

ПЕРЕДАЧА ДАВЛЕНИЯ НА ПЛАСТИНУ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ СРЕДУ¹

А. И. Лурье (Ленинград)

1. В этой работе рассматривается напряженное состояние, возникающее при наличии равномерно-распределенного давления на бесконечности в упругом полупространстве $y > 0$, прямолинейная граница которого ($y=0$) при $|x| > a$ является абсолютно жесткой, тогда как на участке $-a \leq x \leq a$ границу составляет тонкая упругая пластина² (рис. 1).

Ограничимся рассмотрением плоской задачи и направим ось y внутрь среды, а ось X вдоль границы ее; в направлении оси Z , перпендикулярном плоскости XY , будем считать среду неограниченной (плоская деформация). К тем же результатам (с несущественными изменениями некоторых констант) мы пришли бы, рассматривая случай, когда размер вдоль оси Z весьма мал, а пластина на участке $|x| \leq a$ заменена балкой (плоское напряженное состояние); вместо истинных значений напряжений мы в этом случае имели бы дело с их средними значениями по толщине. Размер по оси Z ни в первом, ни во втором случае не имеет значения и может быть принят равным единице.

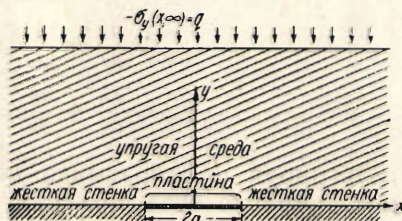


Рис. 1.

Будем считать, что на весьма значительном удалении от границы (при $y \rightarrow \infty$) среде передается равномерно распределенное давление величины q на единицу площади³

$$(\sigma_y)_{y \rightarrow \infty} = -q. \tag{1.1}$$

Относительное удлинение вдоль оси X при весьма большем y прием равным нулю.

$$(\epsilon_x)_{y \rightarrow \infty} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y \rightarrow \infty} = 0; \tag{1.2}$$

в противном случае перемещение u вдоль оси X при достаточно большем x было бы сколь угодно велико; считая, что этому „расползанию“ среды в стороны препятствуют твердые стенки, параллельные

¹ Доложено Ленинградскому механическому обществу 20 апреля 1933 г.

² Эта задача была предложена мне проф. Н. Н. Давиденковым, которого интересовал вопрос об установлении надлежащей методики измерения давления льда на плотину.

³ Мы будем применять обозначения, принятые немецкими авторами. См., например, Т р е ф ф ц. Математическая теория упругости. ГТТИ, 1932.

оси Y и установленные на весьма значительном расстоянии от нее, мы приняли предположение (1.2). В случае плоской деформации

$$\epsilon_x = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \quad (1.3)$$

и следовательно

$$(\sigma_x)_{y \rightarrow \infty} = -\frac{q}{m-1}. \quad (1.4)$$

В случае плоского напряженного состояния m (величина, обратная коэффициенту Пуассона) должно быть заменено через $m+1$. Принимая еще, что при $y \rightarrow \infty$

$$(\tau_{xy})_{y \rightarrow \infty} = 0, \quad (1.5)$$

получим для функции напряжений Aiy при $y \rightarrow \infty$ выражение

$$\varphi_\infty = -\frac{q}{2} \left(x^2 + \frac{y^2}{m-1} \right). \quad (1.6)$$

Если граница среды ($y=0$) на всем своем протяжении является абсолютно жесткой, то напряжение состояния, описываемое формулами (1.1), (1.4), (1.5), будет иметь место не только при $y \rightarrow \infty$, но и при любом y . Действительно, для относительного удлинения вдоль оси y и сдвига имеем

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) = -\frac{1}{2G} \frac{m-2}{m-1} q, \quad (1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (1.8)$$

интегрируя и отбрасывая неинтересующее нас перемещение среды как твердого тела, получим

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2G} \frac{m-2}{m-1} qy \quad (1.9)$$

и следовательно при $y=0$, $v=0$, т. е. условие на абсолютно жесткой границе выполнено.

2. Обратимся теперь к интересующему нас случаю, когда участок границы $|x| \leq a$ составляет упругая пластина. Прогибание пластины (по цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Z) вызовет местное перераспределение напряжений, которые конечно уже не будут описываться вышеприведенными простыми формулами; обратно закон прогибания (уравнение упругой поверхности $y=f(x)$ при $|x| < a$) пластины определяется напряжениями, передаваемыми пластине, и заранее конечно неизвестен.

