены в формуле (21) и (22), или уменьшить величину интервала h.

Удлинение формул не всегда бывает желательным, так как вычисление делается более громоздким. Уменьшение же промежутка нуждается в некотором пояснении.

Пусть мы хотим, начиная с некоторой точки x_n, y_n, уменьшить величину интервала h. Для этого конечно недостаточно подставить в формулы (21) или (20) новый промежуток h_1, нужно также подставить и новые разности $\Delta_1^2 f_{n-1}$, $\Delta_1^4 f_{n-1}, \ldots$, соответствующие этому новому промежутку. Для переходных вычислений от старого промежутка к новому удобнее воспользоваться формулой Штёрмера (22); поэтому мы и выведем значения новых разностей, соответствующие этой формуле: Δf_{n-1}, $\Delta^2 f_{n-2}$, $\Delta^3 f_{n-3}$, $\Delta^4 f_{n-4}$.

Уменьшим величину интервала h в m раз. Тогда величина нового промежутка:

$$h_1 = \frac{h}{m}.$$

Разности, соответствующие формуле (22) на основании выражений (6—14) и (3):

$$\Delta f_{n-1} = 2a_2h - 3\,a_3h^2 + 4a_4h^3 - 5a_5h^4; \tag{23}$$

$$\Delta^2 f_{n-2} = 6a_3h^2 - 24\,a_4h^3 + 70a_5h^4; \tag{24}$$

$$\Delta^3 f_{n-3} = 24\,a_4h^3 - 180a_5h^4; \tag{25}$$

$$\Delta^4 f_{n-4} = 120\,a_5h^4. \tag{26}$$

Подставляя в выражениях (23—26) вместо $h - h_1 = \dfrac{h}{m}$ и тождественно преобразуя их, получим формулы для разностей, соответствующих новому промежутку:

$$\Delta_1 f_{n-1} = \frac{1}{m}\Delta f_{n-1} + \frac{m-1}{2m^2}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{(m-1)\cdot(2m-1)}{6m^3}\Delta^3 f_{n-3} + \\ + \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24m^4}\Delta^4 f_{n-4}, \tag{27}$$

$$\Delta_1^2 f_{n-2} = \frac{1}{m^2}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{m-1}{m^3}\Delta^3 f_{n-3} + \frac{(m-1)(11m-7)}{12m^4}\Delta^4 f_{n-4}, \tag{28}$$

$$\Delta_1^3 f_{n-3} = \frac{1}{m^3}\Delta^3 f_{n-3} + \frac{3}{2}\,\frac{m-1}{m^4}\Delta^4 f_{n-4}, \tag{29}$$

$$\Delta_1^4 f_{n-4} = \frac{1}{m^4}\Delta^4 f_{n-4}. \tag{30}$$

Переходные вычисления следует вести так: подставляем в формулы (27—30) значение m, вычисляем новые разности и по формуле (22) определяем y_{n+1}, исходя от y_n.

Потом, подставляя в выражениях (27—30) $m_1 = \frac{m}{2} = \frac{h}{2h}$, мы по формуле (22) вычисляем y_{n+2}, исходя от того же y_n, т. е. с интервалом: $h_1' = 2h_1$.

Далее, подставляем в выражениях (27—30) $m_3 = \frac{m}{2} = \frac{h}{3h_1}$, вычисляем, исходя от того же y_n значение y_{n+3}, т. е. с интервалом $h_1'' = 3h_1$, и т. д.

Получив требуемое число точек, мы возвращаемся к формуле (21) и ведем вычисление с новой величиной промежутка.

§ **6.** Рассмотрим теперь метод Коуэлла в применении к уравнениям второго порядка.

Пусть дано уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

и начальные условия: $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$.

Для вывода общей формулы воспользуемся выражением (2). Продифференцировав это выражение дважды по (kh), имеем:

$$f_{n+k} = 2a_2 + 6a_3 kh + 12a_4 (kh)^2 + 20a_5 (kh)^3 + 30a_6 (kh)^4 + 42a_7 (kh)^5 + \\ + 56a_8 (kh)^6; \tag{31}$$

