О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРОБЕЖНОГО МОМЕНТА, РАССМАТРИВАЕМОГО, КАК ВЕКТОР

А. А. Акопян (Эривань)

1. Обозначения. α) Векторы обозначены буквами с черточкой (вместо стрелки) над ними: $\overline{a}$, $\overline{B}$...

Та же буква без черточки над ней означает численное значение вектора: a есть численное значение $\overline{a}$... Единичные векторы обозначены буквами с шапочками над ними: $\hat{a}$, $\hat{B}\cdots$

Таким образом

$$\overline{a} = \hat{a}a \tag{1}$$

$\overline{a}\times\overline{b}$ — векторное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$,
$\overline{a}\cdot\overline{b}$ — скалярное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$,
$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$ — двойное векторное произведение,

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{b}\,(\overline{a}\cdot\overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a}\cdot\overline{b}). \tag{2}$$

Производные по времени обозначены точкой над буквой:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} \equiv \dot{\overline{a}}, \quad \frac{da}{dt} \equiv \dot{a}.$$

β) A_1, A_2, ..., A_s, ... суть точки неизменяемой системы; m_1, ... m_s, ..., — массы соответствующих точек.

Расстояние точки A_s от некоторой точки A пространства $\overline{AA_s} \equiv \overline{r}_s$. Если через A проведена ось AK, параллельная единичному вектору $\hat{k}$ (рис. 1), то

$$\overline{r}_s = \overline{k}_s + \overline{a}_s, \tag{3}$$

где $\overline{k}_s \parallel AK \parallel \hat{k}$; $\overline{a}_s \perp \overline{k}_s$, $\overline{a}_s \perp \hat{k}$.

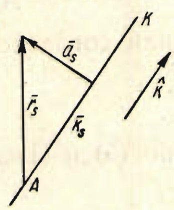

Рис. 1.

Скорость и ускорение A_s обозначены через v_s и $\dot{\overline{v}}_s$; угловая скорость — через $\overline{\omega}$. $\overline{M}_A$ — главный момент внешних сил относительно точки A.

Теорема: „Главный момент внешних сил равен главному моменту векторов $m_s\dot{\overline{v}}_s$" может быть выражена так:

$$\overline{M}_A = \sum M_A\,(m_s\dot{\overline{v}}_s). \tag{4}$$

2. Когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси AK,

$$\dot{\overline{v}}_s = \dot{\overline{r}}_s = \overline{\omega}\times\overline{r}_s, \quad \dot{\overline{v}}_s = \dot{\overline{\omega}}\times\overline{r}_s + \overline{\omega}\times\dot{\overline{r}}_s.$$

Следовательно $\dot{\overline{v}}_s = \dot{\overline{\omega}}\times\overline{r}_s + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}_s)$.

В виду неподвижности оси AK $\dot{\overline{\omega}} \parallel \overline{\omega} \parallel \hat{k}$. (5)

Раскроем двойное векторное произведение $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_s)$ по формуле (2); вместо $\bar{r}_s$ подставим $a_s+\bar{k}_s$. Так как согласно (3) и (5) $\bar{\omega}\cdot\bar{a}_s=0, \dot{\bar{\omega}}\times\bar{k}_s=0$, то мы получим

$$\dot{\bar{v}}_s=\dot{\bar{\omega}}\times\bar{a}_s-\bar{a}_s\omega^2. \tag{6}$$

Благодаря (6) теорема (4) — для случая вращения твердого тела относительно неподвижной оси — напишется так:

$$\overline{M}_A=\sum\bar{r}_s\times m_s(\dot{\bar{\omega}}\times\bar{a}_s-\bar{a}_s\omega^2)$$

или по (2)

$$\overline{M}_A=\dot{\bar{\omega}}\times\sum m_s\bar{r}_s\cdot\bar{a}_s-\sum\bar{a}_s m_s(\bar{r}_s\cdot\dot{\bar{\omega}})-\omega^2\sum m_s\bar{r}_s\times\bar{a}_s.$$

Согласно (3)

$$\bar{r}_s\cdot\bar{a}_s=a_s^2,\quad \bar{r}_s\times\bar{a}_s=\bar{k}_s\times\bar{a}_s$$

из (1), (3) и (5) следует, что

$$\bar{r}_s\cdot\dot{\bar{\omega}}=\bar{k}_s\cdot\dot{\bar{\omega}}=k_s\dot{\omega}.$$

Поэтому

$$\overline{M}_A=\dot{\bar{\omega}}\sum m_s a_s^2-\dot{\omega}\sum k_s m_s\bar{a}_s-\omega^2\sum m_s\bar{k}_s\times\bar{a}_s. \tag{7}$$

В этом выражении $\sum m_s a_s^2\equiv I_{AK}$ есть момент инерции твердого тела относительно оси AK.

Положим

$$\overline{A}_k\equiv-\sum m_s\bar{k}_s\times\bar{a}_s \tag{8}$$

(здесь A — начало радиус-векторов $\bar{r}_s$, а индекс (k) указывает на единичный вектор $\hat{k}$, которому параллельна ось AK). Не трудно убедиться, что в (7)

$$-\sum k_s m_s\bar{a}_s=\overline{A}_k\times\hat{k}.$$

В самом деле по (8)

$$\overline{A}_k\times\hat{k}=-(\sum m_s\bar{k}_s\times\bar{a}_s)\times\hat{k}=\hat{k}\times\sum m_s\bar{k}_s\times\bar{a}_s$$

или согласно (1), (2), (3)

$$\overline{A}_k\times\hat{k}=-\sum m_s k_s\bar{a}_s$$

по (5) и (1) $\overline{A}_k\times\hat{k}\,\dot{\omega}=\overline{A}_k\times\dot{\bar{\omega}}$; поэтому (7) можно переписать так:

$$\overline{M}_A=I_{AK}\dot{\bar{\omega}}+\overline{A}_k\times\dot{\bar{\omega}}+\overline{A}_k\,\omega^2. \tag{7'}$$

В (7') векторы $\dot{\bar{\omega}}$, $\overline{A}_k$ и $\overline{A}_k\times\dot{\bar{\omega}}$ взаимно перпендикулярны, так как, $\overline{A}_k\perp\hat{k}$ [по (8)] и $\dot{\bar{\omega}}\parallel\hat{k}$ [по (5)]. Таким образом $\overline{M}_A$ имеет три взаимно перпендикулярные составляющие.