Для функции Aiy примем теперь выражение

$$\varphi = \varphi_\infty + \int_0^\infty (A + B\alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x dx. \quad (2.1)$$

A и B суть функции параметра α , подлежащие определению; при $y \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$ и в виду симметрии взято

$$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y).$$

Для напряжений τ_{xy} и σ_y и перемещений u, v получим:¹

$$\sigma_y = -q - \int_0^\infty (A + Bzy) \alpha^2 e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha, \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy} = - \int_0^\infty (A + Bzy - B) \alpha e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (2.3)$$

$$u = \frac{1}{2G} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha y} \left(A + B\alpha y - 2B \frac{m-1}{m} \right) \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (2.4)$$

$$v = - \frac{1}{2G} \left\{ \frac{m-2}{m-1} qy - \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha y} \left(A + B\alpha y + \frac{m-2}{m} B \right) \cos \alpha x \, d\alpha \right\}. \quad (2.5)$$

При $y=0$ имеем

$$u(x, 0) = \frac{1}{2G} \int_0^\infty \alpha \left(A - 2B \frac{m-1}{m} \right) \sin \alpha x \, d\alpha, \quad (2.6)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = - \int_0^\infty (A - B) \alpha \sin \alpha x \, d\alpha. \quad (2.7)$$

Если поверхность границы абсолютно гладкая, то надо принять

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad A = B. \quad (2.8)$$

Наоборот, при достаточно шероховатой поверхности

$$u(x, 0) = 0, \quad A = 2B \frac{m-1}{m}. \quad (2.9)$$

В том и другом случае

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0 = -q - \int_0^\infty A \alpha^2 \cos \alpha x \, d\alpha; \quad (2.10)$$

тогда как для $v(x, 0)$ получим

$$v(x, 0) = k \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha, \quad (2.11)$$

причем в первом случае ($\tau_{xy}(x, 0) = 0$)

$$k = \frac{m-1}{mG}, \quad (2.12)$$

а во втором ($u(x, 0) = 0$)

$$k = \frac{3m-4}{4G(m-1)}. \quad (2.13)$$

Замечая теперь, что по условию задачи

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 0 \text{ при } |x| > a, \\ v(x, 0) &= f(x) \text{ при } |x| < a, \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹ Loc. cit., p. 99.

где $f(x)$ — прогиб пластины,¹ и решая интегральное уравнение Фурье (2.11), получим:

$$\alpha A(\alpha) = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\infty} v(\xi, 0) \cos \alpha \xi d\xi = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi. \quad (2.15)$$

Обратимся теперь к дифференциальному уравнению изгиба пластины

$$N \frac{d^2 f}{dx^2} = -M. \quad (2.16)$$

Цилиндрическая жесткость пластины N и изгибающий момент M имеют значения:²

$$N = \frac{E_1 h^3 m_1^3}{12(m_1^3 - 1)}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} M &= M_0 + a \int_0^a \sigma_0(\xi) d\xi - x \int_0^x \sigma_0(\xi) d\xi - \int_x^a \xi \sigma_0(\xi) d\xi = \\ &= M_0 - \frac{q}{2} (a^2 - x^2) - \int_0^{\infty} A(\cos \alpha x - \cos \alpha a) d\alpha, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где M_0 — момент на опоре. Если края пластины заделаны, то

$$f'(a) = f(a) = f'(0) = 0; \quad (2.19)$$

для пластины с подпорными краями

$$f(a) = f'(0) = M_0 = 0. \quad (2.20)$$

Интегрируя уравнение (2.16), получим для пластины с заделанными краями

$$Nf(x) = -\frac{q}{24} (a^2 - x^2)^2 + \int_0^{\infty} \left[\frac{a^2 - x^2}{2a} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} - \frac{\cos \alpha x - \cos \alpha a}{\alpha^2} \right] A(\alpha) d\alpha. \quad (2.21)$$

Подставляя сюда вместо $A(\alpha)$ его значение (2.15) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} Nf(x) &= -\frac{q}{24} (a^2 - x^2)^2 + \\ &+ \frac{2}{\pi k} \int_0^a f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \left[\frac{a^2 - x^2}{2a} \frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha x - \cos \alpha a}{\alpha^3} \right] \cos \alpha \xi d\alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Введя для упрощения письма обозначения

$$as = x, \quad a\tau = \xi, \quad a\alpha = \sigma, \quad \frac{24N}{qa^3} f(x) = \varphi(s), \quad \frac{24N}{qa^3} f(\xi) = \varphi(\tau), \quad (2.23)$$

приведем (2.22) к виду

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= -(1 - s^2)^2 + \\ &+ \frac{2a^2}{\pi k N} \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \left[\frac{1 - s^2}{2} \frac{\sin \sigma}{\sigma^2} - \frac{\cos \sigma s - \cos \sigma}{\sigma^3} \right] \cos \sigma \tau d\sigma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

¹ Предполагается, что упругая среда и пластина все время находятся в соприкосновении друг с другом (см. ниже).

² В случае плоского напряженного состояния (балка вместо пластины) $N = E_1$

В случае пластины с подпертыми краями найдем

$$\varphi(s) = -(s^4 - 6s^2 + 5) + \frac{2a^3}{\pi kN} \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau \int_0^\infty \left[\frac{1-s^2}{2} \frac{\cos \sigma}{\sigma} - \frac{\cos \sigma s - \cos \sigma}{\sigma^3} \right] \cos \tau \sigma d\sigma. \quad (2.25)$$

