НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С. Г. Михлин (Ленинград)

В настоящей статье мы дадим решение основных задач теории упругости для частного вида областей, заполненных неоднородным по своим упругим свойствам веществом. Именно, мы будем считать, что рассматриваемая нами область распадается на две или несколько областей, в каждой из которых упругие константы Lamé λ и μ остаются постоянными, но меняются при переходе от одной области к другой.

На границе области мы будем считать заданными смещения или напряжения, причем вместо напряжений можно считать заданными производные по координатам функции Airy. На границе же между областями с различными значениями упругих констант поставим, в качестве граничных условий, требования равенства смещений и равенства напряжений. Последнее можно заменить равенством производных по координатам функции Airy.

Поставленная таким образом задача допускает только одно решение. Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы единственности для обычной задачи теории упругости. Приводить мы его не будем.

Перейдем к рассмотрению некоторых типов областей.

§ 1. Рассмотрим концентрическое кольцо с радиусом 1 и ρ, $\rho > 1$ с заделанным в него кругом радиуса 1 из другого материала. Упругие константы назовем λ_1 и μ_1 для кольца и λ_2, μ_2 для внутреннего круга. Введем еще в рассмотрение коэффициенты[1]

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{\lambda_2 + 3\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}. \tag{1}$$

Пусть по окружности $|z| = \rho$ даны значения производных функции Airy по координатам. Как мы уже говорили, такое задание равносильно заданию напряжений, точнее, заданию внешних действующих сил. Обозначим значение функции Airy в кольце через W_1, в круге через W_2. Мы можем считать заданным на окружности $|z| = \rho$ выражение ($z = \rho e^{i\theta}$)

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = f(\theta). \tag{2}$$

Функцию $f(\theta)$ мы будем считать непрерывной; это соответствует предположениям, что включенные силы отсутствуют и что главный вектор

[1] Коэффициент $\varkappa$ введен Н. И. Мусхелишвили. См. напр. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые задачи теории упругости.

внешних действующих сил равен нулю. Известно, что, если W есть бигармоническая функция, какими и должны быть W_1 и W_2, то

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{3}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, аналитические в области, в которой W регулярна, и не имеющие внутри этой области особых точек. Обозначим $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в кольце, $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ в круге. $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ регулярны в кольце $1<|z|<\rho$, $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ в круге $|z|<1$. Из равенства (1) следует граничное условие на окружности $|z|=\rho$:

$$\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=f(\theta). \tag{4}$$

На окружности $|z|=1$ имеем

$$\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=\varphi_2(z)+z\overline{\varphi_2'(z)}+\overline{\psi_2(z)}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2\mu_1}\left\{\varkappa_1\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}\right\}=\frac{1}{2\mu_2}\left\{\varkappa_2\varphi_2(z)-z\overline{\varphi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)}\right\}. \tag{6}$$

Равенство (5) выражает непрерывность производных функции Airy, т. е. непрерывность напряжений; равенство (6) выражает непрерывность смещений.

Положим

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n^{(1)}z^n,\quad \varphi_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(2)}z^n,\\ \psi_1(z)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n^{(1)}z^n,\quad \psi_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(2)}z^n.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Далее, положим $z=re^{i\theta}$. Разложим $f(\theta)$ в ряд Фурье, и пусть

$$f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n e^{in\theta}. \tag{8}$$

Равенства (4), (5), (6) дают нам:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n^{(1)}\rho^n e^{in\theta}+\rho e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\overline{a}_n^{(1)}\rho^{n-1}e^{-(n-1)i\theta}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{b}_n^{(1)}\rho^n e^{-in\theta}=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n e^{in\theta}; \tag{9}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n^{(1)}e^{in\theta}+e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\overline{a}_n^{(1)}e^{-(n-1)i\theta}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{b}_n^{(1)}e^{-in\theta}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}e^{in\theta}+e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}n\overline{a}_n^{(2)}e^{-(n-1)i\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b}_n^{(2)}e^{-in\theta}; \tag{10}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n{}^{(1)} e^{in\theta} - \frac{e^{i\theta}}{\mu_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\overline{a}_n{}^{(1)} e^{-(n-i)i\theta} - \frac{1}{\mu_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{b}_n{}^{(1)} e^{-in\theta} =$$

$$= \frac{\varkappa_2}{\mu_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^{(2)} e^{in\theta} - \frac{e^{i\theta}}{\mu_2}\sum_{n=0}^{\infty} n\overline{a}_n e^{-(n-1)i\theta} - \frac{1}{\mu_2}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{b}_n{}^{(2)} e^{-in\theta}. \tag{11}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$.

