ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

КЛАССИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. И. Страхович (*Ленинград*).

ЧАСТЬ I

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

На русском языке мы не имеем общей сводки работ, посвященных описанию основных задач и методов механики вязкой жидкости, построенной на линейных законах внутренних сил вязкости, т. е. на уравнениях Navier—Stokes'a. Предлагаемая обзорная работа ставит своей целью восполнить этот пробел. Первая часть работы содержит в введении краткое описание подходов к общим уравнениям движения вязкой жидкости и их следствиям; в трех последующих разделах последовательно рассматриваются основные типы решений уравнений Navier—Stokes для прямолинейного, плоского и пространственного движений, причем в этих главах совершенно не затрагиваются вопросы движения твердого тела в вязкой жидкости и гидромеханической теории смазки, которые будут изложены в II и III частях. В тексте делаются ссылки на литературу, помещаемую в конце этой части.

Список основных обозначений, применяемых в части I-й.

t — время,
x, y, z — эйлеровы переменные,
$\bar{v}$ — скорость,
v_x, v_y, v_z — проекции скорости на Декартовы координаты,
q_1, q_2, q_3 — криволинейные координаты,
v_1, v_2, v_3 — проекции скорости на криволинейные координаты,
p — гидромеханическое давление,
ρ — плотность (удельная масса),
Γ — циркуляция,
U — потенциальная энергия объемных сил,
T — тензор напряжений,
$\bar{k}$ — объемная сила,
μ — коэффициент вязкости,
λ — коэффициент упругости,
ν — коэффициент кинематической вязкости,
$\bar{\omega}$ — вихрь ($\text{rot}\ \bar{v} = \bar{\omega}$),
E_i — внутренняя энергия единицы объема,
θ — температура °C,
k — коэффициент теплопроводности.

Введение. Основные уравнения

§ 1. Основные уравнения движения вязкой жидкости

L. Euler [1] дал уравнения гидромеханики идеальной жидкости, но не связал их с внутренними силами, которые образуются в жидкости при ее движении вследствие разности скоростей ее частиц.

Уравнения гидромеханики идеальной жидкости не дают представления о механизме передачи движения от одного слоя к другому. Только уравнение неразрывности указывает на непрерывное распределение скоростей в движущейся жидкости. Приближение уравнений Euler'a к действительности требовало введения в них сил вязкости. Вывод уравнений движения жидкости с учетом этих сил принадлежит Navier [2], который, исходя из представления о зависимости от расстояния сил, действующих между частицами жидкости, вывел уравнения движения вязкой жидкости, которые в векторной форме могут быть представлены так:

$$\rho \overline{w} = \rho k - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \overline{v} + \mu \Delta \overline{v}. \tag{1}$$

Выводу этих же уравнений посвящена работа Poisson'a. [3]

Дальнейшее развитие гидромеханики вязкой жидкости связало вывод основных уравнений с представлением о тензоре деформации скорости, т. е. с тензором, определяемым уравнением

$$Def\overline{v} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial x_x}{\partial y}\right), & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{matrix} \right| \tag{2}$$

Вводя так же, как и в теории упругости, обобщенный закон Hoock'a для зависимости тензора внутренних сил от скоростей деформаций по формуле

$$T = \lambda \operatorname{div} \overline{v} + 2\mu\, Def\,\overline{v} - p, \tag{3}$$

Stokes [5] приходит к уравнению Navier.

Дальнейшее исследование общих уравнений движения вязкой жидкости главным образом относятся к их связи с общими уравнениями и основными законами термодинамики и теплопроводности (Duhem [6], Voigt [7], Бобылев [8], Weinstein [9], Helmholtz [10], Brillouin [11] и др.) и обобщение их на случай переменной вязкости (Hamel [12]).

Обычно в курсах не приводятся общие теоремы для вязких жидкостей, аналогичные теоремам Bernoulli, Thomson'a и др., хотя таковые могут быть весьма просто выведены при самых общих условиях, относительно сил вязкости и могут дать качественную оценку движения жидкости. В виду этого здесь без доказательства приведены теоремы для вязкой жидкости, соответствующие уравнениям энергии и уравнению Thomson'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \rho k\overline{v} + \overline{v}\dot{\overline{r}}T + \frac{v^2}{2}\frac{d\rho}{dt} \text{ (теорема живых сил)}, \tag{4}$$

$$\frac{dE_i}{dt} + E_i \operatorname{div} \overline{v} = \operatorname{div}(k\nabla\theta) + T\nabla \cdot \overline{v} \text{ (уравнение теплопроводности и I закон термодинамики)} \tag{5}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \int\limits_F \overline{n}\Delta\overline{\omega}\, dF \text{ (теорема W. Thomson'a)}, \tag{6}$$

причем в случае несжимаемой жидкости $T\nabla \cdot \overline{v}$ переходит в диссипативную функцию Rayleigh'a.

Пограничные условия при интегрировании уравнений вязкой жидкости в современных работах [13] сводятся к условиям прилипания к твердым стенкам, а в более ранних работах предполагалось скольжение, как, например, у Kirhhoff'a [14-15].