Вычисление полученных определенных интегралов

$$K_1(s, \tau) = \int_0^\infty \left[\frac{1-s^2}{2} \frac{\sin \sigma}{\sigma^2} - \frac{\cos \sigma s - \cos \sigma}{\sigma^3} \right] \cos \tau \sigma d\sigma, \quad (2.26)$$

$$K_2(s, \tau) = \int_0^\infty \left[\frac{1-s^2}{2} \frac{\cos \sigma}{\sigma} - \frac{\cos \sigma s - \cos \sigma}{\sigma^3} \right] \cos \tau \sigma d\sigma \quad (2.27)$$

сопряжено с довольно громоздкими и сложными выкладками. Ограничимся поэтому только приведением окончательных результатов:

$$K_1(s, \tau) = \frac{1}{4} (1-\tau)^2 \ln(1-\tau) + \frac{1}{4} (1+\tau)^2 \ln(1+\tau) - \frac{1}{4} (1-s^2) [1 + (1-\tau) \ln(1-\tau) + (1+\tau) \ln(1+\tau)] - \frac{1}{4} (s-\tau)^2 \ln|s-\tau| - \frac{1}{4} (s+\tau)^2 \ln|s+\tau|. \quad (2.28)$$

$$K_2(s, \tau) = -\frac{3}{4} (1-s^2) - \frac{1}{4} (1-s^2) [\ln(1+\tau) + \ln(1-\tau)] + \frac{1}{4} (1+\tau)^2 \ln(1+\tau) + \frac{1}{4} (1-\tau)^2 \ln(1-\tau) - \frac{1}{4} (s-\tau)^2 \ln|s-\tau| - \frac{1}{4} (s+\tau)^2 \ln|s+\tau|. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.24) принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & -(1-s^2)^2 - \frac{a^3}{2\pi kN} (1-s^2) \left\{ \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau + \int_0^1 [(1-\tau) \ln(1-\tau) + (1+\tau) \ln(1+\tau)] \varphi(\tau) d\tau \right\} + \\ & + \frac{a^3}{2\pi kN} \int_0^1 [(1-\tau)^2 \ln(1-\tau) + (1+\tau)^2 \ln(1+\tau)] \varphi(\tau) d\tau - \\ & - \frac{a^3}{2\pi kN} \int_0^1 [(s-\tau)^2 \ln|s-\tau| + (s+\tau)^2 \ln|s+\tau|] \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Замечая, что $\varphi(s) = \varphi(-s)$, и вводя обозначение

$$\lambda = \frac{a^3}{4\pi kN}, \quad (2.31)$$

приведем (2.30) к виду

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & -(1-s^2)^2 - \lambda (1-s^2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) d\tau + 2 \int_{-1}^{+1} (1+\tau) \ln(1+\tau) \varphi(\tau) d\tau \right\} + \\ & + \lambda \int_{-1}^{+1} (1+\tau)^2 \ln(1+\tau)^2 \varphi(\tau) d\tau - \lambda \int_{-1}^{+1} (s+\tau)^2 \ln(s+\tau)^2 \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.32) \end{aligned}$$

В случае пластины с подпертыми краями получим вместо (2.25)

$$\varphi(s) = -(s^4 - 6s^2 + 5) - \lambda(1 - s^2) \left\{ 3 \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) d\tau + 2 \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \ln(1 + \tau) d\tau \right\} + \\ + \lambda \int_{-1}^{+1} (1 + \tau)^2 \ln(1 + \tau)^2 \varphi(\tau) d\tau - \lambda \int_{-1}^{+1} (s + \tau)^2 \ln(s + \tau)^2 \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

3. В дальнейшем ограничимся случаем пластины с заделанными краями. Наша задача свелась к решению интегрального уравнения (2.32) Фредгольма, определяющего прогиб пластины в любой ее точке. Определив прогиб, найдем интегрированием $A(\alpha)$ из формулы (2.15), после чего найдется функция напряжений, а следовательно и сами напряжения в любой точке среды. Переходя к решению нашего интегрального уравнения, перепишем сначала его в виде:

$$\varphi(s) = -(1 - s^2)^2 - \lambda(1 - s^2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) d\tau + 2 \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau)(1 + \tau) \ln(1 + \tau) d\tau \right\} - \\ - \lambda \int_{-1}^{+1} [k(s + \tau) - k(1 + \tau)] \varphi(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

где введено обозначение

$$k(x) = 2x^2 \ln|x| = x^2 \ln x^2. \quad (3.2)$$

Замечая, что в силу четности $\varphi(\tau)$ интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \tau \varphi(\tau) d\tau = 0,$$

можем написать

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \{1 + 2(1 + \tau) \ln(1 + \tau)\} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \frac{dk(1 + \tau)}{d\tau} d\tau.$$

Интегрируя по частям и замечая, что $\varphi(\pm 1) = 0$, получим вместо (3.1):

$$\varphi(s) = -(1 - s^2)^2 + \frac{1}{2} \lambda(1 - s^2) \int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) k(1 + \tau) d\tau + \\ + \lambda \int_{-1}^{+1} [k(1 + \tau) - k(s + \tau)] \varphi(\tau) dx. \quad (3.3)$$