В виду важности теорем (4) и (7') приобретают интерес свойства вектора $\overline{A}_k$. Между тем, насколько мне известно, только у Jaumann'a [Die Grundlagen der Bewegungslehre (Leipzig, Barth, 1905), § 262, стр. 170—174] имеются указания на существование вектора $\overline{A}_k$. На его свойствах Jaumann не останавливается.

Некоторые из свойств вектора $\overline{A_k}$ исследуются в этой работе.

3. Прежде всего установим связь вектора $\overline{A_k}$ с центробежным моментом. Для этого выберем координатную систему $AXYZ$ так, чтобы AZ совпала с AK; положение же взаимно-перпендикулярных осей AX, AY в плоскости $\sigma \perp AK$ может быть вполне произвольны.

Если $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ — единичные векторы, параллельные осям AX, AY, AZ, то $\overline{a_s} = \hat{i}\,x_s + \hat{j}\,y_s$, $\overline{k_s} = \hat{k}\,z_s\ (= \hat{k}\,k_s)$, где x_s, y_s, z_s — координаты A_s. Поэтому

$$\overline{k} \times \overline{a_s} = -\,\hat{i}\,x_s + \hat{j}\,y_s$$

и (8) переходит в

$$\overline{A_k} = \hat{i}\,\sum m_s y_s z_s - \hat{j}\,\sum m_s z_s x_s. \tag{8}$$

Отсюда следует, что проекции $\overline{A_k}$ на оси AX, AY, AZ соответственно равны $\sum m_s y_s z_s$, $(-\sum m_s z_s x_s)$, 0. Таким же образом получили бы, что проекции $\overline{A_i}$ на эти оси равны 0, $\sum m_s z_s x_s$, $(-\sum m_s x_s y_s)$. Следовательно каждая из сумм $\sum m_s x_s y_s$, $\sum m_s y_s z_s$, $\sum m_s z_s x_s$, обычно называемая центробежным моментом, может быть рассматриваема как проекция одного из векторов $\overline{A_i}$, $\overline{A_j}$, $\overline{A_k}$. Поэтому целесообразно самые эти векторы называть центробежными моментами. Так, $\overline{A_k}$ — центробежный момент относительно оси AK в точке A.

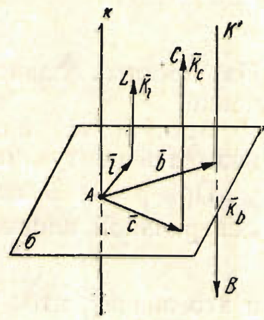

Рис. 2.

4. Возьмем две произвольные точки A и B. Проведем оси AK и BK', параллельные единичному вектору $\hat{k}$. Предполагая известным $\overline{A_k}$, определим $\overline{B}$. Центр масс назовем C (рис. 2). Расстояния $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AL}$, $\overline{AA_s}$ точек B, C, L, A_s от A разложим на две составляющие: параллельно $\hat{k}$ и перпендикулярно $\hat{k}$. Параллельные составляющие назовем соответственно $\overline{k_b}$, $\overline{k_c}$, $\overline{k_l}$, $\overline{k_s}$, а перпендикулярные — $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{l}$, $\overline{a_s}$.

Так что (рис. 2)

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{k_b} + \overline{b}; \quad \overline{AC} = \overline{k_c} + \overline{c}; \\ \overline{AL} &= \overline{k_l} + \overline{l}; \quad \overline{AA_s} = \overline{k_s} + \overline{a_s}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Расстояния же $\overline{CB}$, $\overline{CL}$ согласно (9) равняются:

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = (\overline{b} - \overline{c}) + (\overline{k_b} - \overline{k_c});$$

или, положив для краткости

$$\overline{b} - \overline{c} \equiv \overline{\beta}, \quad \overline{k_b} - \overline{k_c} \equiv \overline{\alpha_b}; \quad \overline{l} - \overline{c} \equiv \overline{\lambda}, \quad \overline{k_l} - \overline{k_c} \equiv \overline{\alpha_l}, \tag{9'}$$

имеем

$$\overline{CB} = \overline{\beta} + \overline{\alpha_b}; \quad \overline{CL} = \overline{\lambda} + \overline{\alpha_l} \tag{9''}$$

Расстояние $\overline{BA_s} = \overline{AA_s} - \overline{AB}$. Согласно (9)

$$\overline{BA_s} = (\overline{a_s} - \overline{b}) + (\overline{k_s} - \overline{k_l}) \tag{9''''}$$

Поэтому на основании определения (8) центробежного момента

$$\overline{B_k} = \sum m_s (\overline{a_s} - \overline{b} \times (\overline{k_s} - \overline{k_l}) = \sum m_s \left[\overline{a_s} \times \overline{k_s} - \overline{a_s} \times \overline{k_b} - \overline{b} \times (\overline{k_s} - \overline{k_b})\right].$$