К основным уравнениям для замкнутости присоединяются уравнение сплошности и уравнение состояния, т. е. уравнения

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div}\overline{v}=0, \tag{7}$$

$$F(p, \rho, \theta)=0; \tag{8}$$

уравнение (7) для несжимаемой жидкости сводится к уравнению

$$\operatorname{div}\overline{v}=0; \tag{9}$$

что же касается уравнения (8), то либо оно отбрасывается, либо ρ принимается за линейную функцию температуры. [30]

§ 2. Преобразование основных уравнений

Уравнения вязкой несжимаемой жидкости могут быть сведены к уравнению вихрей путем исключения полного запаса энергии

$$\mathrm{E}=\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+U \tag{10}$$

(аналогично выводу Helmholtz'a для идеальной жидкости), причем они будут представляться так:

$$\frac{d\omega}{dt}=\overline{\omega}\nabla\cdot\overline{v}+\nu\Delta\overline{\omega}. \tag{11}$$

Эти уравнения показывают, что в вязкой жидкости с течением времени вихри затухают, распространяясь по всему объему жидкости.

Lamb [17] и Громеко [18] вводят уравнения, в которых полное ускорение заменяется таким выражением:

$$\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+[\overline{\omega}, \overline{v}], \tag{12}$$

и тогда основные уравнения движения заменяются такими:

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+[\overline{\omega}, \overline{v}]=-\nabla\mathrm{E}+\nu\Delta\overline{v}. \tag{13}$$

В том случае, если [31]

$$[\overline{\omega}, \overline{v}]=\nabla H, \tag{14}$$

уравнения (13) упрощаются и по исключении E и H переходят в такое:

$$\frac{d\omega}{dt}=\nu\Delta\overline{\omega}. \tag{15}$$

В ортогональных криволинейных координатах основные уравнения вязкой жидкости, выведенные различными авторами (Appell, [20] Lock, [21] Bateman, [22] Hopf [23] и др.), могут быть представлены так:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv_1}{dt}+a_1a_3v_3\left(v_1\frac{\partial A_1}{\partial q_3}-v_3\frac{\partial A_3}{\partial q_1}\right)-a_1a_2v_2\left(v_2\frac{\partial A_2}{\partial q_1}-v_1\frac{\partial A_1}{\partial q_2}\right)=\\&\qquad=Q_1-\frac{a_1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_1}+\nu a_2a_3\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2\omega_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3\omega_3)\right\}\\&\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2A_3v_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2A_1v_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1A_2v_3)=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

при

$$\left.\begin{array}{c} A_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \ldots, a_1=\frac{1}{\sqrt{A_1}} \\ v_1=A_1 q_1, \ldots, \omega_1=a_2 a_3\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 v_3)-\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 v_2)\right\} \\ \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+a_1 v_1 \frac{\partial}{\partial q_1}+a_2 v_2 \frac{\partial}{\partial q_2}+a_3 v_3 \frac{\partial}{\partial q_3}. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Особенно часто за криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 принимаются цилиндрические координаты [13, 22].

Кроме дифференциальных преобразований уравнений вязкой жидкости Oseen [23–27] заменил их интегральной формой, которую получил, применяя закон количества движения к некоторой меняющейся во времени жидкой области.

Большинство задач, решаемых для вязкой жидкости, рассматриваются для случая малости инерционных членов, т. е. малости выражения $\bar{v}\nabla\cdot\bar{v}$ (Stokes[5]) или замене этого выражения таким выражением $\bar{a}\nabla\cdot u$, где a — постоянный вектор переносного движения, а $\bar{u}$ — вектор малой дополнительной скорости (Oseen, Boussinesq, Lorentz и др.)

Все вышеприведенные уравнения легко распространяются на случай относительного движения (Ekman, Bjerknes и т. п.). Этим указанием заканчивается общий обзор основных уравнений, и в дальнейших разделах будет рассматриваться только несжимаемая жидкость.

А. Прямолинейное движение

§ 1. Установившееся движение

Основные уравнения для прямолинейного движения вязкой жидкости для частных случаев исследовались Stokes'ом,[5] Hagen'ом[36] и др. Особенно полно они были рассмотрены Boussinesq'ом[28] и Brillouin'ом[30]. Общая задача для установившегося движения в данном случае сводится к уравнению Poisson'a и Laplace'a при пограничном условии $v=0$ или постоянной[32], что соответствует задаче о кручении в теории упругости, задаче о прогибе мембраны[33] и плоской электростатической задаче[30, 34, 35]. Исследованы случаи движения в трубах с сечением эллиптическим, прямоугольным, треугольным, равносторонним, кругового сектора и т. п., а также для подобных форм открытых каналов. К уравнению Laplace'a сводятся задачи на движение жидкости вследствие их прилипания к цилиндрическим поверхностям, которые движутся относительно друг друга по своим осям. В общем случае скорость может быть представлена таким выражением:

$$v(x, y)=-\frac{M}{2\pi\nu}\int_F \xi(x, y; x', y')\,dF, \qquad (16)$$

где ξ — функция Green'a для данного контура трубы, а M — градиент потенциальной энергии.

§ 2. Неустановившееся движение

Уравнение неустановившегося прямолинейного движения вязкой жидкости совпадает с уравнением распространения тепла в стержне, сечение которого то же, что и сечение трубы, т. е. это уравнение имеет такой вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v = M \tag{17}$$

при $v=0$ или постоянной на поверхности трубы [16, 22, 30, 32].

