ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

К. И. Страхович (Ленинград)

В нашей работе „Двуразмерное движение вязкой несжимаемой жидкости“ [1] был рассмотрен случай установившегося движения жидкости при отсутствии окружной скорости $v_\theta = 0$ и при симметричности движения относительно оси z-ов. Эти предположения дают возможность основные уравнения движения вязкой жидкости привести к такому виду:

$$\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right)-\frac{\omega}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+\nu\right)+\frac{1}{r}\frac{D(\omega,\psi)}{D(r,z)}=0, \tag{1}$$

$$\omega=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \tag{2}$$

$$v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{3}$$

где ψ — функция тока, а ω — вихрь по оси, перпендикулярной к плоскости движения, причем было указано, что, если функция тока задана уравнениями $\psi=\chi(r)+\frac{az^2}{2}$ или $\psi=\chi(r)+az$, то система (1—3) может быть проинтегрирована. В предполагаемой работе мы рассматриваем еще два частных случая, при которых система (1—3) может быть проинтегрирована обычными методами.

§ 1. Допустим, что ω зависит только от r, т. е. $\omega=f(r)$, тогда уравнение (1) может быть представлено так:

$$\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}=0, \tag{4}$$

откуда следует, что $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ есть функция только от r, т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=g(r),\quad \psi=g(r)z+g_1(r). \tag{5}$$

Подставим значение ψ в уравнение (2), тогда имеем

$$z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}\right]+\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dg_1}{dr}\right]=\omega,$$

но, так как ω от z независимо, то должны существовать равенства

$$\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}=C=\text{const}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dg_1}{dr}\right]=\omega. \tag{7}$$

[1] Записки Г. Г. И., т. VI, § 3, стр. 31.

Из уравнения (6) найдем $g(r)$ в таком виде:

$$g(r)=\frac{1}{2}Cr^2+C_1. \tag{8}$$

Для нахождения $g_1(r)$ необходимо знать ω, которое определится из уравнения (4), если в него вместо $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ подставить значение $g(r)$ по формуле (8); тогда имеем такое линейное уравнение второго порядка для ω:

$$\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{C_1}{\nu}+\frac{Cr^2}{\nu}\right)\frac{d\omega}{dr}-\left(1+\frac{C_1}{\nu}+\frac{Cr_2}{\nu}\right)\frac{\omega}{r^2}=0,$$

или, если обозначить $a=1+\frac{C_1}{\nu}$ и $b=\frac{C}{\nu}$, то имеем

$$\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{a+br^2}{r}\frac{d\omega}{dr}-\frac{a+br^2}{r^2}\omega=0. \tag{9}$$

Найдя ω из этого уравнения, мы найдем $g_1(r)$ из уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dg_1}{dr}\right)=\omega, \tag{10}$$

откуда

$$g_1(r)=\int r\,dr\int\omega\,dr+\frac{1}{2}C_2r^2+C_3. \tag{11}$$

Зная $g(r)$ и $g_1(r)$ по формулам (8) и (11), мы после подстановки их в (5) найдем ψ, а зная ψ найдем v_r и v_z, т. е.

$$v_r=-\frac{1}{r}g(r)=-\frac{1}{2}Cr+C_1r^{-1},$$

$$v_z=\frac{z}{r}\frac{dg}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dg_1}{dr}=Cz+\int\omega\,dr+C_2. \tag{12}$$

Если иметь в виду, что в ω войдет хоть одна произвольная постоянная, то уравнения (12) содержат 5 произвольных постоянных, что позволяет нам решать такие пограничные задачи: при: $r=r_0$ и $r=r_1$, $v_r=a_0$, $r=r_1$, $v_r=a_1$ т. е. из уравнений (12) следует, что

$$a_0=-\frac{1}{2}Cr_0+C_1r_0^{-1}, \qquad a_1=-\frac{1}{2}Cr_1+C_1r_1^{-1},$$

откуда найдем C и C_1. Пусть кроме того при $r=r_0$ $v_z=Cz+b_0$ при $r=r_1$, $v_z=Cz+b_1$ и $\omega=C_4\Omega$, где Ω вполне определенное конечное решение уравнения (9), то тогда имеем

$$b_0=C_4\int^{r_0}\Omega(r)\,dr+C_2, \qquad b_1=C_4\int^{r_1}\Omega(r)\,dr+C_2, \tag{13}$$

откуда найдем C_2 и C_4.