Из (9) найдем

$$a_n^{(1)}\rho^n + (2-n)\,\overline{a}_{2-n}^{(1)}\rho^{2-n} + \overline{b}_{-n}^{(1)}\rho^{-n} A_n. \tag{12}$$

Это равенство верно при всех значениях n. Далее, из (10) и (11) имеем:

$$a_n^{(1)} + (2-n)\,\overline{a}_{2-n}^{(1)} + \overline{b}_{-n}^{(1)} = a_n^{(2)};\ n \geqslant 2; \tag{13}$$

$$a_{-1}^{(1)} + (2+n)\,\overline{a}_{2+n}^{(1)} + b_n^{(1)} = (2+n)\,\overline{a}_{2+n}^{(2)} + b_n^{(2)};\ n \geqslant 1. \tag{14}$$

$$a_0{}^{(1)} + 2\overline{a}_2{}^{(1)} + \overline{b}_0{}^{(1)} = a_0{}^{(2)} + 2\overline{a}_2{}^{(2)} + \overline{b}_0{}^{(2)}; \tag{15}$$

$$a_1{}^{(1)} + \overline{a}_{-1}{}^{(1)} + \overline{b}_{-1}{}^{(1)} = a_1{}^{(2)} + \overline{a}_1{}^{(2)}; \tag{16}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_n{}^{(1)} - \frac{2-n}{\mu_1}\overline{a}_{-n+2}{}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1}\overline{b}_{-n}{}^{(1)} = \frac{\varkappa_2}{\mu_2} a_n{}^{(2)};\ n \geqslant 2; \tag{17}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_{-n}{}^{(1)} - \frac{2+n}{\mu_1}\overline{a}_{n+2}{}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1}\overline{b}_n{}^{(1)} = -\frac{2+n}{\mu_2}\overline{a}_{2+n}{}^{(2)} - \frac{1}{\mu_2}\overline{b}_n{}^{(2)};\ n \geqslant 1; \tag{18}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_0{}^{(1)} - \frac{2}{\mu_1}\overline{a}_2{}^{(1)} - \frac{\overline{b_0{}^{(1)}}}{\mu_1} = \frac{\varkappa_2}{\mu_2} a_0{}^{(2)} - \frac{2}{\mu_2}\overline{a}_2{}^{(2)} - \frac{\overline{b}_0{}^{(2)}}{\mu_2}; \tag{19}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_1{}^{(1)} - \frac{\overline{a}_1{}^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\overline{b}_{-1}{}^{(1)}}{\mu_1} = \frac{\varkappa_2}{\mu_2} a_1{}^{(2)} - \frac{\overline{a}_1{}^{(2)}}{\mu_2}. \tag{20}$$

Заменим n в (12) на $2-n$, а в (14) и (18) на $n-2$ и в полученных результатах заменим все величины сопряженными.

Присоединив полученные уравнения к уравнениям (12), (14) и (18), получим систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$a_n^{(1)},\quad \overline{a}_{-n+2}^{(1)},\quad \overline{b}_{-n}^{(1)},\quad b_{n-2}^{(1)},\quad a_n^{(2)},\quad \overline{b}_{n-2}^{(2)}, \tag{21}$$