Эти уравнения решены для случаев движения: между параллельными пластинками, в цилиндрической трубе [38], распространения плоского разрыва и т. п. Кроме того ряд задач решен приближенно, как, например, о неустановившемся истечении из отверстий [38–42]. Большинство этих задач решается при помощи разложения в ряды по нормальным функциям

$$v(x, y, t) = v_0(x, y) + \Sigma\, v_n(x, y)\, e^{\alpha_n t}, \tag{18}$$

где α_n могут быть любые постоянные числа как вещественные, так и комплексные, или при помощи интегралов Fourier, т. е.

$$v(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^\infty e^{-\nu\lambda^2 t}\, d\lambda \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta) \cos\lambda(x-\xi) \cos\lambda(y-\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

§ 3. Случай учета температурных влияний

Прямолинейное движение вязкой жидкости в круговой трубе рассмотрено некоторыми авторами [43–44] с учетом теплопроводимости, причем метод решения состоит в подстановке в уравнение теплопроводности, которое в этом случае представляется в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a_2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) + \nu\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}, \tag{20}$$

функции скорости для соответствующей задачи, найденной методами, изложенными в предшествующих двух параграфах, и затем интегрировании полученного уравнения.

B. Плоское движение

§ 1. Общие уравнения

В предположении, что при движении жидкости отсутствует проекция скорости на ось z-ов, и что все величины не зависят от z, после несложных преобразований основные уравнения в форме Lamb'a—Громеки, определяющие движение, представятся так: [16, 17, 22, 32, 45]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \omega v_y = -\frac{\partial E}{\partial x} + \nu\Delta v_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \omega v_x = -\frac{\partial E}{\partial y} + \nu\Delta v_y, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial x_x}{\partial y}, \quad E = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U. \tag{22}$$

Ряд авторов (Kármán [46], Taylor [47], Oseen [48], Мещерский [49], Громеко [18], Страхович [50], Kampé de Fériet [51]), вводя функцию тока, заменяют эту систему такими уравнениями:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{D(\psi, \omega)}{D(x, y)} = \nu\Delta\omega \text{ при } \frac{D(\psi, \omega)}{D(x, y)} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}, \tag{23}$$

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}. \tag{24}$$

*

Для установившегося движения уравнение (23) упрощается, переходя в такое уравнение:

$$\frac{D(\psi, \omega)}{D(x, y)} = \nu\Delta^2\psi, \tag{25}$$

которое при помощи двойного применения формулы Green'a переходит в такое интегральное уравнение [32]:

$$2\pi\psi(x, y) = \int\limits_{(s)} \left(G\frac{d\omega}{dn} - \omega\frac{dG}{dn} + \Delta G\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\Delta G}{dn}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\nu}\iint\limits_{(F)} \Delta\psi \frac{D(G, \psi)}{D(x, y)} dx'dy', \tag{26}$$

где G есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta^2 G = 0, \tag{27}$$

и вблизи точки (x, y) представляется так:

$$G = -r^2(\ln r - 1) + \text{регулярная функция} \tag{28}$$

при $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$.

§ 2. Точные спиральные решения уравнений установившегося движения при плоской задаче

Hamel [53], Oseen [49], Страхович [54] рассмотрели частные решения уравнений (21), (23) и (25). Наиболее обще к этой задаче подошел Oseen [32]. Он вводит вместо переменных x и y новые переменные ξ и η, которые представляют вещественную и мнимую часть аналитической функции $\zeta = \xi + i\eta$ от $z = x + iy$; тогда уравнение (25) преобразуется в такое уравнение от переменных ξ и η:

$$\frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(\xi, \eta)} - \Delta\psi\frac{D(\ln Q, \psi)}{D(\xi, \eta)} = \nu\Delta^2\psi + \nu\frac{\Delta Q}{Q}\Delta\psi +$$

$$+ 2\nu\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial\xi}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial \ln Q}{\partial\eta}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta}\right) \tag{29}$$

при

$$Q = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2.$$

Далее Oseen предполагает, что ψ, ξ и η удовлетворяют следующим условиям

1) $\psi = \chi(\xi) + \alpha\eta$, $\alpha = \text{const}$; 2) $\ln Q = a\xi + b\eta$, a и $b = \text{const}$;

тогда он получает для определения χ такое уравнение

$$\chi^{IV} + \left(2a + \frac{\alpha}{\nu}\right)\chi''' + \left(a^2 + b^2 + \frac{a\alpha}{\nu}\right)\chi'' - \frac{b}{\nu}\chi'\chi'' = 0. \tag{30}$$

Уравнение подстановкой $\chi'' = w$ и $\chi' = \tau$ (новая независимая переменная) приводится к такому уравнению:

$$w\frac{dw}{d\tau} + \left(2a + \frac{\alpha}{\nu}\right)w + \left(a^2 + b^2 + \frac{a\alpha}{\nu}\right)\tau - \frac{b}{2\nu}\tau^2 = \text{const}. \tag{31}$$

Значение ξ, η, как функции от x, y, получаются из условия 2), которое приводит к такому соотношению между ζ и z:

$$\zeta = -\frac{2}{c}\ln(z - z_0), \tag{32}$$

где $c = a + bi$; откуда следует, что

$$\xi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \ln r - b\theta), \quad \eta = -\frac{2}{a^2 + b^2}(b \ln r + a\theta), \tag{33}$$

где r и θ — полярные координаты плоскости x, y.