Линии тока в данном случае будут определяться уравнениями

$$g(r)z+g_1(r)=\text{const}. \tag{14}$$

§ 2. Рассмотрим интегралы уравнения (9). Для этого преобразуем его к новым переменным x и u по формулам

$$\omega=x^\lambda u, \quad \sqrt{b}\,r=x; \tag{15}$$

тогда производные будут последовательно представлены так:

$$\frac{d\omega}{dr}=\frac{dx^{\lambda}u}{dx}\frac{dx}{dr}=\left[\lambda x^{\lambda-1}u+x^{\lambda}\frac{du}{dx}\right]\sqrt{b},$$

$$\frac{d^2\omega}{dr^2}=\frac{d^2x^{\lambda}u}{dx^2}\left(\frac{dx}{dr}\right)^2=\left[\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}u+2\lambda x^{\lambda-1}\frac{du}{dx}+x^{\lambda}\frac{d^2u}{dx^2}\right]b,$$

откуда, после подстановки в уравнение (9) и группировки членов, имеем

$$x^{\lambda+2}u''+[(2\lambda+a)x^{\lambda+1}+ax^{\lambda+3}]u^1+(\lambda-1)[(\lambda+a)x^{\lambda}+x^{\lambda+2}]u=0.$$

Полагая $\lambda=1$, мы получаем такое уравнение после сокращения на x^2:

$$xu''+(2+a+x^2)u^1=0, \tag{16}$$

откуда имеем

$$\frac{du'}{u'}=\left(-\frac{a+2}{x}-x\right)dx \tag{17}$$

и, значит,

$$\ln u'=-(a+2)\ln x-\frac{1}{2}x^2+\ln C_1', \tag{18}$$

т. е.

$$\frac{du}{dx}=C_1'x^{-(a+2)}e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{19}$$

и, значит,

$$u=C_1'\int x^{-(a+2)}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot dx+C_2'. \tag{20}$$

Заменяя x через r, окончательно имеем

$$\omega=C_1r\int r^{-(a+2)}e^{-\frac{1}{2}br^2}dr+C_2r. \tag{21}$$

Полагая $\omega=\omega_0$ при $r=r_0$, получаем

$$\omega_0=C_1r_0\int^{r_0}r^{-(a+2)}e^{-\frac{1}{2}br^2}dr+C_2r_0;$$

откуда, определяя C_2 и подставляя в (21), найдем

$$\omega=C_1r\int_{r_0}^{r}r^{-(a+2)}e^{-\frac{1}{2}br^2}dr+\omega\frac{r}{r_0}.$$

§ 3. Уравнение (4) может быть решено иным способом при предположении, что $\omega=f(r)$. Действительно, возьмем функцию $f(r)$ такой, чтобы одновременно удовлетворялись уравнения

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r}=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}=0; \tag{23}$$

тогда мы автоматически удовлетворим уравнению (4). Для нахождения ω проинтегрируем уравнение (22), тогда имеем

$$\omega=Cr. \tag{24}$$

Подставим (24) в уравнение (23), найдем

$$\frac{C}{r}-\frac{C}{r}=0,$$

т. е. тождество. Теперь мы можем найти ψ из уравнения (2), которое в нашем случае представлено так:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=Cr. \tag{25}$$

Обозначая через ψ_0 частный интеграл уравнения (25), мы можем представить общий его интеграл в таком виде:

$$\psi=\psi_0+\varphi, \tag{26}$$

где φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0. \tag{27}$$

Допустим, что функция φ может быть представлена таким рядом

$$\varphi=\sum R_k(r)\,Z_k(z); \tag{28}$$

тогда после подстановки в (27) мы найдем уравнения для определения R_k и Z_k

$$Z_k\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR_k}{dr}\right)+\frac{R_k}{r}\frac{d^2Z_k}{dz^2}=0,$$

откуда следует, что R_k и Z_k должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR_k}{dr}\right)-\frac{k^2}{r}R_k=0, \tag{29}$$

$$\frac{d^2Z_k}{dz^2}+k^2Z_k=0. \tag{30}$$

Интеграл уравнения (30) в общем случае может быть представлен в виде суммы показательных функций

$$Z_k=A_1\left(e^{ikz}+D_k e^{-ikz}\right). \tag{31}$$

Для интегрирования уравнения (29), которое мы представим в таком виде

$$r\frac{d^2R_k}{dr^2}-\frac{dR_k}{dr}-k^2rR=0; \tag{32}$$

произведем такую замену переменных

$$R_k=-ixu,\quad x=ikr; \tag{33}$$

тогда найдем

$$\frac{dR}{dr}=\frac{d(-ixu)}{dx}\frac{dx}{dr}=(xu'+u)\,k,$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d^2(-ixu)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dr}\right)^2=i\,(xu'+2u')\,k^2$$

и что после подстановки в уравнение (32) дает такое уравнение:

$$x^2u''+xu'+(x^2-1)\,u=0, \tag{34}$$

и, значит, u будет представляться через Бесселевы функции первого порядка, т. е.