годную при $n \geqslant 3$. Выпишем эту систему:

$$\left.\begin{aligned}
a_n{}^{(1)}\rho^n + (2-n)\,\overline{a}_{2-n}{}^{(1)}\rho^{2-n} + \overline{b}_{-n}{}^{(1)}\rho^{-n} &= A_n;\\
na_n{}^{(1)}\rho^n + \overline{a}_{2\ n}{}^{(1)}\rho^{2-n} + b_{n-2}{}^{(1)}\rho^{n-2} &= \overline{A}_{-n+2};\\
a_n{}^{(1)} + (2-n)\,\overline{a}_{2-n}{}^{(1)} + \overline{b}_{-n}{}^{(1)} - a_n{}^{(2)} &= 0;\\
na_n{}^{(1)} + \overline{a}_{-n+2}{}^{(1)} + b_{n-2}{}^{(1)} - na_n{}^{(2)}\,\overline{b}_{n-2}{}^{(2)} &= 0;\\
\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_n{}^{(1)} - \frac{(2-n)}{\mu_1}\overline{a}_{2-n}{}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1}\overline{b}_{-n}{}^{(1)} - \frac{\varkappa_2}{\mu_2} a_n{}^{(2)} &= 0;\\
-\frac{n}{\mu_1} a_n{}^{(1)} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{a}_{2-n}{}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1} b_{n-2}{}^{(1)} + \frac{n}{\mu_2} a_n{}^{(2)} + \frac{\overline{b}_{n-2}{}^{(2)}}{\mu_2} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Не трудно видеть, что при $n \geqslant 3$ коэффициенты (21) определяются только системой (22), так как любая замена значка меняет значки всех коэффициентов.

Если ограничиться значениями μ_1, μ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, соответствующими задаче упругости ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\varkappa_1 > 1$, $\varkappa_2 > 1$), то определитель системы (22) отличен от нуля при всяком n, $n \geqslant 3$. Пусть при каком-нибудь $n = n'$ этот определитель равен нулю. Положим $f(\theta) = 0$. Тогда

$A_n=0$ для всех значений n. Системы (22) делаются однородными. Примем значения величин (21) для $n \neq n'$ равными нулю. При $n=n'$ система (22) допускает решения, отличные от нуля. По этим решениям найдем $\varphi_1, \ldots, \psi_2$, а по этим функциям — соответствующее им поле напряжений, причем напряжения эти в нуль тождественно не обращаются. Это противоречит теореме единственности, так как $f=0$ соответствует отсутствию внешних сил.

Раз определитель отличен от нуля, мы находим каждый раз единственную систему величин (21) при $n \geqslant 3$.

Нам остается определить величины $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, $b_0^{(1)}$, $b_{-1}^{(1)}$, $b_{-2}^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$, $b_0^{(2)}$. Положим в (12) $n=0$, $n=2$, в (13) и (17) $n=2$ и присоединим к полученным равенствам равенство (15) и (19). Получим следующую систему:

$$a_0^{(1)}+2\overline{a}_2^{(1)}\rho^2+b_0^{(1)}=A_0; \tag{23_1}$$

$$a_2^{(1)}\rho^2+\overline{b}_{-2}^{(1)}\rho^{-2}=A_2; \tag{23_2}$$

$$a_2^{(1)}+\overline{b}_{-2}^{(1)}-a_2^{(2)}=0; \tag{23_3}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1}a_2^{(1)}-\frac{1}{\mu_1}\overline{b}_{-2}^{(1)}-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}a_2^{(2)}=0; \tag{23_4}$$

$$a_0^{(1)}+2\overline{a_2}^{(1)}+\overline{b_0}^{(1)}-a_0^{(2)}-2\overline{a_2}^{(2)}-\overline{b}_0^{(2)}=0; \tag{23_5}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1}a_0^{(1)}-\frac{2}{\mu_1}\overline{a}_2^{(1)}-\frac{1}{\mu_1}b_0^{(1)}-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}a_0^{(2)}+\frac{2}{\mu_2}\overline{a}_2^{(2)}+\frac{1}{\mu_2}\overline{b}_0^{(2)}=0. \tag{23_6}$$

Из уравнений (23_2) — (23_4) находим величины $a_2^{(1)}$, $\overline{a}_2^{(2)}$, $\overline{b}_{-2}^{(1)}$.