Обозначив массу всего тела через μ, имеем по свойству центра масс

$$\mu = \sum m_s;\ \sum m_s \overline{a}_s = \mu\,\overline{c};\ \sum m_s(\overline{k}_s - \overline{k}_b) = \mu(\overline{k}_c - \overline{k}_b),$$

Поэтому, раскрыв скобки в выражении для B_k, получим

$$\overline{B}_k = \overline{A}_k + \mu[\overline{b}\times(\overline{k}_b - \overline{k}_c) - \overline{c}\times\overline{k}_b] \tag{10}$$

или на основании (9')

$$\overline{B}_k = (\overline{A}_k - \mu\,\overline{c}\times\overline{k}_c) + \mu\overline{\beta}\times\overline{\alpha}_b. \tag{10'}$$

В (10') вектор $\mu\beta\times\overline{\alpha}_b$ зависит от выбора точки B. А чтобы определить смысл вектора $\overline{A}_k - \mu\,\overline{c}\times\overline{k}_c$, положим $\overline{\beta}=0$, $\overline{\alpha}_b = 0$. В этом случае точка B совпадает с центром C масс, и мы имеем

$$\overline{A}_k - \mu\,\overline{c}\times\overline{k}_c = \overline{C}_k \tag{10''}$$

и поэтому

$$\overline{B}_k = \overline{C}_k + \mu\overline{\beta}\times\overline{\alpha}_b. \tag{10'''}$$

Из простых зависимостей (10)—(10''') можно вывести ряд заключений.

Всякую ось или плоскость, проходящую через центр масс, будем называть центральной осью, центральной плоскостью.

При $\overline{\beta}=0$ B лежит на центральной оси $\parallel\hat{k}$; при $\overline{\alpha}_b = 0$ B лежит на центральной плоскости $\perp\hat{k}$. Из (10''') следует, что при

$$\overline{\beta}=0,\ \text{или}\ \overline{\alpha}_b = 0\ \ \overline{B}_k = \overline{C}_k, \tag{11}$$

а это значит, что

(11)' Во всех точках центральной оси $\parallel\hat{k}$ и центральной плоскости $\perp\hat{k}$ центробежные моменты относительно осей $\parallel\hat{k}$ одинаковы и равны $\overline{C}_k$.

Как известно из теории моментов инерции, ось BZ называется „главной осью в точке B" и точка B — „главной точкой", когда при начале координат в B

$$\Sigma m_s z_s x_s = 0\ \text{и}\ \Sigma m_s y_s z_s = 0,$$

т. е. [см. (8')], когда $\overline{B}_k = 0$. В последующем будем обозначать главную точку через L, а ось, главную в L и параллельную $\hat{k}$, — через LK'.

Прежде всего ясно, что не всякая ось, параллельная $\hat{k}$, может быть главной. Так, если ось BK' находится на расстоянии $\overline{\beta}$ от центра масс и $\overline{C}_k$ не параллелен $\mu\overline{\beta}\times\overline{\alpha}_b$, то в (10''') ни при каком выборе $\overline{\alpha}_b$ сумма $\overline{C}_k + \mu\overline{\beta}\times\overline{\alpha}_b$ не обратится в 0; а следовательно на оси BK' нет главной точки, ось BK' — не главная.

Допустив возможность существования главных осей, параллельных $\hat{k}$, заменим в (10''') буквы B, β и α_b буквами L, λ, α_l и положим $\overline{L}_k = 0$; тогда, так как $\overline{\beta}\times\overline{\alpha}_b = -\overline{\alpha}_b\times\overline{\beta}$,

$$\mu\overline{\alpha}_e\times\overline{\lambda} = \overline{C}_k. \tag{12}$$

Вспомним, что $\overline{CL}$ — расстояние главной точки L от центра C масс, а $\overline{\alpha}_l$ и $\overline{\lambda}$ — составляющие $\overline{CL}$; $\overline{\alpha}_l\parallel\hat{k}$, $\overline{\lambda}\perp\hat{k}$; $\overline{C}_k$ — как постоянный вектор — имеет постоянное направление.

Из (12) следует, что векторы $\overline{\alpha}_l$, $\overline{\lambda}$, $\overline{C}_k$ взаимно перпендикулярны, и поэтому направление $\overline{\lambda}$ постоянно.

Это значит (см. рис. 2), что для всей совокупности главных осей, параллельных $\hat{k}$, расстояния $\overline{CL}$ находятся в одной и той же плоскости, проведенной из C нормально к $\overline{C}_k$ (и параллельно $\hat{k}$).

Так как $(\overline{\alpha}_e, \overline{\lambda})=\frac{\pi}{2}$, то (12) можно написать и так:

$$\alpha_l\lambda=C_k=\text{const}, \tag{12'}$$

где α_l, λ и C_k суть численные значения $\overline{\alpha}_e$, $\overline{\lambda}$, $\overline{C}_k$; α_e и λ — координаты точки L, когда за начало принята точка C.

Таким образом (12) и (12′) означают следующее:

(13) Из ∞^2 осей, параллельных $\hat{k}$, только ∞^1 являются главными. Все главные оси расположены в центральной плоскости, нормальной центробежному моменту $\overline{C}_k$.
Геометрическим местом главных точек служит равносторонняя гипербола, уравнение которой $\alpha_e\lambda=C_k$, когда за начало принят центр масс.

Так как $\overline{\alpha}_e\perp\overline{\lambda}$, то из (12) следует, что каждому $\overline{\alpha}_e$ соответствует только один вектор $\overline{\lambda}$. К тому же $\overline{\alpha}_e=\text{const}$ — это уравнение плоскости, $\perp\hat{k}$ и находящейся на расстоянии $\overline{\alpha}_e$ от C.
Так что

(13′) На всякой плоскости, не проходящей через центр масс, существует только одна точка, в которой ось нормальная к плоскости, оказывается главной.
На основании же (11′) или в каждой точке центральной плоскости ось, нормальная к ней, оказывается главной, или же на этой плоскости (для осей, нормальных к ней) нет ни одной главной точки.

