МЕЛКИЕ ЗАМЕТКИ

УДАР ПО ПЛАСТИНКЕ

А. И. Лурье (Ленинград)

В этой заметке мы рассматриваем динамическую задачу об изгибе неограниченной пластинки под действием внезапно приложенных к ней нагрузок. Введем следующие обозначения: (r, φ) — полярные координаты, $w(r, t)$—прогиб точки серединной плоскости, $Qf(t)$—приложенная в начале координат внешняя сила, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — жесткость пластинки, $\mu^2=\frac{2h\rho}{D}$, ρ — масса единицы объема пластинки.

Если принять точку приложения нагрузки за начало координат, то задача сводится к разысканию решения дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=-\mu^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

а) при $t=0$ и любом конечном и положительном r

$$w=\frac{\partial w}{\partial t}=0; \tag{2}$$

б) при любом конечном и положительном t

$$\left\{2\pi r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}_{r\to 0}=\frac{1}{D}Qf(t); \tag{3}$$

в) при любом конечном и положительном t и $r\to\infty$

$$w\to 0. \tag{4}$$

Нуждается в пояснении только условие б); оно выражает условие равновесия между приложенной силой $Qf(t)$ и равнодействующей перерезывающих сил взятой по окружностям бесконечно малого радиуса, охватывающей точку приложения силы $Qf(t)$:

1. Предположим сначала $f(t)=1$. Иными словами, рассмотрим задачу об изгибе пластины под действием мгновенно прикладываемой в момент $t=0$ силы Q, которая в дальнейшем остается постоянной. Приводим только результат решения, полученный по методу Heaviside'a:

$$w(r, t)=\frac{Qt}{4D\mu\pi}\left(\mathrm{Si}\frac{r^2\mu}{4t}-\sin\frac{r^2\mu}{4t}+\frac{r^2\mu}{4t}\mathrm{Ci}\frac{r^2\mu}{4t}\right), \tag{5}$$

где

$$\mathrm{Si}\, x = \int\limits_x^\infty \frac{\sin u}{u}\, du, \quad \mathrm{Ci}\, x = -\int\limits_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du.$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial w(r,\ t)}{\partial t} = \frac{Q}{4D\mu\pi} \mathrm{Si} \frac{r^2\mu}{4t}, \tag{6}$$

как нетрудно проверить непосредственным дифференцированием. Очевидно, что наше решение удовлетворяет начальным условиям (2); точно также удовлетворяется дифференциальное уравнение (1), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Замечая еще, что при $x \to 0$ $\mathrm{Ci}x$ имеет особенность вида $\ln |x|$, получим при любом конечном $t > 0$ и $r \to 0$

$$w(r,\ t) = \frac{Qt}{4D\pi} \frac{r^2}{4t} \ln r^2 + w_1(r^2,\ t) = \frac{Q}{8\pi D} r^2 \ln r + w_1(r^2,\ t), \tag{7}$$

где $w_1(r^2,\ t)$ — голоморфная функция от r^2 такая, что

$$\left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)\right\}_{r\to 0} = 0 \tag{8}$$

Из (7) и (8) непосредственно следует, что и условие (3) (для $f(t) = 1$) также удовлетворено. Наконец, замечая, что при достаточно большем x имеют место асимптотические разложения

$$\mathrm{Si}\, x = \frac{\cos x}{x}\left(1! - \frac{2!}{x^2} + \ldots\right) + \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \ldots\right);$$

$$x\,\mathrm{Ci}\, x = \sin x\left(1! - \frac{2!}{x^2} + \ldots\right) - \frac{\cos x}{x}\left(1! - \frac{3!}{x^2} + \ldots\right),$$

убедимся, что при любом конечном $t > 0$ и $r \to \infty$ $w \to 0$, т. е. условие (4) также удовлетворено. Итак, наше решение (5) удовлетворяет всем условиям задачи. Вместе с тем не трудно убедиться, что при любом конечном $r \geqslant 0$ и $t \to \infty$ прогиб w возрастает неограниченно. Далее, при любом $r > 0$, как бы мало t ни было, получается конечный прогиб w; иными словами, возмущение, действующее в центре $r = 0$, передается по пластинке мгновенно. Эти физически несообразные выводы получились вследствие того, что пластинка предполагается лишенной опор (неограниченной). Оказывается, что, как бы далеко ни были расположены опоры, влиянием их пренебречь нельзя, как это казалось бы на первый взгляд.