Дифференцируя обе части по s , получим

$$\varphi'(s) = 4s(1 - s^2) - \lambda s \int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) k(1 + \tau) d\tau - \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{dk(s + \tau)}{ds} \varphi(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Замечая, что

$$\frac{dk(s + \tau)}{ds} = \frac{dk(s + \tau)}{d\tau},$$

и интегрируя по частям, получим

$$\varphi'(s) = 4s(1-s^2) - \lambda s \int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) k(1+\tau) d\tau + \lambda \int_{-1}^{+1} k(s+\tau) \varphi'(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Дифференцируя еще один раз, найдем:

$$\varphi''(s) = 4(1-3s^2) - \lambda \int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) k(1+\tau) d\tau - \lambda \int_{-1}^{+1} k(s+\tau) \varphi''(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Полученное интегральное уравнение для $\varphi''(s)$ имеет то же ядро, что и интегральное уравнение (3.3) для $\varphi(s)$, но свободный член его более простой структуры. Поэтому мы займемся в дальнейшем уравнением (3.6). Для приближенного решения его представим ядро в виде суммы конечного числа произведений функций, зависящих только от s , на функции, зависящие только от τ :¹

$$k(s+\tau) = \sum_{\nu=1}^n k_{\nu}(s) k_{\nu}(\tau). \quad (3.7)$$

В нашем случае представление ядра под видом (3.7) особенно просто, так как $k(s+\tau)$ зависит только от суммы аргументов s и τ . Замечая, что при $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq \tau \leq 1$ сумма $s+\tau$ заключена в промежутке $(-2, 2)$, разложим в тригонометрический $k(x)$ при $-2 \leq x \leq 2$. Получим;

$$k(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{2}. \quad (3.8)$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 k(x) dx = \frac{4}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right), \quad A_n = \int_0^2 k(x) \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \\ = \frac{16}{n^2 \pi^2} (-1)^n \left\{ 1 + 2 \ln 2 + (-1)^n \frac{2}{n\pi} \text{Si}(\pi n) \right\}. \quad (3.9)$$

Здесь через $\text{Si} u$ обозначен интегральный синус²

$$\text{Si} u = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx. \quad (3.10)$$

Значения первых шести коэффициентов A_n приведены в таблице 1.

Таблица 1

n	A_n	$\lambda_n = \frac{1}{A_n}$
1	-1,95722	-0,51093
2	+1,15008	+0,86951
3	-0,36582	-2,73359
4	+0,26584	+3,76160
5	-0,14125	-7,07965
6	+0,11471	+8,71750

¹ Оценку ошибки метода возможно произвести, пользуясь результатами Tricomi. Atti della R. Accad. dei Lincei, V, 33, 1924, p. 483 (1 semestre), p. 26 (2 semestre).²

² При вычислении Si мы пользовались таблицами Glaisher'a, Phil. Trans. London, 160, p. 367-387 (1870); для значений аргумента $u = n\pi$ ($n=1, 2, \dots$) Glaisher дает особую таблицу.

Пользуясь (3.8), получаем

$$\begin{aligned} k(s + \tau) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{2} (s + \tau) = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos \frac{n\pi}{2} s \cdot \cos \frac{n\pi}{2} \tau - \sin \frac{n\pi}{2} s \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \tau \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Как указывалось выше, мы ограничимся в этом выражении конечным числом n слагаемых. Замечая еще, что в силу нечетности $\varphi'(\tau)$ и четности $\varphi''(\tau)$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) \cos \frac{n\pi\tau}{2} d\tau = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \varphi''(\tau) \sin \frac{n\pi}{2} \tau d\tau = 0 \quad (3.12)$$

и что в силу (2.19)

$$\int_{-1}^{+1} \varphi''(\tau) d\tau = \varphi'(1) - \varphi'(-1) = 0, \quad (3.13)$$

перепишем интегральное уравнение (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \varphi''(s) &= 4(1 - 3s^2) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k \sin \frac{k\pi}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) \sin \frac{k\pi\tau}{2} d\tau - \\ &- \lambda \sum_{k=1}^n A_k \cos \frac{k\pi s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi''(\tau) \cos \frac{k\pi\tau}{2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обозначая

$$C_k = \int_{-1}^{+1} \varphi''(\tau) \cos \frac{k\pi\tau}{2} d\tau \quad (3.15)$$

и замечая, что

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(\tau) \sin \frac{k\pi\tau}{2} d\tau = \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^{+1} \varphi''(\tau) \cos \frac{k\pi\tau}{2} d\tau = \frac{2}{k\pi} C_k, \quad (3.16)$$

получим

$$\varphi''(s) = 4(1 - 3s^2) + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{\sigma=0,1,2,\dots} (-1)^\sigma A_{2\sigma+1} \frac{C_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} - \lambda \sum_{k=1,2,3,\dots} A_k C_k \cos \frac{k\pi s}{2}. \quad (3.17)$$