5. Рассмотрим подробнее тот случай, когда точка B берется на оси AK. Теперь $\overline{b}=0$, $\overline{AB}=\overline{k}_b$, и поэтому (10) напишется так:

$$\overline{B}_k=\overline{A}_k-\mu\,\overline{c}\times\overline{k}_b. \tag{14}$$

Каждый из векторов $\overline{A}_k$ и $\overline{B}_k$ можно разложить на две составляющие, из которых одна параллельна $\overline{c}$, а другая параллельна $\overline{c}\times\hat{k}$, (Возможность такого разложения вытекает непосредственно из того, что $\overline{A}_k\perp k$, $\overline{B}_k\perp\hat{k}$, $\overline{c}\perp\hat{k}$, $\overline{c}\times\hat{k}\perp\hat{k}$, так что $\overline{A}_k$, $\overline{B}_k$, $\overline{c}$ и $\overline{c}\times\hat{k}$ — компланары).
Таким образом

$$\left.\begin{aligned}\overline{B}_k=\overline{B}'_k+\overline{B}''_k;\ \overline{A}_k=\overline{A}'_k+\overline{A}''_k\\ \overline{B}'_k\parallel\overline{A}'_k\parallel\overline{c}',\quad \overline{B}''_k\parallel\overline{A}''_k\parallel\overline{c}\times\overline{k}_b\parallel\overline{c}\times\hat{k}\end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Введя в (14) вместо $\overline{B}_k$ и $\overline{A}_k$ их составляющие, получим

$$\overline{B}'_k-\overline{A}'_k=\overline{A}''_k-\overline{B}''_k-\mu\,\overline{c}\times\overline{k}_b. \tag{16}$$

Обе части (16) порознь равны 0, так как в противном случае левая и правая части были бы взаимно перпендикулярны и (16) не имела бы места.

Следовательно

$$\overline{B}'_k=\overline{A}'_k=\hat{c}\,\overline{A}_k\cdot\overline{c}, \tag{17'}$$

$$\overline{B}''_k=\overline{A}_k-\mu\,\overline{c}\times\overline{k}_b. \tag{17''}$$

В (17″) численное значение $\mu\bar{c}\times\bar{k}_b$ прямо-пропорционально $\bar{k}_b$, так как $\bar{c}=\mathrm{const}$ и $\bar{c}\perp\bar{k}_b$. Таким образом всегда можно выбрать $\bar{k}_b$ так, чтобы $\bar{B}''_k=0$.

Легко убедиться, что

$$\bar{B}''=0 \text{ при } \overline{AB}=\bar{k}_b=\frac{\bar{A}''_k\times\bar{c}}{\mu c^2}=\frac{\bar{A}_k\times\bar{c}}{\mu c^2}. \tag{18}$$

Действительно; умножим обе части (17″) векторно на $\bar{c}$. При $\bar{B}''_k=0$ получим $\bar{A}''_k\times\bar{c}=\mu(\bar{c}\times\bar{k}_b)\times\bar{c}$. Но $\bar{A}'_k\parallel\bar{c}$, поэтому $\bar{A}''_k\times\bar{c}=\bar{A}_k\times\bar{c}$; а $\mu(\bar{c}\times\bar{k}_b)\times\bar{c}=\mu\bar{k}_b c^2$.

Отсюда непосредственно получается (18).

Если же ось AK — центральная (т. е. проходит через центр масс), то $\bar{c}=0$, и (14) дает (см. также (11′))

$$\bar{B}_k=\bar{A}_k. \tag{19}$$

Формулы (15—19) приводят к следующему заключению:

Во всех точках произвольной центральной оси центробежный момент относительно оси один и тот же. Если же ось не центральная, то центробежные моменты в различных точках неодинаковы.

(20) Составляющая ($\bar{B}'_k$) центробежного момента, параллельная расстоянию ($\bar{c}$) центра масс от оси, одна и та же во всех точках оси. Составляющая же ($\bar{B}''_k$), параллельная $\bar{c}\times\bar{k}$, изменяется с изменением положения точки B на оси и обращается в 0 при

$$\bar{k}_b=\overline{AB}=\frac{\bar{A}_k\times\bar{c}}{\mu c^2}.$$

Таким образом при переходе от одной точки нецентральной оси к ее другой точке центробежной момент, оставаясь нормальным к оси, изменяется и по величине и по направлению.

Обозначим через D ту точку, в которой $\bar{D}''_k=0$ и $\bar{D}_k=\bar{D}'_k\parallel\bar{c}$. Вместо A за начальную точку примем D. Тогда для произвольной точки B оси $\bar{k}_b=\overline{DB}=\hat{k}z$, где $z=DB$; $z>0$ по одну сторону от D, $z<0$ по другую сторону. Взамен (15) теперь имеем

$$\bar{B}_k=\bar{D}_k-\mu(\bar{c}\times\hat{k})z=\bar{D}_k+\mu(\hat{k}\times\bar{c})z. \tag{21}$$

Так как $\bar{D}_k=\bar{D}'_k\parallel\bar{c}$, а $(\hat{k}\times\bar{c})\perp\bar{c}$, то $B_k\geq D_k$ всегда.

Следовательно центробежный момент D_k имеет минимальное абсолютное значение.