Если теперь одной из величин $a_0^{(1)}$, $b_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $b_0^{(2)}$, например $a_0^{(1)}$, произвольно приписать какое-нибудь значение, то из уравнений (23_1) (23_5), (23_6) найдем остальные три величины.

Пусть теперь $n=1$. В этом случае (12), (16) и (20) дают:

$$a_1^{(1)}+\overline{a}_1^{(1)}+\frac{\overline{b}_{-1}^{(1)}}{\rho^2}=\frac{A_1}{\rho}; \tag{24}$$

$$a_1^{(1)}+\overline{a}_1^{(1)}+\overline{b}_{-1}^{(1)}=a_1^{(2)}+\overline{a}_1^{(2)}; \tag{16}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1}a_1^{(1)}-\frac{\overline{a_1^{(1)}}}{\mu_1}-\frac{b_{-1}^{(1)}}{\mu_1}=\frac{\varkappa_2}{\mu_2}a_1^{(2)}-\frac{\overline{a}_1^{(2)}}{\mu_2}. \tag{20}$$

Из (16) следует, что $b_{-1}^{(1)}$ вещественно, что по (24) возможно только при A, вещественном

$$I(A_1)=0. \tag{25}$$

Легко проверить, что условие (25) эквивалентно условию равенства нулю главного момента внешних сил, приложенных к кругу $|z|=$ $=\rho$. Будем считать это условие выполненным. Тогда, отделяя в равенствах (24), (16) и (20) вещественные и мнимые части, легко найдем $R(a_1^{(1)})$, $R(a_1^{(2)})$ и $b_{-1}^{(1)}$. Мы не будем выписывать выражений этих величин. Наконец, между мнимыми частями $I(a_1^{(1)})$ и $I(a_1^{(2)})$ мы найдем только одно соотношение

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\varkappa_1+1}{\rho^2}-2\right)I(a_1^{(1)})-\frac{1}{\mu_2\rho^2}(\varkappa_2-1)I(a_2^{(1)})=0, \tag{26}$$

так что из этих величин одна, например $I(a_1^{(1)})$ остается произвольной.

В наше решение входят таким образом две произвольные постоянные $a_0^{(1)}$ и $I(a_1^{(1)})$. Известно однако, что этот произвол не влияет на поля смещений и напряжений.[1]

Решая нашу задачу, мы молчаливо полагали, что ряды (7) сходятся на границе области, так что первые два ряда сходятся при $|z|=1$ и $|z|=\rho$, а вторые два — при $|z|=1$. Чтобы убедиться в том, что мы действительно получали решение задачи, необходимо показать, что эта сходимость на самом деле имеет место. Можно указать простое достаточное условие сходимости — оно заключается в том, что $f(\theta)$ должна быть непрерывной и иметь ограниченную и кусочно-непрерывную производную. Физически это условие соответствует кусочно-непрерывному распределению внешних усилий на контуре и отсутствию включенных сил.

Докажем, например, что при сделанном предположении относительно $f(\theta)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n$ абсолютно и равномерно сходится при $|z|=\rho$. Для остальных рядов доказательство проводится аналогично.

Заметим прежде всего, что из нашего предположения о характере функции $f(\theta)$ следует абсолютная сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n}.$$

Из системы (22) находим

$$a_n = \frac{\Delta_n'}{\Delta_n},$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \rho^n, & (2-n)\rho^{2-n}, & \rho^{-n}, & 0, & 0, & 0 \\ n\rho^n, & \rho^{2-n}, & 0, & \rho^{n-2}, & 0, & 0 \\ 1, & 2-n, & 1, & 0, & -1, & 0 \\ n, & 1, & 0, & 1, & -n, & -1 \\ \frac{\varkappa_1}{\mu_1}, & -\frac{2-n}{\mu_1}, & -\frac{1}{\mu_1} & 0, & -\frac{\varkappa_2}{\mu_2}, & 0 \\ -\frac{n}{\mu_1}, & \frac{\varkappa_1}{\mu_1}, & 0, & -\frac{1}{\mu_2} & \frac{n}{\mu_2}, & 0. \end{vmatrix} \tag{27}$$