Для определения неизвестных коэффициентов C_k умножаем обе части этого уравнения на $\cos \frac{k\pi s}{2}$ и интегрируем в пределах от -1 до 1 . Получим:

$$(1 + \lambda A_{2\mu}) C_{2\mu} = \beta_{2\mu} + \frac{4\lambda}{\pi} (-1)^\mu \sum_{\rho=0,1,2,\dots} (-1)^\rho A_{2\rho+1} C_{2\rho+1} \frac{2\rho+1}{4\mu^2 - (2\rho+1)^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} (1 + \lambda A_{2\mu+1}) C_{2\mu+1} &= \beta_{2\mu+1} + \frac{8\lambda}{\pi^2} \frac{(-1)^\mu}{2\mu+1} \sum_{\sigma=0,1,2,\dots} (-1)^\sigma A_{2\sigma+1} \frac{C_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + \\ &+ \frac{4\lambda}{\pi} (-1)^\mu \sum_{\sigma=1,2,\dots} (-1)^\sigma A_{2\sigma} C_{2\sigma} \frac{2\mu+1}{4\sigma - (2\mu+1)^2}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь

$$\beta_{2\mu} = 4 \int_{-1}^{+1} (1 - 3s^2) \cos \mu \pi s ds = -48 \frac{(-1)^\mu}{\mu^2 \pi^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

$$\beta_{2\mu+1} = 4 \int_{-1}^{+1} (1 - 3s^2) \cos \frac{2\mu+1}{2} \pi s ds = -32 \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)\pi} \left[1 - \frac{12}{(2\mu+1)^2 \pi^2} \right],$$

$$\mu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Дело сводится к решению системы уравнений (3.18) и (3.19). Для упрощения можно из уравнений (3.19) исключить неизвестные $C_{2\sigma}$ с четными индексами, пользуясь их определением (3.18). Этим число уравнений, подлежащих решению, уменьшится вдвое. Введя еще вместо неизвестных C новые неизвестные:

$$D_{2\sigma+1} = (-1)^\sigma A_{2\sigma+1} \frac{C_{2\sigma+1}}{2\sigma+1}, \quad \sigma = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

$$D_{2\sigma} = (-1)^\sigma A_{2\sigma} C_{2\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.23)$$

и обозначая

$$\frac{1}{A_k} = \lambda_k, \quad (3.24)$$

получим вместо (3.19)

$$\begin{aligned} & (\lambda + \lambda_{2\nu+1}) D_{2\nu+1} = \\ & = -\frac{32}{\pi(2\nu+1)^2} \left(1 - \frac{12}{(2\nu+1)^2 \pi^2} \right) - \frac{192}{\pi^3} \sum_{\mu=1, 2, 3, \dots} \frac{\lambda}{\mu^2 (\lambda + \lambda_{2\mu}) [4\mu^2 - (2\nu+1)^2]} + \\ & + \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{\sigma=0, 1, 2, \dots} D_{2\sigma+1} \left[\frac{1}{(2\nu+1)^2} + 2 \sum_{\mu=1, 2, \dots} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_{2\mu}} \cdot \frac{1}{4\mu^2 - (2\nu+1)^2} \cdot \frac{(2\sigma+1)^2}{4\mu^2 - (2\sigma+1)^2} \right], \\ & \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25) \end{aligned}$$

Ограничившись, например, тремя уравнениями ($\nu = 0, 1, 2$), определим из них D_1, D_3, D_5 , после чего из (3.18) найдем D_2, D_4, D_6 , т. е. определим шесть членов разложения $\varphi''(s)$ в ряд Фурье. Результаты численных вычислений¹ приведены для ряда значений параметра λ в таблице 2. Коэффициенты убывают довольно быстро; заметим еще, что если ограничиться всего лишь двумя уравнениями системы (3.25), то численные значения коэффициентов D_1 и D_2 для значений $\lambda \leq 2$ изменяются не более чем на 1,5%, а D_3 и D_4 — не более чем на 15%. В виду сравнительной малости D_3 и D_4 эта ошибка не может однако оказать существенного влияния на окончательные результаты. Из сказанного следует, что взяв, как это мы сделали, три уравнения (а не четыре или больше), мы не рискуем получить имеющей практическое значение погрешности.

Таблица 2

λ	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
0,25	-3,76659	-4,87426	0,30590	-0,30253	0,04868	-0,05653
0,50	-3,35082	-4,31703	0,26565	-0,28584	0,04395	-0,05216
0,75	-3,01880	-3,86642	0,23370	-0,27212	0,04018	-0,04871
1,00	-2,74753	-3,50986	0,20767	-0,26049	0,03711	-0,04577
2,00	-2,02605	-2,54737	0,13937	-0,22703	0,02892	-0,03752

¹ Все вычисления произвели студ. Л. М. Рубинчик и Е. В. Андреева.