откуда аналогично случаю уравнения первого порядка:

$$f_{n-1} = 2a_2 - 6a_3h + 12a_4h^2 - 20a_5h^3 + 30a_6h^4 - 42a_7h^5 + 56a_8h^6, \tag{32}$$

$$f_n = 2a_2, \tag{33}$$

$$f_{n+1} = 2a_2 + 6a_3h + 12a_4h^2 + 20a_5h^3 + 30a_6h^4 + 42a_7h^5 + 55a_8h^6, \tag{34}$$

$$f_{n+2} = 2a_2 + 12_3h + 48a_4h^2 + 160a_5h^3 + 480a_6h^4 + 1344a_7h^5 + 3584a_8h^6, \tag{35}$$

$$f_{n+3} = 2a_2 + 18a_3h + 108a_4h^2 + 540a_5h^3 + 2430a_6h^4 + 10\,206a_7h^5 + \\ + 40\,824a_8h^6, \tag{36}$$

$$f_{n+4} = 2a_2 + 24a_3h + 192a_4h^2 + 1280a_5h_3 + 7680a_6h^4 + 43\,008a_7h^5 + \\ + 229\,376a_8h^6, \tag{37}$$

$$f_{n+5} = 2a_2 + 30a_3h + 300a_4h^2 + 2500a_5h^3 + 18\,750a_6h^4 + 131\,250a_7h^5 + \\ + 875\,000a_8h^6. \tag{38}$$

Аналогично предыдущему вычисляем разности:

$$\Delta^2 f_{n-1} = 24a_4h^2 + 60a_6h^4 + 112a_8h^6, \tag{39}$$

$$\Delta^4 f_{n-1} = 720a_6h^4 + 5040a_7h^5 + 26\,880a_8h^6, \tag{40}$$

$$\Delta^5 f_{n-1} = 5040a_7h^5 + 60\,480a_8h^6, \tag{41}$$

$$\Delta^6 f_{n-1} = 40\,320a_8h^6; \tag{42}$$

из выражений (4—5) вторая разность:

$$\Delta^2 y_{n-1} = 2a_2h^2 + 2a_4h^4 + 2a_6h^6 + 2a_8h^8, \tag{43}$$

с другой стороны:

$$\Delta^2 y_{n-1} = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = y_{n+1} - y_n - \Delta y_{n-1},$$

откуда:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2}. \tag{44}$$

Из уравнений (39 — 42):

$$\frac{1}{12}\Delta^2 f_{n-1} = 2a_4 h^2 + 5a_6 h^4 + \frac{28}{3} a_8 h^6,$$

$$\frac{1}{240}\Delta^4 f_{n-1} = 3a_6 h^4 + 21a_7 h^5 + 112a_8 h^6,$$

$$\frac{1}{240}\Delta^5 f_{n-1} = 21a_7 h^5 + 252a_8 h^6,$$

$$\frac{221}{60\,480}\Delta^6 f_{n-1} = 147\frac{1}{3} a_8 h^6$$

и следовательно из формулы (43):

$$h^2 f_n + \frac{h^2}{12}\Delta^2 f_{n-1} - \frac{h^2}{240}\Delta^4 f_{n-1} + \frac{h^2}{240}\Delta^5 f_{n-1} - \frac{221}{60\,480} h^2 \Delta^6 f_{n-1} = \\ = 2a_2 h^2 + 2a_4 h^4 + 2a_6 h^6 + 2a_8 h^8 = \Delta^2 y_{n-1},$$

или на основании выражения (44):

$$y_{n+1}=y_n+\Delta y_{n-1}+h^2\left[f_n+\frac{\Delta^2 f_{n-1}}{12}-\frac{\Delta^4 f_{n-1}}{240}+\frac{\Delta^5 f_{n-1}}{240}-\frac{221}{60\,480}\Delta^6 f_{n-1}\right], \quad (45)$$

т. е. формула для уравнений второго порядка, не содержащих первой производной.

Эту формулу Коуэлл упрощает, принимая в виду малости $\Delta^5 f_{n-1}$ и $\Delta_6 f_{n-1}$ равными 1 [1].

Тогда:

$$\frac{\Delta^5 f_{n-1}}{240}-\frac{221\,\Delta^6 f_{n-1}}{60\,480}\approx\frac{\Delta^6 f_{n-1}}{240}-\frac{221\,\Delta^6 f_{n-1}}{60\,480}=\frac{31}{60\,480}\Delta^6 f_{n-1}$$

или почти равно:

$$\frac{1}{1951}\Delta^6 f_{n-1}.$$

Тогда формула (45) перепишется так:

$$y_{n+1}=y_n+\Delta y_{n-1}+h^2\left[f_n+\frac{\Delta^2 f_{n-1}}{12}-\frac{\Delta^4 f_{n-1}}{240}+\frac{\Delta^6 f_{n-1}}{1951}\right]. \quad (46)$$

Эта формула дает результаты, практически не отличающиеся от результатов, получаемых формулой (45), но она значительно удобнее последней при вычислениях, так как представляет из себя более быстро сходящийся ряд.