$$\Delta_n' = \begin{vmatrix} A_n, & (2-n)\rho^{n-2}, & \rho^{-n}, & 0, & 0, & 0 \\ \overline{A}_{-n+2}, & \rho^{2-n}, & 0, & \rho^{n-2}, & 0, & 0 \\ 0, & 2-n, & 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & -n, & -1 \\ 0, & -\frac{2-n}{\mu_1}, & -\frac{1}{\mu_1}, & 0, & -\frac{\varkappa_2}{\mu_2}, & 0 \\ 0, & \frac{\varkappa_1}{\mu_1}, & 0, & -\frac{1}{\mu_1}, & \frac{n}{\mu_2}, & \frac{1}{\mu_2} \end{vmatrix} \tag{28}$$

Оценим оба определителя. Несложные преобразования дают

$$\Delta_n = \frac{\mu_2-\mu_1}{\rho^2\mu_1^2\mu_2^2} \begin{vmatrix} \rho^{2n}, & (2-n)\rho^2, & 1 \\ n(\rho^2-1), & \rho^{4-2n} - \frac{\mu_1+\varkappa_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, & 0 \\ \varkappa_2\mu_1-\mu_1\varkappa_2, & (2-n)(\mu_2+\mu_1\varkappa_2), & \mu_2+\mu_1\varkappa_2 \end{vmatrix} \tag{29}$$

[1] См. напр. Мусхелишвили. Некоторые задачи теории упругости.

Из (29) не трудно видеть, что $\Delta_n = \rho^{2n}(A' + \varepsilon(n))$, где A' постоянная, равная

$$\frac{1}{\rho_1^2 \mu_1^2 \mu_2^2}(\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1)(\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2),$$

а $\varepsilon(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, при $n \geqslant n'$

$$|\Delta_n| > A\rho^{2n}, \tag{30}$$

где A — постоянная.

Разложим определитель Δ_n' по минорам первого столбца. Произведя опять ряд несложных вычислений, найдем:

$$\Delta_n' = A_n\alpha_n + \overline{A}_{-n+2}\beta_n, \tag{31}$$

где мы обозначили

$$\alpha_n = -\frac{\rho^{n-2}}{\mu_1^2\mu_2^2}(\mu_1 + \varkappa_1\mu_2)(\mu_2 + \varkappa_2\mu_1) - \frac{\rho^{2-n}}{\mu_1^2\mu_2^2}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_1\varkappa_2), \tag{32}$$

$$\beta_n = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1^2\mu_2}(2-n)\rho^{-n}\begin{vmatrix} \rho^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{\varkappa_2\mu_1}{\mu_2} \end{vmatrix} \tag{33}$$

Из равенств в (32) и (33) легко получаем

$$|\alpha_n| < \rho^n B, \quad |\beta_n| < n\rho^{-n}C, \tag{34}$$

где B и C — постоянные. Из (30) и (34) имеем

$$|a_n|\rho^n < \frac{B}{A}|A_n| + \frac{C}{A}n\rho^{-n}|A_{-n+2}|. \tag{35}$$

Вспомнив, что ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|A_{-n}|$ сходятся, заключаем из (35), что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ сходится абсолютно и равномерно при $|z| \geqslant \rho$.

Точно также можно показать абсолютную и равномерную сходимость и других рядов на соответствующих контурах. Можно решить изложенным здесь методом задачу упругости и в случае заданных смещений. Существенным отличием в этом случае будет отсутствие условия типа (25). Величина $a_1^{(1)}$ определится точно. Величина же $a_0^{(1)}$ попрежнему останется произвольной. Абсолютная сходимость рядов будет обеспечена, если данные на контуре смещения непрерывны и имеют ограниченные кусочно-непрерывные первые производные.

Сделаем следующее замечание: из равенства касательных и нормальных напряжений на окружности $|z|=1$ следует равенство производных функций Airy не точное, как мы предположили, а с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Обозначим его C. Равенство (16) заменится тогда таким

$$a_0^{(1)} + 2\overline{a}_2^{(1)} + \overline{b}_0^{(1)} = a_0^{(1)} + 2\overline{a}_2^{(2)} + \overline{b}_0^{(2)} + C; \tag{36}$$

равенство же (20) остается без изменения. Таким образом величина $\varkappa_2 a_0^{(2)} - b_0^{(2)}$ определяется точно, а величина $a_0^{(2)} + \overline{b}_0^{(2)}$ остается произвольной при произвольной C. Этот произвол не отражается, однако, ни на смещениях, ни на напряжениях.