2. Обобщим теперь предыдущее решение. Для упрощения письма введем обозначение

$$\psi(x) = \mathrm{Si}\, x - \sin x + x\,\mathrm{Ci}\, x. \tag{9}$$

Пусть действие постоянной в дальнейшем силы началось не в момент $t = 0$, как это предполагалось в п. 1, а в момент $t = t_1$. В этом случае непрерывное во времени вместе с его первой производной решение задачи очевидно будет:

$$\left.\begin{aligned} & w(r,\ t) = 0 \text{ при } 0 < t < t_1, \\ & w(r,\ t) = \frac{Q(t-t_1)}{4D\mu\pi}\, \psi\left(\frac{r^2\mu}{4(t-t_1)}\right) \text{ при } t > t_1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Предположим теперь, что действие постоянной в дальнейшем силы Q началось в момент $t = 0$, тогда как в момент $t = t_1$ вступает в действие равная ей, но противоположная направленная сила — Q; иными словами, при $t > t_1$ действие силы Q прекращается. Решение задачи в этом случае дается очевидно формулами

$$\left.\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{Qt}{4D\mu\pi}\,\psi\left(\frac{r^2\mu}{4t}\right), \text{ при } 0 < t < t_1, \\ w(r, t) &= \frac{Q}{4D\mu\pi}\left\{ t\psi\left(\frac{r^2\mu}{4t}\right) - (t - t_1)\,\psi\left(\frac{r^2\mu}{4(t-t_1)}\right)\right\}, \text{ при } t > t_1. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Предполагая теперь, что промежуток времени $t - t_1 \to 0$, причем импульс силы $\underset{t-t_1 \to 0}{Q(t - t_1)} = S$ сохраняет конечное значение, получим (см. (6))

$$w(r, t) = \frac{S}{4D\mu\pi}\left[t\psi\left(\frac{r^2\mu}{4t}\right)\right]' = \frac{S}{4D\mu\pi}\,\mathrm{Si}\left(\frac{r^2\mu}{4t}\right) \quad (12)$$

(штрихом обозначена производная по времени). Таково решение задачи об изгибе неограниченной пластины под действием приложенного в момент $t = 0$ импульса S.

Заметим, что здесь при любом конечном $r \geqslant 0$ и $t \to \infty$ имеем

$$\underset{t \to \infty}{w(r, t)} = \frac{S}{4\pi D\mu}\,\mathrm{Si}(0) = \frac{S}{8D\mu},$$

т. е. пластина получает одинаковый во всех точках прогиб.

Теперь уже не трудно получить решение задачи для силы, изменяющейся по произвольному закону. Предположим для этого, что в момент t_0 на пластину в течение весьма малого промежутка времени Δt_0 действовала сила $Qf(t_0)$. На основании (12) прогиб пластины при любом $t > t_0$ дается формулой

$$w(r, t) = \frac{Qf(t_0)\,\Delta t_0}{4D\mu\pi}\,\mathrm{Si}\left(\frac{r^2\mu}{4(t - t_0)}\right). \quad (13)$$

Переход к непрерывно действующей силе очевидно получается интегрированием этого выражения по t_0 в пределах от 0 до t. Получаем:

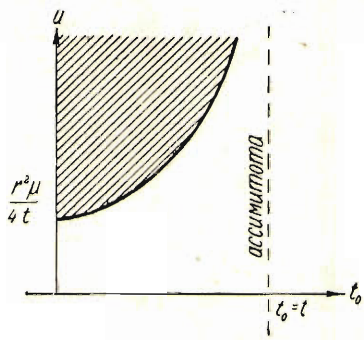

Рис. 1.

$$w(r, t) = \frac{Q}{4D\pi\mu}\int_0^t f(t_0)\,\mathrm{Si}\left(\frac{r^2\mu}{4(t - t_0)}\right)dt_0 = \frac{Q}{4D\mu\pi}\int_0^t f(t_0)\,dt_0 \int_{\frac{r^2\mu}{4(t-t_0)}}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du. \quad (14)$$

Чтобы облегчить вычисления по этой формуле, следует переменить порядок интегрирования. Для этого отметим, что интегрирование здесь производится по бесконечной области плоскости (t_0, u) ограниченной ветвью гиперболы (рис. 1)

$$u = \frac{r^2\mu}{4(t - t_0)} \quad (14')$$

и осью u в промежутке $\left(\frac{r^2\mu}{4t}, \infty\right)$. Разрешая уравнение (14) относительно t_0, найдем:

$$t_0 = t - \frac{r^2\mu}{4u}, \quad (15)$$

и следовательно пределами интегрирования по t_0 будут 0 и $t-\frac{r^2\mu}{4u}$; пределами же интегрирования по u служат $\frac{r^2\mu}{4u}$ и ∞. Находим

$$w(r,\ t)=\frac{Q}{4D\mu\pi}\int\limits_{\frac{r^2\mu}{4t}}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\int\limits_{0}^{\frac{r^2\mu}{4u}}f(t_0)\,dt_0. \tag{16}$$

Решения (5) и (12) получаются отсюда непосредственно как частные случаи. Другим приложениям этой формулы будет посвящена следующая заметка.

STOSS AUF EINE PLATTE

Von *A. Lurje* *(Leningrad)*

Zusammenfassung

In der vorstehenden kleinen Mitteilung wird die Aufgabe über die Biegung einer unbegrenzten Platte unter dem Einfluss einer moment an ihre Wirkung beginnenden Kraft $Qf(t)$ betrachtet. Die Durchbiegung der Platte wird durch die Formel (16) endgültig dargestellt; im speziellen Falle $f(t)=\text{const}$ wird die Aufgabe durch die Formel (5) gelöst.