В общем случае уравнение не может быть приведено к квадратурам, но в частных случаях его интеграл выражается в квадратурах. На такие частные случаи первый указал Hamel. Мы перечислим эти частные случаи; объединяя в одно как случаи Hamel'a, так и Oseen'a.

1a) $b = 0, \alpha = 0$, тогда

$$\chi(r) = r^2(A + B \ln r) + C \ln r + D, \tag{34}$$

причем линии тока будут круги

1b) $b = 0$, $\alpha \neq 0$, тогда:

$$\chi(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{2 + \frac{\alpha}{a\nu}} + C_3 \ln r + C_4, \tag{35}$$

линии тока будут спиралями;

2) $a = 0$, $\alpha = 0$; тогда χ выражается через вейерштрассову функцию „дзета" от угла θ, а именно:

$$\chi(\theta) = 2\nu\left[-\sqrt[3]{\frac{18}{\nu b^2}}\,\zeta\left[\frac{2(\theta_0 - \theta)}{\sqrt[3]{12\nu b^2}}\right] + 3(\theta_0 - \theta)\right] + C; \tag{36}$$

в рассматриваемом случае линии тока будут прямые.

3) $2a + \frac{\alpha}{\nu} = 0$; этот случай по методу интегрирования уравнения (31) сводится к предыдущему, но только θ заменяется ξ.

§ 3. Точные решения для неустановившегося движения

Различные авторы подходят к решению этих уравнений различными способами. Страхович [50, 54] рассматривает преобразование, аналогичное преобразованию Oseen'a, но вводит такие условия для ψ, ξ и η:

$$1)\ \psi = \chi(\xi, t) + \alpha\eta,\ \alpha = \text{const};\quad 2)\ Q = f(\xi);$$

тогда он приходит к таким двум значениям для ξ:

$$\xi = x \cos\delta + y \sin\delta + c, \text{ где } \delta \text{ и } c = \text{const}. \tag{37}$$

$$\xi = A \ln r + B, \qquad \text{где } A \text{ и } B = \text{const}. \tag{38}$$

В случае (37) уравнение для $\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} = w$ представляется так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu Q \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \alpha Q \frac{\partial w}{\partial \xi} \text{ при } Q = \text{const}; \tag{39}$$

откуда имеем

$$w = \Sigma(A_n e^{\gamma_1 \xi - k_n t} + B_n e^{\gamma_2 \xi - k_n t}), \tag{40}$$

где γ_1 и γ_2 — корни уравнения

$$\gamma^2 + \frac{\alpha}{\nu}\gamma + \frac{k_n}{\nu Q} = 0. \tag{41}$$

В случае (38) уравнение для w будет такое:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\frac{\alpha}{a}-3\nu\right)\frac{\partial w}{\partial r}+\left(4\nu-\frac{2\alpha}{\nu}\right)w. \tag{42}$$

Интеграл этого уравнения может быть представлен как такая сумма:

$$w=\Sigma e^{-k_n t}\,\Phi_n(r), \tag{43}$$

где Φ_n выражаются через функции Bessel'я.

Hamel[53] сразу полагает, что

$$\psi=\psi_0(r_1 t)+\alpha\Theta, \tag{44}$$

и приходит к уравнению (42), которое путем подстановки

$$w=r^m t^n F(q),\ \text{где}\ q=\frac{r^2}{t} \tag{45}$$

приводит к уравнению

$$\frac{d^2F}{dq^2}+\left(\frac{4(m-1)+\frac{2\alpha}{\alpha\nu}}{q}+\frac{1}{4\nu}\right)\frac{dF}{dq}+\left(\frac{(m-2)\left(m-2+\frac{\alpha}{\alpha\nu}\right)}{q^2}-\frac{n}{\alpha q}\right)F=0, \tag{46}$$

для которого находит частные интегралы при предположениях

$$1)\ m=2,\ 4n=-\left(\frac{2\alpha}{a\nu}+4\right),\ \text{или}\ 2)\ m=2-\frac{\alpha}{a\nu},\ 4n=-\left(4-\frac{2\alpha}{\alpha\nu}\right)$$

в таком виде

$$F=Ce^{-\frac{q}{4\nu}}. \tag{47}$$

Далее, Hamel и Страхович рассматривают случаи, при которых $\alpha=0$, т. е. линии тока будут концентрическими кругами.

Hamel[32] рассматривает такое решение для ψ:

$$\psi=-\frac{C}{a^2}\int\frac{e^{-\sigma}d\sigma}{\sigma}=C_1(t)\ln r+C_2(t)\ \text{при}\ \sigma=\frac{r^2}{4\nu t}, \tag{48}$$

а Страхович дает решение, расположенное в ряд по функциям Bessel'я. Кроме этого случая Hamel и Oseen рассматривают случаи, при которых $1+\frac{\alpha}{a\nu}=0$, так как тогда для вихря имеет место такое уравнение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}, \tag{49}$$

частное решение которого может быть представлено в виде:

$$\omega=Ct^{-2}e^{-\frac{r^2}{4\nu r}}. \tag{50}$$

При помощи вышеперечисленных уравнений исследуется вопрос о распространении и затухании вихревого движения в вязкой жидкости, что для частных примеров было рассмотрено Саткевичем[55] и Некрасовым[56].