§ 2. Рассмотрим два концентрических кольца

$$1 \leqslant |z| \leqslant \rho_1 \quad \text{и} \quad \rho_2 \leqslant |z| \leqslant 1$$

из различных материалов. Будем считать данными на окружностях $|z| = \rho_1$ и $|z| = \rho_2$ производные функции Airy, так что

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = f_1(\theta), \qquad \frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y} = f_2(\theta). \tag{37}$$

Сохраняем старые обозначения. Заметим только, что на этот раз

$$\varphi_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(2)} z^n, \qquad \psi_2(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(2)} z^n. \tag{38}$$

Положим

$$f_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\theta}, \quad f_2(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n e^{in\theta}. \tag{39}$$

Как и в § 1, получим следующие уравнения:

$$a_n^{(1)} \rho_1^n + (2-n)\overline{a}_{2-n}^{(1)} \rho_1^{2-n} + \overline{b}_{-n}^{(1)} \rho_1^{-n} = A_n, \tag{40}$$

$$a_n^{(2)} \rho_2^n + (2-n)\overline{a}_{2-n}^{(2)} \rho_2^{2-n} + \overline{b}_{-n}^{(2)} \rho_2^{-n} = B_n, \tag{41}$$

$$a_n^{(1)} + (2-n)\overline{a}_{2-n} + \overline{b}_{-n}^{(1)} = a_n^{(2)} + (2-n)\overline{a}_{2-n}^{(2)} + \overline{b}_{-n}^{(2)}, \tag{42}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1} a_n^{(1)} - \frac{2-n}{\mu_1}\overline{a}_{2-n}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1}\overline{b}_{-n}^{(1)} = \frac{\varkappa_2}{\mu_2} a_n^{(2)} - \frac{2-n}{\mu_2}\overline{a}_{2-n}^{(2)} - \frac{1}{\mu_2}\overline{b}_{-n}^{(2)}. \tag{43}$$

На окружности $|z| = 1$ мы попрежнему предполагаем равенство смещений и равенство производных функций Airy.

К системе (40) — (43) прибавим еще четыре уравнения, получаемые из них заменой n на $2-n$ и заменой всех величин на сопряженные.

$$na_n^{(1)} \rho_1^n + \overline{a}_{2-n}^{(1)} \rho_1^{2-n} + b_{n-2}^{(1)} \rho_1^{n-2} = \overline{A}_{2-n}, \tag{44}$$

$$na_n^{(2)} \rho_2^n + \overline{a}_{2-n}^{(2)} \rho_2^{2-n} + b_{n-2}^{(2)} \rho_2^{n-2} = \overline{B}_{2-n}, \tag{45}$$

$$na_n^{(1)} + \overline{a}_{2-n}^{(1)} + b_{n-2}^{(1)} = na_n^{(2)} + \overline{a}_{2-n}^{(2)} + b_{n-2}^{(2)}, \tag{46}$$

$$-\frac{n}{\mu_1} a_n^{(1)} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{a}_{2-n}^{(1)} - \frac{1}{\mu_1} b_{n-2}^{(1)} = -\frac{n}{\mu_2} a_n^{(2)} + \frac{\varkappa_2}{\mu_2}\overline{a}_{-n+2}^{(2)} - \frac{1}{\mu_2} b_{n-2}^{(2)}. \tag{47}$$

Система уравнений (40) — (47) есть система 8 уравнений с 8 неизвестными:

$$a_n^{(1)}, \ \overline{a}_{-n+2}^{(1)}, \ \overline{b}_{-n}^{(1)}, \ b_{n-2}^{(1)}, \ a_n^{(2)}, \ \overline{a}_{-n+2}^{(2)}, \ \overline{b}_{-n}^{(2)}, \ b_{n-2}^{(2)}.$$