На оси возьмем две точки B_1 и B_2, симметричные относительно D. Абсолютное значение z_1 и z_2 обозначим через z; $z_1=z$, $z_2=-z$. Согласно (21)

$$\left.\begin{aligned}\bar{B}_{1k}&=\bar{D}_k+\mu(\hat{k}\times\bar{c})z,\\ \bar{B}_{2k}&=\bar{D}_k-\mu(\hat{k}\times\bar{c})z.\end{aligned}\right\} \tag{21′}$$

Очевидно абсолютные значения центробежных моментов $\bar{B}_{1k}$ и $\bar{B}_{2k}$ равны. Угол φ, образованный векторами $\bar{B}_{1k}$ и $\bar{B}_{2k}$, можно определить следующим образом:

Так как

$$\bar{c}\perp\hat{k} \text{ и } \bar{D}_k\parallel\bar{c},\quad (\hat{k}\times\bar{c})^2=c^2 \text{ и } \bar{D}_k\cdot(\hat{k}\times\bar{c})=0,$$

поэтому

$$(B_{1k})^2 = D_k^2 + \mu c^2 z^2 \text{ и } \overline{B}_{1k} \cdot \overline{B}_{2k} = (B_{1k})^2 \cos\varphi = D_k^2 - \mu c^2 z^2.$$

Таким образом

$$\cos\varphi = \frac{D_k^2 - \mu c^2 z^2}{D_k^2 + \mu c^2 z^2}. \tag{22}$$

Угол же $\psi = \frac{\varphi}{2}$ между центробежными моментами $\overline{B}_k$ и $\overline{D}_k$ выражается — как в этом не трудно убедиться — так:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu cz}{|D_k|}. \tag{22'}$$

Из (22′) видно, что $\operatorname{tg}\psi$ пропорционален расстоянию $DB = z$.

Если ось AK — главная, то в главной точке $\overline{L}_k = 0$, и потому его обе составляющие порознь равны 0: $\overline{L}'_k = 0$, $\overline{L}''_k = 0$. Но на каждой (не центральной) оси существует только одна точка D, в которой $\overline{D}''_k = 0$ и $\overline{D}_k = \overline{D}'_k$. Отсюда ясно, что AK может иметь главную точку только тогда, если $D'_k = 0$. В этом случае точки D и L идентичны.

Так как составляющая $\overline{D}_k'$, параллельная $\overline{c}$, одинакова для всех точек оси [см. (17′)], то условие $\overline{D}'_k = 0$ равносильно $\overline{A}'_k = 0$ или $\overline{A}_k \cdot \overline{c} = 0$. Таким образом, если условие

$$\overline{A}_k \cdot \overline{c} = 0 \tag{23}$$

соблюдено, то ось AK — главная; ее главная точка L находится на расстоянии

$$\overline{AL} = \overline{k}_l = \frac{\overline{A}_k \times \overline{c}}{\mu c^2}. \tag{18}$$

Приняв за начальную точку L вместо A и имея в виду, что $\overline{L}_k = 0$, из (21) легко получим

$$\overline{B}_k = -\mu(\overline{c} \times \hat{k}) z = \mu(\hat{k} \times \overline{c}) z, \tag{24}$$

где $\overline{LB} = \widehat{kz}$, $LB = z$.

Полученные результаты можно формулировать так:

> На любой оси (AK), не проходящей через центр масс, существует одна точка (D), в которой центробежный момент ($\overline{D}_k$) параллелен расстоянию ($\overline{c}$) центра масс от этой оси и достигает минимального абсолютного значения. Только точка D и может быть главной; но для этого требуется дополнительное условие $\overline{A}_k \cdot \overline{c} = 0$.
>
> (25) Центробежные моменты основительно главной оси во всех ее точках параллельны постоянному (для данной оси) вектору $\hat{k} \times \overline{c}$. Абсолютное значение центробежного момента прямо-пропорционально расстоянию $LB = z$ точки B от главной точки. Моменты относительно главной оси в двух точках, симметричных относительно L, равны по абсолютной величине и антипараллельны.

Свойства центробежного момента, выражаемые формулами (14—20), (22—25), аналогичны свойствам главного момента сил (или, общее, системы скользящих векторов). В самом деле, обозначив главный вектор через $\overline{F}$, а главный момент относительно точки $\overline{A}$ через M_A, имеем

$$\overline{M}_B = \overline{M}_A + \overline{BA} \times \overline{F}.$$

Формулу же (14) можно написать так:

$$\overline{B}_k = \overline{A}_k + (\mu \overline{k}_b) \times \overline{c}.$$

Сопоставив свойства главного момента со свойствами центробежного момента, мы убедимся, что $\mu \overline{k}_b$ — когда точка B находится на оси AK — играет роль расстояния $\overline{BA}$, а $\overline{c}$ (расстояние центра масс от оси AK) — роль главного вектора $\overline{F}$.

Например, разложим главный момент на составляющие $\overline{M}' \parallel \overline{F}$ и $\overline{M}'' \perp \overline{F}$; тогда, как известно $\overline{M}_B' = \overline{M}_A'$, эта зависимость аналогична (17'):

$$\overline{B}_k' = \overline{A}_k'.$$

6. Из формул (10) и (10') можно вывести и другие заключения. Определим, например, геометрическое место тех точек, в которых центробежные моменты относительно параллельных осей равны.

Пусть оси AK и BK' параллельны $\hat{k}$. Положив в (10') $\overline{B}_k = \overline{A}_k$, имеем

$$\overline{\beta} \times \overline{\alpha}_b = \overline{c} \times \overline{k}_c = \text{const}, \tag{26}$$

где $\overline{\alpha}_b \parallel \overline{k}_c \parallel \hat{k}$, $\overline{\beta} \perp \overline{\alpha}_b$, $\overline{c} \perp \overline{k}_c$.

Из (26) вытекает, что векторы $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}_b$, $\overline{c}$, $\overline{k}_c$ — компланарны. Следовательно

1° $$\overline{\beta} \parallel \overline{c},$$

т. е. оси AK и BK' и центр масс находятся в одной плоскости.