4. Определив коэффициенты D_k , мы можем теперь составить выражение для прогиба пластинки $f(x)$, а также найти распределение нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ вдоль границы. Интегрируя два раза (3.17) при условиях $\varphi'(1) = \varphi(1) = 0$, найдем:

$$\varphi(s) = -(1-s^2)^2 - \frac{\lambda}{\pi} (1-s^2) \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} + \frac{4\lambda}{\pi} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{D_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} \cos \frac{2\sigma+1}{2} \pi s - \frac{\lambda}{\pi^2} \sum_{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu^2} [1 - (-1)^{\mu} \cos \mu \pi s]. \quad (4.1)$$

Прогиб пластинки в центре ($x=0$) будет [см. (2.33)]

$$\eta = -f(0) = -\frac{qa^4}{24N} \varphi(0) = \frac{qa^4}{24N} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\pi} \sum D_{2\sigma+1} - \frac{4\lambda}{\pi^2} \sum_{\sigma} \frac{D_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} (-1)^{\sigma} + \frac{\lambda}{\pi^2} \sum_{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu^2} [1 - (-1)^{\mu}] \right\}. \quad (4.2)$$

Если равномерно распределенная нагрузка q приложена непосредственно к пластинке, то максимальный прогиб $\eta_0 = \frac{qa^4}{24N}$; наличие дополнительных членов, получившихся у нас, объясняется перераспределением напряжений, которое имеет место при передаче нагрузки через упругую среду. Как показывает таблица 3, влияние этих дополнительных членов весьма значительно, увеличиваясь, что естественно, с уменьшением жесткости пластинки (увеличением параметра λ).

Таблица 3

λ	$\frac{24N}{qa^4} \eta$	$\frac{\eta_0 - \eta}{\eta}$	$\frac{24N}{qa^4} \eta_{\text{прибл.}}$	$\frac{\eta - \eta_{\text{прибл.}}}{\eta}$
0	1,000	0,000	1,000	0,00%
0,25	0,872	0,128	0,870	0,23%
0,50	0,773	0,227	0,771	0,26%
0,75	0,695	0,305	0,692	0,43%
1,00	0,630	0,370	0,627	0,32%
2,00	0,458	0,542	0,459	-0,21%

В третьем столбце приведены значения η , получающиеся, если в исходных вычислениях сохранить только четыре члена ряда Фурье и соответственно только два уравнения системы (3.25). Разница между значениями третьего и первого столбцов менее 0,5%, что подтверждает сказанное выше.

Переходим к вычислению распределения напряжений вдоль границы $y=0$. По формулам (2.10) и (2.15) находим

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0(x) = -q - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha x dx \int_0^{\alpha} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi. \quad (4.3)$$

Воспользовавшись (2.23) и (2.31) после простых преобразований, найдем

$$\sigma_0(x) = -q \left(1 + \frac{\lambda}{3} \int_0^{\infty} \beta \cos \beta s d\beta \int_0^1 \varphi(\tau) \cos \beta \tau d\tau \right). \quad (4.4)$$

Обозначая $\frac{\sigma_0(x)}{q} = -\psi(s)$ и подставляя вместо $\varphi(\tau)$ его значение (4.1), получим

$$\psi(s) = 1 + \psi_1(s) + \psi_2(s) + \psi_3(s), \quad (4.5)$$

причем введены обозначения

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= -\frac{\lambda}{3} \int_0^\infty \beta \cos \beta s d\beta \int_0^1 (1-\tau^2)^2 \cos \beta \tau d\tau = \\ &= \frac{8\lambda}{3} \int_0^\infty \frac{\beta^2 \sin \beta + 3\beta \cos \beta - 3 \sin \beta}{\beta^4} \cos \beta s d\beta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(s) &= -\frac{\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \int_0^\infty \beta \cos \beta s d\beta \int_0^1 (1-\tau^2) \cos \beta \tau d\tau + \\ &+ \frac{4\lambda^2}{3\pi^2} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \frac{D_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} \int_0^\infty \beta \cos \beta s d\beta \int_0^1 \cos \frac{2\sigma+1}{2} \pi \tau \cos \beta \tau d\tau = \\ &= \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \int_0^\infty \left[\frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} - \frac{\beta \cos \beta}{\beta^2 - \left(\frac{2\sigma+1}{2} \pi\right)^2} \right] \cos \beta s d\beta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(s) &= -\frac{\lambda^2}{3\pi^2} \sum_{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu^2} \int_0^\infty \beta \cos \beta s d\beta \int_0^1 [1 - (-1)^{\mu} \cos \mu \pi \tau] \cos \beta \tau d\tau = \\ &= \frac{\lambda^2}{3} \sum_{\mu} D_{2\mu} \int_0^\infty \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta s}{\beta^2 - \pi^2 \mu^2} d\beta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вычисления полученных определенных интегралов не приводим здесь за недостатком места. Ограничимся приведением результатов:

$$\psi_1(s) = \frac{8\lambda}{3} \left\{ \frac{s^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{s}{4} (1-s^2) \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right| \right\}; \quad (4.9)$$

в частности при $s=0$, $s=1$ и при весьма большем s получаем

$$\psi_1(0) = -\frac{8\lambda}{9}, \quad \psi_1(1) = \frac{4}{9} \lambda, \quad \psi_1(s) = \frac{8\lambda}{3} \left[\frac{1}{15s^2} + \frac{1}{35s^3} + \frac{1}{63s^4} + \dots \right] \quad (4.10)$$