Отметим, что наша система не меняется при замене n на $2-n$; поэтому значения коэффициентов с номером $2-n$ совпадают с теми, которые получатся, если в выражениях для коэффициентов с номерами n заменим n на $2-n$. Таким образом два выражения, которые мы получим для коэффициентов $a_n^{(1)}$ и $a_{2-n}^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ и $a_{2-n}^{(2)}$ и т. п., не будут противоречивыми. При $n > 2$ и $n < 0$ определитель системы отличен от нуля. Доказательно основано на теореме единственности и производится так же, как и в § 1. Случаи $n = 0$ и $n = 1$ придется рассмотреть отдельно. Случай $n = 2$ совпадает с случаем $n = 0$.

I. $n=0$. Из (44)—(47) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_2^{(1)}\rho_1^2+b_{-2}^{(1)}\rho_1^{-2}&=\overline{A}_2,\\ \overline{a}_2^{(2)}\rho_2^2+b_{-2}^{(2)}\rho_2^{-2}&=\overline{B}_2,\\ \overline{a}_2^{(1)}-\overline{a}_2^{(2)}+b_{-2}^{(1)}-b_{-2}^{(2)}&=0,\\ \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{a}_2^{(1)}-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\overline{a}_2^{(2)}-\frac{1}{\mu_1}b_{-2}^{(1)}+\frac{1}{\mu_2}b_{-2}^{(2)}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Простой подсчет показывает, что определитель системы (41) отличен от нуля. Можно найти значения неизвестных коэффициентов $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $b_{-2}^{(1)}b_{-2}^{(2)}$. Далее, из (40)—(43) имеем:

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(1)}+\overline{b}_0^{(1)}&=A_0-2\overline{a}_2^{(1)}\rho_1^2,\\ a_0^{(2)}+b_0^{(2)}&=B_0-2\overline{a}_2^{(2)}\rho_2^2,\\ a_0^{(1)}+\overline{b}_0^{(1)}-a_0^{(2)}-\overline{b}_0^{(2)}&=2\overline{a}_2^{(2)}-2\overline{a}_2^{(1)},\\ \frac{\varkappa_1}{\mu_1}a_0^{(1)}-\frac{1}{\mu_1}\overline{b}_0^{(1)}-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}a_0^{(2)}+\frac{1}{\mu_2}\overline{b}_0^{(2)}&=\frac{2}{\mu_1}a_2^{(1)}-\frac{2}{\mu_2}a_2^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Первые три уравнения системы (49) дают

$$A_0-B_0=2\overline{a}_2^{(2)}\ (1-\rho_2^2)+2\overline{a}_2^{(1)}\ (\rho_1^2-1). \tag{50}$$

Равенство (50) дает необходимое условие разрешимости задачи. Физический смысл его очевиден. В самом деле, определяя производные функций Airy, по заданным внешним нагрузкам, на каждом контуре мы вводим две произвольные постоянные, из которых однако произвольно можно выбрать только одну. Равенство (50) выражает условие, которым определяется одна из этих постоянных, если вторая как-либо выбрана. Заметим, что если условие (50) не выполнено, задача может быть решена, но для этого придется ввести многозначные смещения. Будем считать условие (50) выполненным. Третье из уравнений (42) может быть отброшено. Из первых двух и из четвертого мы, выбрав произвольно один из неизвестных коэффициентов, найдем остальные три.

Так как при $n=1$, $n=2-n$, то достаточно рассмотреть уравнения (40)—(43). Эти уравнения дают:

