ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Д. А. ГРАВЕ „О ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ"

И. А. Кибель (Ленинград)

В № 5 „Известий Академии Наук СССР" за 1933 г. помещена работа Д. А. Граве „О движении сжимаемой жидкости". В небольшом введении Д. А. Граве разъясняет, что статья написана им с целью исправления условия сохраняемости векториальных линий, данного А. А. Фридманом в его известной книге „Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости". Неоднократно утверждая, что условие, выведенное Фридманом, неверно, Д. А. Граве не указывает однако, в каком месте рассуждение Фридмана содержит ошибку, а вместо этого предлагает свой собственный вывод.

В настоящей заметке мы имеем в виду показать, что точность результата А. А. Фридмана не затрагивается статьей Д. А. Граве. В самом начале вывода Д. А. Граве имеется погрешность; если ее исправить, то вновь получается результат Фридмана.

Чтобы вывести условие сохраняемости линий вектора $\mathfrak{A}$, Д. А. Граве рассматривает сперва бесконечно малый элемент AB линии L вектора $\mathfrak{A}$ и пишет $AB=\varepsilon\mathfrak{A}$, где ε — малая величина. Далее, Д. А. Граве рассуждает так. Через малый промежуток времени τ точка A перейдет (в силу движения жидкости) в точку C ($AC=\tau q$, где q — вектор скорости жидкости), точка B перейдет в D ($BD=\tau(q+\Delta q)$, где Δq есть приращение скорости вдоль $\varepsilon\mathfrak{A}$, т. е. $\varepsilon\mathfrak{A}\nabla q$). Чтобы линия, в которую переходит L (на которую ложатся точки C и D), была линией вектора $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ (а в этом очевидно и заключается условие сохраняемости линий вектора $\mathfrak{A}$), следует записать лишь, что направления отрезка CD и вектора $\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ совпадают. Это условие Д. А. Граве дает ошибочно в виде $CD=\varepsilon\left(\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)$, употребляя, повидимому по недосмотру, то же самое ε, что и в выражении для AB. Если эту погрешность исправить, написав $CD=\varepsilon'\left(\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)$, где, вообще говоря, $\varepsilon'\neq\varepsilon$, то мы вновь придем к условию Фридмана. В самом деле, имеем, очевидно,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD},$$

т. е.

$$\varepsilon\mathfrak{A}+\tau(q+\varepsilon\mathfrak{A}\nabla q)=\tau q+\varepsilon'\left(\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right)$$

или

$$\varepsilon(\mathfrak{A}+\tau\mathfrak{A}\nabla q)=\varepsilon'\left(\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right),$$

а, умножая обе части векторно на $\mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$, получим:

$$\left[\mathfrak{A}+\tau\mathfrak{A}\nabla q,\ \mathfrak{A}+\tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right]=0=\left[\mathfrak{A},\ \tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right]+[\tau\mathfrak{A}\nabla q,\ \mathfrak{A}]+\left[\tau\mathfrak{A}\nabla q,\ \tau\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right].$$

Сокращая на τ и полагая, что τ стремится к нулю, получим вновь условие Фридмана:

$$\left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}-\mathfrak{A}\nabla q,\mathfrak{A}\right]=[\mathrm{Helm}\,\mathfrak{A},\mathfrak{A}]=0.$$

Недоразумением является неожиданный результат, который Д. А. Граве называет первой теоремой Гельмгольца: „для сохранения вихревых линий необходимо, чтобы $\mathrm{div}\,q=0$". Известно, что первая теорема Гельмгольца была доказана сперва для несжимаемой жидкости (достаточность условия $\mathrm{div}\,q=0$), но потом была обобщена на случай жидкости баротропной.[1] Д. А. Граве приходит таким образом, к опровержению обобщенной теоремы Гельмгольца.

Ошибка, в которую впал Д. А. Граве, полагая $\varepsilon'=\varepsilon$, станет еще более выпуклой, если вспомнить, что вторая теорема Гельмгольца (о сохраняемости напряжения вихревых трубок) также справедлива и для баротропной жидкости.[2] Действительно, рассмотрим отрезок вихревой трубки, расположенной вдоль вихревой линии $\mathfrak{C}$, на малом участке ее $\varepsilon\mathfrak{C}$ и с малой площадью сечения σ. Количество жидкости, заключающейся в этом цилиндрике, будет $\rho\sigma\varepsilon\mathfrak{C}$ (ρ — плотность). Через промежуток времени τ весь цилиндрик наш перейдет в новый цилиндрик, окружающий вихревую линию $\mathfrak{C}'$ (сохраняемость вихревых линий) с сечением σ', длиной $\varepsilon'\mathfrak{C}'$ и плотностью ρ'. Таким образом

$$\rho\sigma\varepsilon\mathfrak{C}=\rho'\sigma'\varepsilon'\mathfrak{C}',$$

а по второй теореме Гельмгольца ($\sigma\mathfrak{C}=\sigma'\mathfrak{C}'$)

$$\rho\varepsilon=\rho'\varepsilon'.$$

Если положить теперь, как это делает Граве, $\varepsilon=\varepsilon'$, то и получится $\rho=\rho'$, т. е. несжимаемость. В сжимаемой жидкости, напротив, $\varepsilon'\neq\varepsilon$ и $\rho\neq\rho'$.

Из мелких неточностей, допускаемых Граве, отмечу лишь ошибочное появление члена dt в формуле (1), а также неверное выражение для сохраняемости вихрей в вязкой жидкости (если даже считать $\mathrm{Helm}\,\mathfrak{C}=0$, все же в этой формуле нехватает члена с градиентом плотности).

SUR UNE NOTE DE D. A. GRAVÉ

Par *J. Kiebel (Léningrade)*

Bésumé

Au commencement même de la note de D. A. Gravé („Sur le mouvement d'un fluide compressible". Bull. Akad. Sci. URSS, 1933, № 5) se trouve une faute. Cela mène à ce que tous ses résultats sont inexacts.

---

[1] См., напр., Н. Е. Кочин и Н. В. Розе. Введение в теоретическую гидродинамику, стр. 158.

[2] Loc. cit., стр. 159.