$$u = C_1' I_1(x) + C_2' Y_1(x). \tag{35}$$

Зная u, мы найдем R по уравнению

$$R_k = R\left(r I_1(ikr) + E_k r Y_1(ikr)\right). \tag{36}$$

§ 4. Зная R_k и Z_k, мы определим ψ из такого ряда

$$\psi = \psi_0 + \sum R_k Z_k, \tag{37}$$

а, значит, скорости определятся из уравнений

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial z} - \frac{1}{r}\sum R_k \frac{dz_k}{dz}, \tag{38}$$

$$v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r}\sum Z_k \frac{dR_k}{dr}. \tag{39}$$

Полагая частный интеграл ψ_0 равным

$$\psi_0 = g(r)\,h(z) + g_1(r), \tag{40}$$

мы после его подстановки в уравнения (25) найдем $g(r)$, $h(z)$ и $g_1(r)$ из уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{dg}{dr} = \text{const}, \quad \frac{d^2h}{dz^2} = \text{const}, \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dg_1}{dr}\right] = Cr - \frac{dh^2}{dz^2}\frac{g(r)}{r}, \tag{41}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} g(r) &= A_1 r^2 + B_1, \quad h = A_2 z^2 + B_2 z + C_2, \\ g_1(r) &= \frac{C}{8} r^4 - \frac{A_1 A_2}{3} r^3 - A_2 B_1 r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + \frac{C_3}{2} r^2 + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Для нахождения пограничных условий подставим значения ψ_0, R_k и Z_k в выражение для ψ, тогда имеем

$$\psi = g(r)\,h(z) + g_1(r) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k r\left(I_1(ikr) + E_k Y_1(ikr)\right)\left(e^{ikz} + D_k e^{-ikz}\right).$$

Дифференцируя ψ по r и z, найдем

$$-rv_r = g(r)\frac{dh}{dz} + \sum_{k=1}^{\infty} ikC_k r\left(I_1 + E_k Y_1\right)\left(e^{ikz} - D_k e^{-ikz}\right),$$

$$rv_z = h(z)\frac{dg}{dr} + \frac{dg_1}{dr} + \sum_{k=1}^{\infty} ikC_k \frac{d}{dr}\left[r\left(I_1 + D_k Y_1\right)\right]\left(e^{ikz} + E_k e^{-ikz}\right)$$

при $r = r_0$ $v_r = 0$, значит

$$g(r_0) = 0, \quad I_1(ikr_0) + E_k Y_1(ikr_0) = 0,$$

откуда определяется коэффициент B_1 и D_k по равенствам

$$B_1 = -A_1 r_0^2, \quad D_k = -\frac{I_1(ikr_0)}{Y_1(ikr_0)}.$$

Прежде чем перейти к пограничному условию для $v_z = 0$, мы поставим еще одно условие для v_z, а именно: положим, что $v_r = 0$ при

$z=z_0$, тогда имеем

$$\frac{dh}{dz}=2A_2z_0+B_2=0,\quad e^{ikz_0}+E_ke^{-ikz_0}=0,$$

т. е.

$$B_2=-2A_2z_0,\qquad E_k=e^{2ikz_0}.$$

Найдя E_k и B_2 мы можем перейти к определению коэффициентов C_k по формулам Euler'а—Fourier. Таким образом, полученные ряды будут сходиться для конечных значений r, и, значит, они дают возможность найти движение в пограничной зоне.

§ 5. В некоторых случаях представляется более удобным ввести вместо цилиндрических координат координаты сферические для нахождения решений уравнения (17), т. е. заменить координат r и z координатами R и τ по формулам

$$r=R\sin\tau,\quad z=R\cos\tau,\quad R=\sqrt{r^2+z^2},\quad \operatorname{tg}\tau=\frac{r}{z}. \tag{43}$$

Имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{44}$$

и так как

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}\Delta_1R+2\frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\tau}\Delta_1(R,\tau)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}\Delta_1\tau+\frac{\partial\psi}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\Delta\tau,$$

$$\Delta_1R=\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2=1;\quad \Delta R=\frac{\partial^2R}{\partial z^2}+\frac{\partial^2R}{\partial r^2}=\frac{1}{R};$$

$$\Delta_1\tau=\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial r}\right)^2=\frac{1}{R^2};\quad \Delta\tau=\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}=0;$$

$$\Delta_1(R_1\tau)=\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial r}\frac{\partial\tau}{\partial r}=0;$$

мы имеем

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}; \tag{45}$$

но с другой стороны

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial r}=\frac{\partial\psi}{\partial R}\sin\tau+\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\cos\tau}{R}. \tag{46}$$

Подставляя (45) и (46) в выражение (44), получаем

$$\omega=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\frac{1}{R\sin\tau}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{1}{R^2\operatorname{tg}\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]. \tag{47}$$