2° $$\beta \alpha_b = c k_c. \tag{26'}$$

Когда $\overline{c} = 0$ (A находится на центральной оси $\parallel \hat{k}$) или $\overline{k}_c = 0$ (A находится на центральной плоскости $\perp \hat{k}$), левая часть (26) или (26') равна 0; т. е. точки B, удовлетворяющие условию $\overline{B}_k = \overline{A}_k$, находятся как на центральной оси $\parallel \hat{k}$, так и на центральной плоскости $\perp \hat{k}$. Эти частные случаи рассмотрены в (11'). Таким образом (26) и (26') означают следующее:

(27) Когда точка A находится на центральной оси $\parallel \hat{k}$ или на центральной плоскости $\perp \hat{k}$, то геометрическим местом точек B, в которых $\overline{B}_k = \overline{A}_k$, является центральная плоскость $\perp \hat{k}$ вместе с центральной осью $\parallel \hat{k}$.

Если же A не находится ни на центральной оси $\parallel \overline{k}$, ни на центральной плоскости $\perp \overline{k}$, то все оси, параллельные $\overline{k}$, относительно которых в их отдельных точках B, $\overline{B}_k = \overline{A}_k$, расположены в центральной плоскости, проходящей через AK. Геометрическое же место точек B — равносторонняя гипербола, уравнение которой $\beta \alpha_b = c k_c$, когда за начало принят центр масс.

Определим еще те точки пространства, в которых центробежные моменты относительно параллельных осей параллельны. Положим в (10') $\overline{B}_k = \overline{A}_k$; умножим обе части векторно на $\overline{A}_k$; так как $\overline{A}_k \times \overline{A}_k = 0$ и — в виду параллельности $\overline{B}_k$ и $\overline{A}_k - \overline{B}_k \times \overline{A}_k = 0$, то получим

$$\overline{A}_k \times (\overline{c} \times \overline{k}_c) = \overline{A}_k \times (\overline{\beta} \times \overline{\alpha}_b). \tag{28}$$

Раскроем двойные векторные произведения, имея в виду, что $\overline{A}_k \cdot \overline{k}_c = 0$, $\overline{A}_k \cdot \overline{\alpha}_b = 0$; тогда

$$\overline{\alpha}_b (\overline{A}_k \cdot \overline{\beta}) = \overline{k}_c (\overline{A}_k \cdot \overline{c}) \equiv \overline{\delta}, \tag{28'}$$

или так же

$$\alpha_b (\overline{A}_k \cdot \overline{\beta}) = k_c (\overline{A}_k \cdot \overline{c}) = \delta. \tag{28''}$$

В (28') и (28'') $\overline{\delta}$ — постоянный вектор, δ — его численное значение. $\overline{\delta} = 0$ в трех случаях:

1° $\overline{k}_c = 0$: A лежит в центральной плоскости,

2° $\overline{c} = 0$: A лежит на центральной оси $\parallel \hat{k}$,

3° $\overline{A}_k \cdot \overline{c} = 0$: AK главная ось [см. (23)].

В этих трех случаях или $\alpha_b = 0$, или $\beta = 0$ или $\overline{A}_k \cdot \overline{\beta} = 0$, т. е. $\overline{\beta} \perp \overline{A}_k$ для всех точек B.

Таким образом

(29) Когда $\overline{\delta} = 0$ геометрическим местом точек, в которых центробежные моменты относительно осей, параллельных $\hat{k}$, параллельны, является совокупность двух центральных плоскостей: $\sigma \perp \hat{k}$ и $\tau \perp \overline{A}_k$.

В общем случае, когда $\overline{\delta} \neq 0$, при заданном α_b (28'') переходит в

$$\overline{A}_k \cdot \overline{\beta} = \frac{\delta}{\alpha_b} = \text{const}. \tag{28'''}$$

И так как $\overline{\beta} \perp \hat{k}$, то концы всех векторов $\overline{\beta}$, удовлетворяющих (28'''), лежат на прямой, одновременно нормальной к $\hat{k}$ и к $\overline{A}_h$, т. е. на прямой, параллельной $\hat{k} \times \overline{A}_k$. Чтобы определить положение этой прямой (ε), нужно указать еще одну точку, через которую она проходит.

Так как равные векторы должны быть и параллельными, то очевидно в число искомых нами точек входят и те, в которых центробежные моменты относительно параллельных осей равны, т. е. формуле (28''') должна удовлетворять и формула (26'). Значит, прямая (ε) проходит через ту точку гиперболы (26'), ордината которой есть α_b. Каждому значению α_b соответствует одна прямая (ε).

(29') Геометрическое место точек, в которых центробежные моменты относительно параллельных осей параллельны, есть цилиндр. Направляющая этого цилиндра — гипербола (26'), а образующие параллельны вектору $\hat{k} \times \overline{A}_k$, где $\overline{A}_k$ — тот центробежный момент, которому должны быть параллельны другие центробежные моменты.

Наконец, можно показать, что

(30) Когда для осей, параллельных $\hat{k}$, главными точками оказываются точки центральной плоскости $\sigma_c \perp \hat{k}$, то всякая окружность, плоскость которой $\parallel \sigma_c$, а центр находится на центральной оси $\parallel \hat{k}$, является геометрическим местом точек, в которых абсолютная величина центробежных моментов относительно осей, параллельных $\hat{k}$, равны.