§ 4. Другие частные случаи не установившегося движения в плоскости

Здесь без подробного доказательства приведем ряд случаев точного интегрирования уравнений не установившегося движения вязкой жидкости в плоскости.

1. Допустим, что функция тока представляется уравнением (Taylor[47], Страхович[50])

$$\psi = e^{-kt} h(x, y), \tag{51}$$

где g определяется уравнением

$$\Delta g = -\frac{k}{\nu} g \tag{52}$$

и пограничными условиями. Задача об интегрировании уравнения (6) приводится к уравнению мембраны.[50]

2. Полагая (Brill)[57, 22],

$$\psi = y f(x, t), \tag{53}$$

приводим задачу к интегрированию уравнения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{54}$$

Частные интегралы этого уравнения могут быть найдены таким способом. Пусть

$$f(x, t) = f(\sigma), \text{ где } \sigma = x + \alpha t; \tag{55}$$

тогда уравнение (54) перейдет в такое уравнение:

$$(\alpha - f) \frac{d^3 f}{d\sigma^3} + \left(\frac{df}{d\sigma} - \nu \right) \frac{d^2 f}{d\sigma^2} = 0; \tag{56}$$

откуда следует, что если положить

$$f(\sigma) = a + b e^{n\sigma}, \tag{57}$$

то, при условии существования равенства

$$a = \alpha - \frac{\nu}{n}, \tag{58}$$

уравнение (56) будет удовлетворено.

3. Если положить (Rossenblatt)[58, 22, 59],

$$\psi = x f(t) + \omega g(t), \tag{59}$$

то получим такое уравнение для вихря

$$\omega = \Delta \psi = g(t), \qquad \Delta \omega = \frac{\psi - x f(t)}{g(t)}, \tag{60}$$

и основное уравнение (25) преобразуется так:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + f(t) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\nu \omega}{g(t)} \text{ при } \Delta \omega = \frac{\omega}{g(t)}, \tag{61}$$

частные интегралы которого могут быть представлены в таком виде:

$$\psi = ax - b^2 e^{-\frac{\nu t}{b^2}} I_0 \left(b^{-1} \sqrt{x^2 + (y - at)^2} \right), \tag{62}$$

$$\varphi = ax - b^{-2} \exp \left(y \sqrt{c^2 + b^2} - t \left(c \sqrt{c^2 + b^2} - \nu b^2 \right) \right) \sin cx. \tag{63}$$

4. При замене в формуле (59) x на r, т. е. если ψ определяется уравнением

$$\psi = rf(t) + \omega g(t), \tag{64}$$

то частный интеграл дается формулой

$$\psi = ar^2 - 4ab + bG_n(r)\exp\left(\frac{\nu t}{b}\left(b - n\left(\theta + 2nt\right)\right)\right), \tag{65}$$

где функция G_n определяется уравнением

$$\frac{d^2G_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_n}{dr} + \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{b}\right)G_n = 0, \tag{66}$$

т. е. уравнением, приводящимся к уравнению Bessel'я.

Общий существенный недостаток всех вышеприведенных точных решений — это невозможность удовлетворить наперед заданным граничным условиям и в некоторых случаях вообще каким-либо граничным условиям, в виду их частного характера.

§ 5. Приближенные методы решения плоской задачи

Первый приближенный метод решения плоской задачи заключается в отбрасывании в основных уравнениях (1) инерционных членов, что сводит задачу на такую систему линейных уравнений:[17]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \nu\Delta v_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \nu\Delta v_y, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \tag{67}$$

полагая

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{68}$$

после подстановки получаем такие уравнения для определения φ, ψ и Π:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = f(t), \quad \Pi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{69}$$

т. е. задача свелась на известные уровни математической физики, которые должны быть решены, в случае твердых границ, при таких граничных условиях (прилипание жидкости),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{70}$$

Если имеет место установившееся движение, то уравнения (67) могут быть проинтегрированы таким способом.[60] Введем в рассмотрение функцию комплексного переменного

$$f(z) = \Pi + i\nu\Delta\psi; \tag{71}$$

тогда по условию Cauchy—Riemann'a функции Π и $\nu\Delta\psi$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\nu\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \nu\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}; \tag{72}$$

откуда следует, что, приняв ψ за функцию тока, мы удовлетворяем системе (67) при установившемся режиме. Заметим, что подобный метод можно было бы применить и к неустановившемуся режиму, но тогда за функцию f следовало бы принять такое выражение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi\right), \tag{73}$$

причем в том и другом случае $\Delta\psi$ представляет вихрь.

§ 6. Волнообразное движение вязкой жидкости в плоскости

Stokes, Lamb,[17] Basset,[19] Wien[61] и др. в ряде работ рассматривают периодические решения упрощенных уравнений в случае $\Pi = \text{const}$. Для этого случая мы имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi, \tag{74}$$

которое в случае прямолинейного горизонтального дна имеет такое решение:

$$\psi = \Sigma A_n e^{\lambda_n t + \alpha_n x} \operatorname{sh} \beta_n (y - h). \tag{75}$$

Далее, эти же авторы рассматривают случай распространения волнового движения от некоторого точечного источника, в этом случае ψ представляется таким рядом:

$$\psi = \Sigma A_n e^{\lambda t} f(r), \tag{76}$$

где $f(r)$ выражается через функцию Bessel'я нулевого порядка.