Если уравнение содержит первую производную, то ее следует вычислить для подстановки в правую часть. Выражения для вычисления первой производной можно получить из формул (19—20) соответственно выражению (45):

$$y'_{n+1}=y_n'+2hf_n+\frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1}-\frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1}+\frac{h}{90}\Delta^5 f_{n-1}-\frac{37}{3780}h\Delta^6 f_{n-1} \quad (47)$$

или соответственно выражению (46), считая $\Delta^5 f_{n-1}=\Delta^6 f_{n-1}$:

$$y'_{n+1}=y_n'+2hf_n+\frac{h}{3}\Delta^2 f_{n-1}-\frac{h}{90}\Delta^4 f_{n-1}+\frac{h}{756}\Delta^6 f_{n-1}. \quad (48)$$

Процесс интегрирования располагается почти по той же схеме, как и в случае уравнений первого порядка. Таблица будет иметь вид:

Таблица 2

№	x	y	Δy	y'	$f=y''$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	x_0	y_0	Δy_0	y'_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	y'_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	y'_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	y'_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^3 f_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	y'_4	f_4	Δf_4	$\Delta^2 f_4$		
5	x_5	y_5	Δy_5	y'_5	f_5	Δf_5			
6	x_6	y_6	Δy_6	y'_6	f_6				

[1] См. „Известия Русского Астрономического Общества" за 1912—13 г. К. Баев. О принципе Kowell'a.

„угадывание“ разностей происходит аналогично случаю уравнений первого порядка.

§ 7. Преимущества и недостатки метода Коуэлла, по сравнению с другими методами и для уравнений второго порядка остаются теми же: меньшее число требуемых предварительных точек и более быстро сходящийся ряд, нежели в методе Штёрмера. Значительно упрощенная вычислительная работа и весьма высокая степень точности — по сравнению с другими методами.

Основной недостаток — необходимость „угадывания“ разностей высших порядков.

§ 8. Рассмотрим теперь процесс изменения величины промежутка h для уравнений второго порядка.

Пусть величина нового интервала $h_1 = \frac{h}{m}$. Выражение для разностей, соответствующих новому промежутку: $\Delta_1 f_{n-1}$; $\Delta_1^2 f_{n-2}$; $\Delta_1^3 f_{n-3}$, $\Delta_1^4 f_{n-4}$ остаются очевидно теми же, как и в уравнениях первого порядка (см. выражения 27—30).

Для переходных вычислений (см. § 5) удобнее воспользоваться формулой Штёрмера для уравнений второго порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n-1} + h^2 \left[f_n + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{12} + \frac{\Delta^3 f_{n-3}}{12} + \frac{19}{240} \Delta^4 f_{n-4} \right]. \qquad (49)$$

Найдем выражение для $\Delta_1 y_{n-1}$. Из формул (32 — 33)

$$\Delta f_{n-1} = 6a_3 h - 12a_4 h^2 + 20a_5 h^3 - 30a_6 h^4 \qquad (50)$$

и из формулы (5):

$$\Delta_1 y_{n-1} = a_1 \frac{h}{m} - a_2 \frac{h^2}{m^2} + a_3 \frac{h^3}{m^3} - a_4 \frac{h^4}{m^4} + a_5 \frac{h^5}{m^5} - a^6 \frac{h^6}{m^6}.$$

Последнее выражение путем тождественных преобразований принимает вид:

$$\Delta_1 y_{n-1} = \frac{1}{m} \Delta y_{n-1} + \frac{m-1}{2m^2} h^2 f_n - \frac{(m-1)(m+1)}{6m^3} h^2 \Delta f_{n-1} -$$
$$- \frac{(m-1)(m^2+m-1)}{24m^4} h^2 \Delta^2 f_{n-2} - \frac{(m-1)(2m-1)(4m^2+6m-3)}{360m^5} h^2 \Delta^3 f_{n-3}.$$

Процесс перехода происходит по той же схеме, как и для уравнений первого порядка (см. § 5).

§ 9. В качестве примера рассмотрим колебание математического маятника. Дифференциальное уравнение очевидно будет иметь вид:

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - mg \sin \varphi - k \left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \qquad (a)$$

Тут m — масса материальной частицы, l — длина нити, φ — угол отклонения маятника от положения равновесия, t — время, прошедшее от начала колебания, k — коэффициент сопротивления среды, принимаемый за постоянный. Сопротивление среды принято прямо пропорциональным квадрату скорости, хотя при небольшой линейной скорости пропорциональность можно было бы принять и в первой степени. Массой и сопротивлением нити пренебрегаем.

Пусть материальную частицу представит собой железный шарик, весом $P = 10$ г и следовательно массой $m = \frac{P}{g} = 0{,}00102 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{мт}}$.

Длина нити $l=4{,}905$ м, коэффициент сопротивления среды принят $k=0{,}0000172\,\frac{\text{кг}\cdot\text{сек}^2}{\text{см.}^4}$.