Далее, находим

$$\begin{aligned} \psi_2(s) &= \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \left\{ \frac{s}{2} \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| - 1 - \right. \\ &- \frac{(-1)^{\sigma}}{2} \sin \frac{2\sigma+1}{2} \pi s \left[\text{Ci} \frac{2\sigma+1}{2} \pi |1-s| - \text{Ci} \frac{2\sigma+1}{2} \pi |1+s| \right] + \\ &\left. + \frac{(-1)^{\sigma}}{2} \cos \frac{2\sigma+1}{2} \pi s \left[\text{Si} \frac{2\sigma+1}{2} \pi |1+s| \pm \text{Si} \frac{2\sigma+1}{2} \pi |1-s| \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где знак $+$ берется при $s < 1$ и знак $-$ при $s > 1$. При $s=0$ и $s=1$ получаем

$$\begin{aligned} \psi_2(0) &= \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \left\{ 1 - (-1)^{\sigma} \text{Si} \frac{2\sigma+1}{2} \pi \right\}, \\ \psi_2(1) &= \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \left\{ \frac{1}{2} \ln 2 + 1 + \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \text{Ci} (2\sigma+1) \pi \right\}; \end{aligned} \quad (4.12)$$

в этих формулах $Ci u = \int_u^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ (интегральный косинус), $C = 0,577216\dots$ (постоянная Эйлера — Маскерони); при весьма больших значениях аргумента

$$\frac{s}{2} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right| - 1 = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + \frac{1}{7s^6} + \dots,$$

разности же

$$\left\{ Ci \frac{2\sigma+1}{2} \pi |1-s| - Ci \frac{2\sigma+1}{2} \pi (1+s) \right\}$$

и

$$\left\{ Si \frac{2\sigma+1}{2} \pi (1+s) - Si \frac{2\sigma+1}{2} \pi (1-s) \right\}$$

также стремятся к нулю: итак, $\psi_2(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом строится выражение для $\psi_3(s)$:

$$\psi_3(s) = -\frac{\lambda^2}{6\pi} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu} \left\{ \sin \pi \mu s [Ci \pi \mu |1+s| - Ci \pi \mu |1-s|] - \right. \\ \left. - \cos \pi \mu s [Si \pi \mu |1+s| \pm Si \pi \mu |1-s|] \right\}, \quad (4.13)$$

знак $+$ берется при $s < 1$, $-$ при $s > 1$;

$$\psi_3(0) = \frac{\lambda}{3\pi} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu} Si \pi \mu, \quad \psi_3(1) = \frac{\lambda^2}{6\pi} \sum_{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu} Si 2\pi \mu, \quad (4.14)$$

$\psi_3(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

На основании этих результатов составлены выражения для давления в центре пластины и на опорах:

$$-\frac{\sigma_0(0)}{q} = \psi(0) = 1 - \frac{8\lambda}{9} + \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \left[-1 + (-1)^{\sigma} Si \frac{2\sigma+1}{2} \pi \right] + \\ + \frac{\lambda^2}{3\pi} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu} Si \pi \mu, \quad (4.15)$$

$$-\frac{\sigma_0(\pm a)}{q} = \psi(\pm 1) = 1 + \frac{4\lambda}{9} - \frac{2\lambda^2}{3\pi} \sum_{\sigma} D_{2\sigma+1} \left[0,3488 + \frac{1}{2} Ci (2\sigma+1) \pi \right] + \\ + \frac{\lambda^2}{6\pi} \sum_{\mu} \frac{D_{2\mu}}{\mu} Si 2\pi \mu. \quad (4.16)$$

Результаты вычислений по этим формулам сведены в таблице 4.

Таблица 4

λ	$\psi(0)$	$\psi(\pm 1)$
0	1,000	1,000
0,25	0,807	1,105
0,5	0,646	1,202
0,75	0,547	1,293
1,00	0,457	1,380
2,00	0,232	1,709

При весьма большом s все $\psi_i(s)$ ($i=1, 2, 3$) стремятся к нулю и $\psi(s) \rightarrow 1$, т. е. на весьма большом расстоянии от пластинки вдоль границы устанавливается равномерное напряжение.

Приводим график распределения нормального напряжения вдоль границы при $\lambda=0,5$ (рис. 2). Минимум давления имеет место в центре пластинки, максимум на опоре; далее кривая делает ряд волн все более и более уменьшающегося размаха и при больших s весьма близко приближается к прямой параллельной оси абсцисс, расположенной на расстоянии 1 от этой оси и соответствующей равномерному распределению давления. Другая картина получается при $\lambda=1,5$. Значения $\psi(s)$ для этого случая приведены в таблице 5.

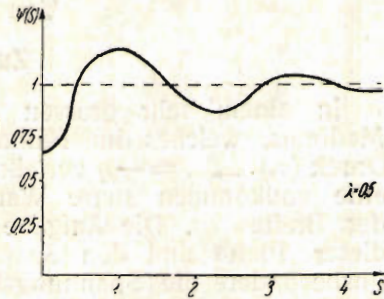


Рис. 2.