Те же авторы, а также Tait,[63] Hough,[64] Reynolds[65] и Aitken[66] рассматривают случай, если Π не постоянно, но тогда уравнение (69) для ψ заменяется аналогичным уравнением для ω после исключения Π, которое определяется по формулам аналогично формулам (75) и (76).

Зная ω, ψ находится как периодическое решение уравнения Poisson'a, причем на свободной поверхности приближенно удовлетворяется условие постоянства внешнего давления.

§ 7. Упрощенные уравнения с учетом переносной скорости

Применяя метод Oseen'a[17, 23], указанный в введении к плоскому движению, имеем такие уравнения:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + a\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial x} + \nu \Delta u_x, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} + a\frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial y} + \nu \Delta u_y, \tag{77}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{78}$$

которые подстановкой

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{79}$$

приведутся к разысканию некоторой аналитической функции $L + Mi$, определяемой уравнениями

$$L = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + E, \quad M = \frac{\partial \psi}{\partial t} + a\frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu \Delta \psi. \tag{80}$$

В частном случае полагая $L=M=0$, найдем ψ из уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+a\frac{\partial\psi}{\partial x}-\nu\Delta\psi=0, \tag{81}$$

которое подстановкой

$$\psi=e^{\lambda t-\frac{ax}{2v}}\Psi(x, y) \tag{82}$$

перейдет в уравнение

$$\Delta\Psi-\left(\frac{a^2}{4\nu}+\frac{\lambda}{\nu}\right)\Psi=0, \tag{83}$$

решение которого может быть представлено рядом. Функция φ найдется из уравнений Laplace'a, в виду существования уравнения несжимаемости (78).

С. Пространственное движение

§ 1. Точные решения

Несколько частных случаев на точное решение вязкой жидкости в пространстве были даны Oseen'ом,[20] Taylor'ом,[67] Kármán'ом,[32] Noether'ом[16, 68–70], Страховичем[54] и др. Наиболее важные случаи перечислены ниже.

1) $v_z=0$ в этом случае проекции скорости определяются по уравнениям

$$v_x=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y=\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

причем в частном случае ψ может быть определена по формулам

$$\psi=Ae^{\lambda t+k_1x+az}+Be^{\lambda t+k_2x+az}+by, \tag{84}$$

где k_1 и k_2 — корни уравнения

$$k^2+\frac{b}{\nu}k+\frac{a^2\nu-\lambda}{\nu}=0. \tag{85}$$

2) $v_\theta=\frac{\partial\psi}{\partial r}(t, r, z)^{22, 71-76}$; тогда основные уравнения движения примут такой вид для скорости:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]=-\frac{B}{r} \tag{86}$$

и для функции тока, вводимой по формуле $v=\frac{\partial\psi}{\partial r}$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]=-B\ln r+c. \tag{87}$$

Полагая $B=C=0$, можно интеграл последнего уравнения представить таким рядом

$$\psi=\Sigma\psi_n(r, z)e^{-k_n t}, \tag{88}$$

где ψ_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_n}{\partial z}\right)+\frac{k_n r}{\nu}\psi_n=0; \tag{89}$$

в частности, если ψ_n зависит только от $R=\sqrt{r^2+z^2}$, то ψ_n представляется таким уравнением:

$$R\psi_n=A_n\cos\frac{k_nR}{\nu}+B_n\sin\frac{k_nR}{\nu}, \tag{90}$$

что соответствует вращению сферы в вязкой жидкости. Аналогичным методом найдется вращение ограниченного цилиндра и бесконечно широкого диска.

3. Если $v_\theta = 0$[54], все величины не зависят от θ (меридианное движение), то, полагая функцию тока

$$\psi = C_1 r^4 + C_2 r^2 - \frac{\alpha}{2} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} z^2 + C_3 \tag{91}$$

или

$$\psi = C_1 r^4 + C_2 r^{2-\frac{\alpha}{\nu}} + C_3 r^2 + \alpha z + C_4, \tag{92}$$

мы удовлетворяем уравнениям установившегося движения.

4. Если $v_r = 0$[54], и все величины не зависит от z (винтовое движение), то в данном случае имеем такие выражения для скоростей:

$$v_\theta = \frac{C}{2} r \ln r + \frac{C}{r} + \frac{C_1 r}{2} \tag{93}$$

$$v_z = \varphi_0(r) + \Sigma e^{\lambda\theta} \varphi_\lambda(r), \tag{94}$$

где φ_0 и φ_λ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2\varphi_\lambda}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_\lambda}{dr} + \lambda \frac{\lambda - r v_\theta}{r^2} \varphi_\lambda = 0, \tag{95}$$

$$\frac{d^2\varphi_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_0}{dr} = M. \tag{96}$$

Последнее уравнение легко интегрируется и дает такое выражение для φ_0:

$$\varphi_0 = C \ln r + C_1 + \frac{M}{2} r^2. \tag{97}$$

Аналогичные методы могут быть обобщены на неустановившееся движение.