Тогда уравнение (a) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-2\sin\varphi-0{,}0832\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad \text{(b)}$$

Если в начальный момент шарику была сообщена начальная угловая скорость $\varphi_0'=0{,}5\,\frac{1}{\text{сек}}$, то начальные условия: $t_0=0$, $\varphi_0=0$ и $\varphi_0'=0{,}5$ сек. Задаемся величиной интервала: $h=0{,}1$ сек. и вычисляем по формуле Тейлора:

$$\varphi_1=0{,}0497 \quad \text{и} \quad \varphi_1'=0{,}4930\,\frac{1}{\text{сек.}}$$

Затем „угадываем" $\Delta^2 f_0$. Предположим, что $\Delta^2 f_0=0$, тогда по формулам (46) и (48):

$$\varphi_2=0{,}0982 \text{ и } \varphi_2'=0{,}4759.$$

По этим значениям находим: $f_2=-0{,}2150$ и определяем разности: $\Delta f_1=-0{,}0944$ и $\Delta^2 f_0=0{,}0054$.

Происшедшая при „угадывании" $\Delta^2 f_0$ ошибка несколько искажает значение φ_2', а поэтому делаем пересчет. Находим вновь: $\varphi_2==0{,}0982$ и $\varphi_2'=0{,}4761$. Таким образом продолжаем интегрирование и заполняем таблицу III:

Таблица 3 [1]

№	t	φ	$\Delta\varphi$	φ'	$f=\varphi''$	Δf	$\Delta^2 f$
0	0,0000	0,0000	0,0497	0,5000	—0,0208	—0,0998	0,0054
1	0,1000	0,0497	0,0485	0,4930	—0,1206	—0,0944	0,0045
2	0,2000	0,0982	0,0464	0,4761	—0,2150	—0,0899	0,0071
3	0,3000	0,1446	0,0434	0,4502	—0,3051	—0,0830	0,0085
4	0,4000	0,1880	0,0395	0,4153	—0,3881	—0,0745	0,0094
5	0,5000	0,2275	0,0349	0,3727	—0,4626	—0,0649	0,0106
6	0,6000	0,2624	0,0296	0,3231	—0,5275	—0,0543	0,0113
7	0,7000	0,2920	0,0238	0,2676	—0,5818	—0,0430	0,0117
8	0,8000	0,3158	0,0176	0,2071	—0,6248	—0,0313	0,0117
9	0,9000	0,3334	0,0110	0,1430	—0,6561	—0,0196	0,0119
10	1,0000	0,3444	0,0043	0,0763	—0,6757	—0,0077	
11	1,1000	0,3487	—0,0025	0,0083	—0,6834		
12	1,2000	0,3462		—0,0584			

Из таблицы видим, что $\varphi_{12}<\varphi_{11}$ и угловая скорость $\varphi_{12}'<0$, т. е. в момент $t=1{,}2$ сек. маятник уже перешел положение наибольшего отклонения и движется в обратную сторону.

Определим, при каком значении аргумента t_x угол отклонения φ будет наибольшим. Очевидно в этот момент $\varphi_x'=0$, найдем величину промежутка h_x между t_{11} и t_x.

Воспользуемся формулой (48), ограничиваясь по малости h_x первою разностью:

$$\varphi_n'=\varphi'_{n-1}+h_x f_{n-1}+\frac{1}{2}h_x\Delta_1 f_{n-2}. \qquad \text{(c)}$$

[1] Разность $\Delta\varphi$ вписывается в таблицу против промежутка между двумя значениями φ; точно также Δf — против промежутка между двумя значениями f и $\Delta^2 f$ — между двумя значениями $\Delta^2 f$.

*

Подставляя сюда $\varphi_n' = \varphi_x' = 0$; $\varphi_{n-1}' = \varphi_{11}' = 0{,}0083$, $f_{n-1} = f_{11} = -0{,}6834$, $h_x = \frac{0{,}1}{m}$ и $\Delta_1 f_{n-1} = -\frac{0{,}0077}{m}$ (см. §§ 5 и 8), получим квадратное уравнение, корень которого, удовлетворяющий нашим условиям: $m = 7{,}354$. Искомый промежуток: $h_x = \frac{h}{m} = \frac{0{,}1}{7{,}354} = 0{,}01353$ сек. и время наибольшего отклонения:

$$t_x = t_{11} + h_x = 1{,}1 + 0{,}01353 = 1{,}11353 \text{ сек.}$$

ÜBER DIE METHODE VON KOWELL

Von *F. Florinsky* (*Dniepropetrowsk*)

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit wird die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Kowell'schen Methode dargestellt. Neben Gleichungen zweiter Ordnung (zu deren Lösung das Verfahren von Kowell ursprünglich ausgearbeitet wurde) ist auch die Integration von Gleichungen erster Ordnung in Betracht gezogen. Behandelt wird auch die Frage über die Variation im Laufe des Integrationsprozesses der Intervallgrösse zwischen den aufeinanderfolgenden Werten der unabhängigen Veränderlichen.