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(1)}+\overline{a}_1+\frac{1}{\rho_1^2}b_{-1}^{(1)}&=A,\\ a_1^{(2)}+\overline{a}_1^{(2)}+\frac{1}{\rho_2^2}\overline{b}_{-1}^{(2)}&=B,\\ a_1^{(1)}+\overline{a}_1^{(1)}+\overline{b}_{-1}^{(1)}&=a_1^{(2)}+\overline{a}_1^{(2)}+\overline{b}_{-1}^{(2)},\\ \frac{\varkappa_1}{\mu_1}a_1^{(1)}-\frac{1}{\mu_1}\overline{a}_1^{(1)}-\frac{1}{\mu_1}\overline{b}_{-1}^{(1)}&=\frac{\varkappa_2}{\mu_2}a_1^{(2)}-\frac{1}{\mu_2}\overline{a}_1^{(2)}-\frac{1}{\mu_2}\overline{b}_{-1}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Из третьего из уравнений (51) находим

$$I(b_{-1}^{(1)})=I(b_{-1}^{(2)}), \tag{52}$$

что в силу первых двух уравнений приводит ко второму необходимому условию разрешимости задачи:

$$\rho_2^2 I(A_1)-\rho_2^2-I(B_1)=0. \tag{53}$$

Как не трудно проверить, равенство (53) есть условие обращения в нуль главного момента внешних сил. Пусть условие (53) выполнено. Имеем

$$I(b_{-1}^{(1)})=I(b_{-1}^{(2)})=\rho_1^2 I(A_1)=\rho_2^2 I(B_1). \tag{54}$$

Приравняв в (54) вещественные части, найдем вещественные части коэффициентов $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $b_{-1}^{(1)}$, $b_{-1}^{(2)}$. Равенство мнимых частей первых трех уравнений выполнено в силу (54). Приравнивая мнимые части членов четвертого уравнения, найдем соотношение

$$\frac{\varkappa_1+1}{\mu_1} I(a_1^{(1)}) - \frac{\varkappa_2+1}{\mu_2} I(a_1^{(2)}) = \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) \rho_1^2 I(A_1), \tag{55}$$

связывающее $I(a_1^{(1)}$ и $I(a_1^{(2)})$. Одна из этих величин может быть выбрана произвольно.

Тот же метод дает решение и в том случае, когда на окружностях $|z| = \rho_1$ и $|z| = \rho_2$ заданы смещения. Надо только в этом случае положить

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \alpha \lg z + \varphi_{01}(z), \quad \psi_1(z) = -\varkappa_1 \bar{\alpha} \lg z + \psi_{01}(z), \\ \varphi_2(z) &= \alpha \lg z + \varphi_{02}(z), \quad \psi_2(z) = -\varkappa_2 \alpha \lg z + \psi_{02}(z), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

где $\varphi_{01}(z) \ldots \psi_{02}(z)$ разлагаются в ряды Laurent'a.

Коэффициент α определится из условия, аналогичного (50). Можно этим методом решить и смешанную задачу, когда на одном контуре даны напряжения, а на другом смещения. В обеих этих задачах условиях, аналогичного (53), не будет и величины $a_1^{(1)}$ и $a_1^{(2)}$ определяются точно.

Можно и в этом случае потребовать на окружности $|z| = 1$ равенства производных функций Airy с точностью до произвольной постоянной. Как и в § 1, это приведет к тому, что одну из величин $a_0^{(2)}$, $b_0^{(2)}$ можно будет выбрать произвольно. Так же, как и в § 1, и при тех же условиях, доказывается сходимость полученных рядов.

В заключение отметим, что методом разложения в ряды можно решить и более общую задачу — для случая нескольких концентрических круговых колец, составленных из различных материалов.

Решение для этого случая будет отличаться от разобранных нами только тем, что система уравнений для нахождения коэффициентов будет содержать большее число уравнений с большим числом неизвестных.

SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ POUR UN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Par *S. Michlin* *(Leningrade)*

Dans ce mémoire nous étudions le problème plan de la théorie d'élasticité pour quelques cas de milieu hétérogéne. Nous considerons les cas, où le domaine est un cercle $(z) \leqslant 1$ où un anneau circulaire $\rho_2 \leqslant |z| \leqslant 1$, dont le matériel a des constantes de Lamé λ_2, μ_2 qui se trouvent à l'intérieur de l'anneau $1 \leqslant |z| \leqslant \rho$, avec des constantes de Lamé λ_1, μ_1. On obtient la solution en utilisant les formules connues de E. Goursat et N. Muschelišvili pour les fonctions biharmoniques et le développement en séries de Laurent.