Вышеприведенные решения, как и в случае плоского движения, не могут удовлетворить любым пограничным условиям.

§ 2. Приближенные решения

Общие решения упрощенных уравнений вязкой жидкости, т. е. уравнений[17, 60, 77, 78]

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -\nabla \Pi + \nu \Delta \overline{v}, \quad \operatorname{div} \overline{v} = 0 \tag{98}$$

могут быть даны таким рядом

$$\overline{v} = \Sigma(\operatorname{rot} \overline{A}_n + \nabla \varphi_n) e^{-k_n t}, \quad \Pi = \Sigma \Pi_n e^{-k_n t}, \tag{99}$$

где A_n, φ_n и Π_n не зависят от t и определяются из уравнений

$$\Delta A_n + \frac{k_n}{\nu} A_n = \overline{L}, \tag{100}$$

где L — гармоническая, фунция, а Π_n, φ_n удовлетворяют уравнению Laplace'a.

Аналогичная подстановка может быть применена к уравнениям Oseen'a:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + a \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = -\nabla \Pi + \nu \Delta \overline{u}, \quad \operatorname{div} \overline{u} = 0, \tag{101}$$

причем $\overline{A}_n$ удовлетворяет уравнению вида

$$\Delta\overline{A}_n + \frac{a}{\nu}\frac{\partial A_n}{\partial x} + \frac{K_n}{\nu} A_n = 0. \tag{102}$$

Все вышеперечисленные уравнения будут подробно рассмотрены в части, посвященной теории обтекания твердых тел вязкой жидкостью.

Этим параграфом мы закончим I часть обзора гидромеханики вязкой жидкости.

Из предыдущего обзора видно, что современный математический аппарат, применяемый при решении задач из теории движения вязкой несжимаемой жидкости, основанной на уравнениях Navier—Stokes'а, сводились к теории линейных уравнений в частных производных до четвертого порядка включительно и к теории обыкновенных уравнений, большей частью линейных. Метод решения этих уравнений состоит главным образом в представлении искомого решения рядами, расположенными по нормальным или другим функциям и в некоторых случаях в виде интегралов.

Резюме

Автор излагает основные проблемы решения уравнений Navier—Stokes, причем в первой части автор останавливается на точных и приближенных интегралах этих уравнений, не касаясь пограничных и начальных условий в общем виде. Предлагаемая часть работы состоит из краткого введения и трех разделов: A. Прямолинейное движение, B. Плоское движение и C. Пространственное движение. В конце приводится список литературы, упомянутой в этой части работы. Две следующих части будут посвящены обзору работ по теории движения твердого тела и по гидромеханической теории смазки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Euler. Princ. gén. du mouv. des fluides. Mém. d. l'Ac. de Berlin, t. II, 1775, p. 308.
2. Navier. Mém. sur les lois du mouv. des fluides. Mém. de l'Ac. des Sciences. T. VI. 1822, p. 389.
3. Poisson. Mém. sur les équat. génér. de l'equil. et du mouv. des fluides. Journ. d. l'école Polyt. T. XIII. 1829, p. 1.
4. Saint-Venant. C. R. T. XVII, 1843, p. 1240.
5. Stokes. On the Theorie of the internal friction of fluids in motion. Tr. Camb. Phil. Soc. T. VIII. 1845, p. 287.
6. Duhem. Recherches sur l'hydrodynamique.
7. Voigt. Compendium d. theor. Physik. Bd. I. 1898. Leipzig.
8. Бобылев. Einige Betracht. ü. die Gleichungen der Hydrodyn. Math. Ann. VI. 1873, p. 72.
9. Weinstein. Thermodynamik u. Kinetik d. Körper. Bd. II. 1903. Braunschweig.
10. Helmholtz. Wiss. Abh. I, p. 223.
11. Brillouin. Journ. d. Physik. 3. 1922, p. 326.
12. Hamel. Elementare Mechanik. 1912. Leipzig.
13. Hopf. Zähe Flüssigkeiten. Handbuch d. Physik. 7. 1927. Berlin.
14. Kirchhoff. Mechanik. 1876. Leipzig, p. 226.
15. Auerbach. Wirbelbewegung. Handbuch d. phys. u. tech. Mechanik. Bd. V_1, 1927, p. 103.
16. Noether. Integrationsprobleme d. Navier-Stokesschen Differ.-Gleichungen. Haudb. d. pkys. u. techn. Mechanik. Bd. V_3. 1930, p. 102.
17. Lamb. Hydrodynamics. 1924. Cambr., p. 548.