Таблица 5 ($\lambda=1,5$)

s	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3	4
$\psi(s)$	0,386	0,876	1,575	1,186	0,348	0,189	1,184	1,020

При s , близком к 2,5 мы имеем значительное понижение давления. Упругая среда, через которую происходит передача давления, как бы обнаруживает стремление приподняться. Действительно при $\lambda=2$ находим $\psi(2)=-0,231$. Более подробные вычисления показывают, что, при $\lambda \leq 1,7$ $\psi(s)$ остается положительным для всех s , тогда как при $\lambda=1,73$, $f(2) > 0$, $f(2,5) = -0,008 < 0$, $f(3) > 0$. Таким образом, обнаружено существование критического значения параметра $\lambda(1,7 < \lambda_{кр} < 1,73)$, при котором имеет место отставание среды от границы. При $\lambda=0$, что соответствует пластинке бесконечно-большой жесткости $\psi(s)=1$, т. е. давление распределено повсюду равномерно; при достаточно малых $\lambda < \lambda_{кр}$, давление в центре пластинки падает, а на опорах достигает максимума; если же уменьшать далее жесткость пластинки, то при достижении значения $\lambda=\lambda_{кр}$ на границе происходит отставание среды на некотором расстоянии от центра пластинки. Этот результат можно было бы предсказать заранее, руководствуясь соображениями непосредственной физической интуиции: он получился у нас после сложных численных расчетов, которые являются неизбежными в силу чрезвычайной громоздкости выражения для распределения нормального напряжения вдоль границы.

Автор приносит благодарность дирекции Ленинградского физико-механического института, при материальной помощи которой могли быть осуществлены сложные вычисления, связанные с решением системы уравнений и составлением таблиц.

ÜBERTRAGUNG DES DRUCKES AUF EINE PLATTE DURCH EIN ELASTISCHES MEDIUM

Von A. Lurje (Leningrad)

Zusammenfassung

In einem sehr grossen Abstand von der Grenze eines elastischen Mediums, welches im Halbraume $y > 0$ liegt, wird ein gleichmässiger Druck $(\sigma_y)_{y \rightarrow \infty} = -q$ verteilt. Als Grenze des Halbraumes dient bei $|x| > a$ eine vollkommen starre Wand, bei $|x| < a$ eine elastische Platte von der Breite $2a$. Die Aufgabe besteht darin die Verschiebung der Punkte dieser Platte und den Spannungszustand des Mediums zu bestimmen (insbesondere die Spannungskomponente $\sigma_y(x, 0)$ längs der Grenze). Das Problem war dem Verfasser im Zusammenhang mit der Ausarbeitung einer Methode zur Messung des Eisdruckes auf einen Damm vorgeschlagen. Das theoretische Interesse dieser Aufgabe besteht darin, dass die Grenzbedingungen nicht von vornherein bekannt sind: die Verschiebung v ist bei $|x| > a$ gleich Null, während bei $|x| < a$ $v = f(x)$ aus der Gleichgewichtsgleichung (2.16) der Platte bestimmt werden kann, in welche eine zunächst unbekannt Spannung $\sigma_y(x, 0)$ eintritt. Deshalb führt die Formulierung der Aufgabe unumgänglich auf eine Integralgleichung, welche für den Fall eines eingespannter Randes die Form (3.1) hat [s. auch (3.2)]. Diese Integralgleichung wird mittelst Darstellung des Kernes als Summe von Funktionenprodukte annäherend gelöst, deren jede nur von einem Argument abhängt.

Die Ergebnisse der Lösung für die Verschiebung der Platte sind durch Formel (4.1) dargestellt [s. auch (2.23), indem die Koeffizienten D in der Tabelle 2 zusammengestellt sind; der Parameter λ , von welchem die Lösung abhängt, wird durch die Steifigkeit der Platte und die Konstante k bestimmt, welche die elastischen Eigenschaften des Mediums kennzeichnet [s. entweder die Formel (2.12) welche für $\tau_{xy}(x, 0) = 0$, oder (2.13), welche für $u(x, 0) = 0$ statthat]. Die Durchbiegungen der Platte in ihrem Zentrum $\eta = -f(0)$ sind in der Tabelle 3 angeführt. Für grosse λ , die einer kleinen Steifigkeit der Platte entsprechen, weicht η von η_0 bedeutend ab, welch letzteres bei gleichmässiger Belastung statt hat. Weitere Rechnungen ergeben die Spannungsverteilung $\sigma_y(x, 0)$ längs der Grenze. Es wird wie man auch erwarten muss, $\sigma_y \rightarrow \infty(x, 0) \rightarrow -q$, während die Werte $\frac{\sigma_y(x, 0)}{-q} = \psi(s)$ bei $x = 0$ und $x = \pm a$ aus den Formeln (4.15) und (4.16) bestimmt werden können, wie auch aus der Tabelle 4. Auf Fig. 2 wird die Spannungsverteilung $\frac{\sigma_y(x, 0)}{-q}$ bei $\lambda = 0,5$ graphisch dargestellt. Bemerkenswert ist folgendes Ergebniss: ist λ kleiner als der kritische Wert λ_k , so wird $-\sigma_y(x, 0)$ überall positiv, während bei $\lambda > \lambda_k$ $-\sigma_y(x, 0)$ negativ wird, wobei es in einem gewissen Punkte der Grenze verschwindet; dies entspricht einer Ablösung des Mediums von der Grenze. Gemäss den ausgeführten Rechnungen, wird $1,7 < \lambda_k < 1,73$.