При наших предположениях $\omega=Cr=CR\sin\tau$, и, значит, в сферических координатах мы имеем такое уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{1}{R^2\operatorname{tg}\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=CR^2\sin^2\tau, \tag{48}$$

решение которого мы будем находить способом, аналогичным способу § 5, а именно: положим

$$\psi=\psi_0+\varphi, \tag{49}$$

где ψ_0 частный интеграл (48), а φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}-\frac{1}{R^2\operatorname{tg}\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=0. \tag{50}$$

§ 6. Для нахождения φ допустим, что φ представляется таким рядом

$$\varphi = \sum L(R)\, T(\tau), \tag{51}$$

мы получаем

$$T_k \frac{d^2 L_k}{dR^2} + \frac{L}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} - \frac{L}{R^2 \operatorname{tg} \tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \tag{52}$$

откуда получаем такие два уравнения для L_k и T_k:

$$\frac{\partial^2 L_k}{dR^2} = \frac{k L_k}{R^2}, \tag{53}$$

$$\frac{d^2 T_k}{d\tau^2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \tau} \frac{d T_k}{d\tau} + k T_k = 0. \tag{54}$$

Интеграл уравнения (53) представляется в таком виде:

$$L_k = A_k R^{\alpha_1} + B_k R^{\alpha_2}, \tag{55}$$

где α_1 и α_2 корни уравнения

$$\alpha^2 - \alpha - k = 0, \tag{56}$$

т. е.

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + k}.$$

Уравннеие (54) мы преобразуем к новой переменной $x = \cos \tau$, тогда имеем:

$$\frac{dT_k}{d\tau} = -\frac{dT_k}{dx} \sin \tau = -\frac{dT}{d\tau} \sqrt{1 - x^2},$$

$$\frac{d^2 T_k}{d\tau^2} = \frac{d^2 T_k}{d\tau^2} \sin^2 \tau - \frac{dT_k}{dx} \cos \tau = \frac{d^2 T}{dx^2}(1 - x^2) - \frac{dT_k}{dx} x,$$

так как

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

и, значит, получаем

$$(1 - x^2) \frac{d^2 T_k}{dx^2} + k T_k = 0. \tag{57}$$

Здесь мы не будем останавливаться на решении уравнения (57), к которому может быть применена общая теория дифференциальных уравнений второго порядка.

§ 7. Найдя L_k и T_k, мы можем перейти к определению частного интеграла уравнения (48). Для этого можно положить

$$\psi_0 = R^{\beta} \Psi(\tau). \tag{59}$$

Тогда получаем

$$\beta(\beta - 1) R^{\beta-2} \Psi(\tau) + R^{\beta-2} \frac{d^2 \Psi}{d\tau^2} - \frac{R^{\beta-2}}{\operatorname{tg} \tau} \frac{d\Psi}{d\tau} = C R^2 \sin \tau.$$

Сокращая на R^2 и полагая $\beta = 4$, найдем уравнения для Ψ:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\tau^2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \tau} \frac{d\Psi}{d\tau} + 12 \Psi = C \sin \tau, \tag{60}$$

или, после замены $\cos x$ на τ, получим

$$(1 - x^2) \frac{d\Psi}{dx^2} + 12 \Psi = C(1 - x^2). \tag{61}$$

Пользуясь методом неопределенных множителей, мы можем написать интеграл этого уравнения в таком виде:

$$\Psi(x) = M_1(x) T_1(x) + M_2(x) T_2(x), \tag{62}$$

где T_1 и T_2 два независимых решения уравнения (61) без свободного члена, а M_1 и M_2 определяются из уравнений:

$$T_1(x) \frac{dM_1}{dx} + T_2(x) \frac{dM_2}{dx} = 0,$$

$$\frac{dT_1}{dx} \frac{dM_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx^2} \frac{dM_2}{dx} = 0.$$

Зная ψ_0, T_k, Z_k, мы найдем ψ, а зная ψ по формулам:

$$v_R = \frac{1}{R^2 \sin\tau} \frac{\partial\psi}{\partial R}, \qquad v_\tau = -\frac{1}{R \sin\tau} \frac{\partial\psi}{\partial R}, \tag{63}$$

мы найдем скорости.

1 сентября 1933 г.

SUR UN CAS DE MOUVEMENT D'UN LIQUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

Par *C. Strakhovitch* (*Leningrade*)

Resumé

Les équations du mouvement d'un liquide visqueux incompressible se réduisent à un système d'équations ordinaires linéaires de second ordre, si l'on suppose que le mouvement est symmétrique autour d'un axe et que le tourbillon est fonction de la distance jusqu'à l'axe de symmetrie.