В самом деле, если на σ_c все точки главные, то $\overline{c_k}=0$ и по (10‴), $\overline{B_k}=\mu\overline{\beta}\times\overline{\alpha_b}$. Для всех точек B окружности, параллельной σ_c, вектор $\overline{\alpha_b}$ один и тот же. Если центр окружности находится на центральной оси, параллельной $\hat{k}$, то для всех точек этой окружности абсолютное значение β одинаково. Таким образом, так как $\overline{\beta}\perp\overline{\alpha_b}$, $B_k=\mu\beta\alpha_b$ одинаков для всех точек окружности.

7. До сих пор мы рассматривали те изменения, которые претерпевает центробежный момент при переходе от одной точки к другой, лежащей или на той же оси, или на оси, параллельной первой.

Теперь рассмотрим, как изменяется центробежный момент при переходе от одной оси к другой, ей непараллельной. Для этого преобразуем выражение центробежного момента. Из (3) следует, что $\overline{a_s}\times\overline{k_s}=\overline{r_s}\times\overline{k_s}$; в свою очередь $\overline{k_s}=\hat{k}\,(\hat{k}\cdot\overline{r_s})$ (см. рис. 1). Таким образом

$$\overline{a_s}\times\overline{k_s}=\overline{r_s}\times\overline{k_s}=(\overline{r_s}\times\hat{k})\,(\hat{k}\cdot\overline{r_s}).$$

Поэтому (8) можно написать так:

$$\overline{A_k}=\sum m_s\,(\overline{r_s}\times\hat{k})\,(\hat{k}\cdot\overline{r_s}). \tag{31}$$

8. Через произвольную точку A проведем три произвольные взаимно перпендикулярные оси AH, AK, AL, параллельные единичным векторам $\hat{h}$, $\hat{k}$, $\hat{l}$. В точке A этим осям соответствуют центробежные моменты $\overline{A_h}$, $\overline{A_k}$, $\overline{A_l}$.

Имея в виду, что

$$\overline{r_s}=\hat{h}\,(\hat{h}\cdot\overline{r_s})+\hat{k}(\hat{k}\cdot\overline{r_s})+\hat{l}\,(\hat{l}\cdot\overline{r_s}),$$

получаем

$$\sum m_s\overline{r_s}\times\overline{r_s}=0=\sum m_s\overline{r_s}\times[\hat{h}\,(\hat{h}\cdot\overline{r_s})+\hat{k}\,(\hat{k}\cdot\overline{r_s})+\hat{l}\,(\hat{l}\cdot\overline{r_s})]$$

или на основании (31)

$$\overline{A_h}+\overline{A_k}+\overline{A_l}=0. \tag{32}$$

Это означает, что

(32′) Сумма трех центробежных моментов в любой точке A относительно трех произвольных взаимно перпендикулярных осей всегда равна 0.

Возьмем теперь систему осей AH, AP, AQ, тоже взаимно перпендикулярных; тогда согласно (32)

$$\overline{A_h}+\overline{A_p}+\overline{A_q}=0. \tag{32″}$$

Из сравнения с (32) следует, что

$$\overline{A_p}+\overline{A_q}=\overline{A_k}+\overline{A_l}. \tag{33}$$

(33′) Если оси, расположенные в одной плоскости, пересекаются в одной точке, то в этой точке сумма центробежных моментов относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей одна и та же.

Обозначим составляющую центробежного момента $\overline{A_u}$, параллельную направлению $\hat{n}$ через $\overline{A_{u,n}}$; $\overline{A_{u,n}}=\hat{n}(\overline{A_u}\cdot\hat{n})$. Так как $\overline{A_h}\perp\hat{h}$, то (32) дает

$$\overline{A_{k,h}}+\overline{A_{l,h}}=0. \tag{34}$$

9. Зная центробежные моменты $\overline{A_k}$ и $\overline{A_p}$ относительно произвольных осей AK, AP, можно определить центробежный момент $\overline{A_h}$ относительно оси $AH \parallel \hat{k}\times\hat{p}$.

Предполагая, что $\hat{k}$ не перпендикулярен $\hat{p}$, напишем

$$\hat{h}=\varepsilon\,\hat{k}\times\hat{p}, \text{ где } \varepsilon=\frac{1}{\sin(\hat{k},\hat{p})}.$$

Тогда по (31)

$$\overline{A_h}=\sum m_s[\,\overline{r_s}\times\varepsilon(\hat{k}\times\hat{p})]\,[\varepsilon(\hat{k}\times\hat{p})\cdot\overline{r_s}\,].$$

Имея в виду, что

$$(\hat{k}\times\hat{p})\cdot\overline{r_s}=\hat{k}\cdot(\hat{p}\times\overline{r_s})=(\overline{r_s}\times\hat{k})\cdot\hat{p}$$

и

$$\overline{r_s}\times(\hat{k}\times\hat{p})=\hat{k}(\hat{p}\cdot\overline{r_s})-\hat{p}(\overline{r_s}\cdot\hat{k}),$$

легко преобразовать выражение для $\overline{A_h}$ в следующее

$$\overline{A_h}=-\varepsilon^2\sum m_s\{\hat{p}\,[(\overline{r_s}\times\hat{k})(\hat{k}\times\overline{r_s})]\cdot\hat{p}+\hat{k}\,[(\overline{r_s}\times\hat{p})(\hat{p}\cdot\overline{r_s})]\cdot\hat{k}\}$$

или

$$\overline{A_h}=-\varepsilon^2(\hat{p}\,\overline{A_k}\cdot\hat{p}+\hat{k}\,\overline{A_p}\cdot\hat{k}). \tag{35}$$

При

$$\hat{k}\perp\hat{p} \qquad \varepsilon^2=+1$$

и на основании (34) ф. (35) приводит к следующему заключению: если $\overline{A_h}\parallel\hat{k}$, то и $\overline{A_k}\parallel\hat{h}$.

В самом деле в этом случае в (35) $\hat{p}\,\overline{A_k}\cdot\hat{p}=0$, т. е. $\overline{A_k}\perp\hat{p}$; но по определению центробежного момента $\overline{A_k}\perp\hat{k}$ всегда. Таким образом $\overline{A_k}\parallel\hat{k}\times\hat{p}$, т. е. $\overline{A_k}\parallel\hat{h}$.

Если же $\overline{A_h}=0$, то по (35) $\overline{A_k}\cdot\hat{p}=0$, $\overline{A_p}\cdot\hat{k}=0$.

Следовательно $\overline{A_k}\parallel\hat{h}$, $\overline{A_p}\parallel\hat{h}$. Так как то же самое будет иметь место для любой пары осей AL, AQ, перпендикулярных к $\hat{h}$, то отсюда следует:

(36) Если центробежный момент относительно некоторой оси (AH) в точке A равен 0, центробежный момент относительно любой оси $\perp AH$ в точке A параллелен AH или — в частном случае — равен 0.

Как известно из теории моментов инерции, если ось ON образует с осями координат углы (ON, OX), (ON, OI), (ON, OZ), cos-ы которых суть соответственно α, β, γ, то момент инерции относительно ON

$$I_{ON} = I_{OX}\alpha^2 + I_{OY}\beta^2 + I_{OZ}\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \tag{37}$$

Отсюда видно, что при произвольном выборе координатной системы момент инерции I_{ON} нельзя выразить посредством одних только моментов инерции I_{OX}, I_{OY}, I_{OZ}: в выражение для I_{ON} входят еще скалярные центробежные моменты $D = \sum m_s y_s z_s$, $E = \sum m_s z_s x_s$, $F = \sum m_s x_s y_s$.

Если $\hat{h}$, $\hat{k}$, $\hat{l}$ — взаимно перпендикулярны, а $\hat{n}$ — произвольный единичный вектор, то, обозначив $\hat{n}\cdot\hat{h}$, $\hat{n}\cdot\hat{k}$ и $\hat{n}\cdot\hat{l}$ соответственно через α, β, γ и имея в виду (32), получим

$$\begin{aligned}\overline{A}_h = (\alpha^2-\gamma^2)\overline{A}_h + (\beta^2-\gamma^2)\overline{A}_k + \alpha\beta\sum m_s[\overline{r}_s\times h(\hat{k}\cdot\overline{r}_s) + \overline{r}_s\times\hat{k}(\hat{h}\cdot\overline{r}_s)] +\\ + \beta\gamma\sum m_s[\overline{r}_s\times\hat{k}(\hat{l}\cdot\overline{r}_s) + \overline{r}_s\times\hat{l}(\hat{k}\cdot\overline{r}_s)] + \gamma\alpha\sum m_s[\overline{r}_s\times\hat{l}(\hat{h}\cdot\overline{r}_s) +\\ + \overline{r}_s\times\hat{h}(\hat{l}\cdot\overline{r}_s)]\ \ldots\end{aligned} \tag{38}$$

Мы видим, что для определения $\overline{A}_h$ знания одних только центробежных моментов $\overline{A}_n$, $\overline{A}_k$, $\overline{A}_l$ недостаточно.

В выражении для A_h входят еще суммы типа

$$\sum m_s[\overline{r}_s\times\hat{h}(\hat{k}\cdot\overline{r}_s) + \overline{r}_s\times\hat{k}(\hat{h}\cdot\overline{r}_s)].$$

Эти суммы не имеют простого физического смысла и до сих пор еще не применялись в механике; поэтому зависимость (38) подробнее не исследована.

Резюме

1. Показано [см (8')], что центробежному моменту можно приписать векторный характер. Вследствие этого он приобретает ряд свойств, которых не мог иметь обычно рассматриваемый скалярный центробежный момент.

2. Выведены некоторые свойства [см. напр. (13) и (13')], общие как скалярному, так и векторному центробежному моменту.

3. Выведена часть совокупности свойств, присущих центробежному моменту вектора.

Эривань, Армения. Январь 1933 г.

DIE EIGENSCHAFTEN DES DEVIATIONSMOMENTS, ALS VEKTOR BETRACHTET

Von *Al. Akopian* *(Eriwan)*

Zusammenfassung

1. Bei der Drehung eines festen Körpers um eine unbewegliche Achse (AK) zerlegt sich das Hauptmoment der äusseren Kräffte natürlicherweise in drei gegenseitig senkrechte Komponenten

$$I_{AK}\dot{\omega},\quad \overline{A}_k\dot{\omega},\quad \overline{A}_k\,\omega^2,$$

wo (Fig. 1)

$$I_{AK} = \sum m_s a_s^2,\quad \overline{A}_k = \sum m_s\overline{r}_s\times\overline{k}_s;\quad \overline{\omega},\ \dot{\overline{\omega}},\ m_s$$

die Winkelgeschwindigkeit bzw — Beschleunigung des Körpers und die Masse des Punktes A_s sind.

2. Wenn in dem geradwinkligem Koordinatensystem AX, YZ, AZ mit AK zusammenfällt, so sind die Projektionen von $\overline{A_k}$ auf AX, AY, AZ respektiv gleich $\sum m_s y_s z_s$, $(-\sum m_s z_s x_s)$, 0. Darum wird hier der Vektor $\overline{A_k}$ Deviationsmoment genannt. Dasselbe hat gewisse Eigenschaften, welche bei dem üblichen skalaren Deviationsmomente gänzlich fehlen.

3. Es werden gewisse Eigenschaften angegeben, welche dem vektoriellen wie dem skalaren Deviationsmomente gemeinsam sind.

4. Es wird ein Teil der Eigenschaften gegeben welche nur dem vektoriellen Deviationsmomente zueigen sind.