18. Громеко. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. 1881. Казань.
19. Basset. Hydrodynamics. II. 1888. Cambridge.
20. Appell. Курс теорет. механики. III. 1911. Москва, p. 379.
21. Lock. The equat. of motion of a viscous fluid in tensor form. Proc. Phys. Soc. of London 42. 1930, p. 264 и 287.
22. Bateman. Bull. of the National Res. Council. № 84. 1932, p. 267.
23. Oseen. Hydrodynamik. 1927. Leipzig.
24. Страхович. Интегральные уравнения вязкой жидкости. Изв. Гос. Гидр. Инст. 20. 1921, ф. 130.
25. Villat. Leçons sur l'Hydrodynamique. 1929. Paris.
26. Villat. Mechanique des fluides. 1930. Paris.
27. Страхович. Интегро-дифференциальные формы деформируемых сред. Изв. Гос. Гидр. Института. 22. 1928, p. 3.
28. Boussinesq. Journal d. Mathem. 13. 1868, p. 377.
29. Lorentz. Abh. ü. theor. Physik. Bd. I, 1907, p. 16.
30. Brillouin. Leçons sur la viscosité. P. I. 1907.
31. Страхович. К вопросу о движении жидкости со свободными вихрями. Зап. Г. Г. И. Т. V. 1931.
32. Müller. Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. 1932. Leipzig.
33. Pöschl. Bisherige Lösungen des Torsions problems. ZS. f. a. M. и M. 1. 1921, p. 312.
34. J. J. Thomson. Recent researches in Electricity an Magnetism. 1893. Ch. III.
35. Jeans. The Math. Theory of Electr. and Magnetism. Cambr. 1915. Ch. II—X.
36. Hagen. Abh. der Berl. Akad. d. Wiss., Math. Abt. 1839, p. 17.
37. Taylor. The determination of stresses by mens of soap films. The mechanical properties of fluids. 1923. London.
38. Szymanski. Sur l'écoul. non permanent du fluide visqueх. C. R. du III. Congrés Intern. de Mécanique appliquée. Vol. I. 1930. Stockholm, p. 249.
39. Gay. C. R. 188. 1929, p. 143.
40. Grace. Philosoph. Mag. (7). 5. 1928, p. 933.
41. Higuchi. Note on the oscillatory motion of a viseous liquid in open channel of infinite length. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. (3). 2. 1929, p. 139.
42. Mesny. Assoc. Franç. 43. 1914, p. 93.
43. Gröber. Grundlagen der Wärmeübertragung. 1922. Berlin.
44. Лейбензон. Нефтепромысловая механика. ч. I. Гидравлика. 1930.
45. Oseen. Flüssigkeitsbewegung mit Reibung. Mises. Frank. Differ. u. Integralgleichungen d. Mechanik u. Physik. II. 1927. Braunschweig, p. 810.
46. Kármán. Über laminare u. turbulente Reibung. ZS. ang. M. u. M. I. 1921, p. 233.
47. Taylor. Phil. Trans. A. 223. 1923, p. 289.
48. Мещерский. Гидродинамическая аналогия прокатки. Изв. I Петрогр. Политехн. института. XXVIII. 1919 г.
49. Oseen. Arkiv för mat., astr. och fysik. 20. 1927, №№ 14 и 22.
50. Страхович. Изв. Гос. Гидр. Инст. 1927, № 20.
51. Kampé de Fériet. C. R. du III. Congrés Intern. de Mecanique appliquée. I. 1930. Stocholm, p. 334.
52. Страхович. Изв. Гос. Гидр. Инст. 1928, № 22.
53. Hamel. Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Vereinig. 25. 1917, p. 34.
54. Страхович. Двуразмерное движение вязкой жидкости. Записки Гос. Гидр. Инст. V и VI. 1930 и 1931 гг.
55. Саткевич. Распределение скоростей внутри вихря кругового сечения. Сборник Лен. Инст. Инж. Путей Сообщения. 100. 1929.
56. Некрасов. Диффузия вихря. Труды Цаги. 84. 1931.
57. Brill. Mess. Math. 27. 1898, p. 147.
58. Rosenblatt. C. R. 182. 1926, p. 556; 189, 1929, p. 450.
59. Riabouchinsky. C. R. 179, 1924, p. 1133.
60. Страхович. Изв. Гос. Гидр. Инст. № 18. 1926.
61. Wien. Lehrbuch. d. Hydrodynamik. 1900. Leipzig.
62. Poincaré. Leçons du Mécanique Céleste. III. 1910. Paris.
63. Tait. Proc. R. S. Edin. XVII. 1890, p. 110.
64. Hough. Proc. L. Math. Soc. XXVIII. 1896, p. 264.
65. Reynolds. Brit. Ass. Rep. 1880, p. 112.
66. Aitken. Proc. Roy. Soc. Edin. XII. 1888, p. 56.
67. Taylor. Verhandl. d. I. intern. Kongresses f. ang. Mechanik Delft. 1924, p. 89.
68. Noether. Sitzungsber. d. Bayer. AK. d. Wiss. München. 1913.

69. Noether. Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 23. 1924.
70. Noether. ZS. f. angew. Math. u. Mech. 6. 1926, p. 243.
71. Coster. Phil. Mag. (6) 37 (1919), p. 587.
72. Coster. Acad. Sci Amsterdam. Proc. 21 (1918), p. 193.
73. Crossley. Proc. Cambr. Phil. Soc. 24 (1928), pp. 231 и 480.
74. Dutt. Bull. Caleutta Math. Soc. 10 (1918—19) p. 43.
75. Freund. Ann. d. Physik. 18. 1863, p. 1.
76. Hort. ZS. f. techn. Physik, 1. 1920, p. 213.
77. Случановский. Изв. Гос. Гидр. Инст. № 25. 1929,
78. Страхович. Труды II. Вс. Гидролог. Съезда в Ленинграде. III. 1929.

ОБЩИЕ РУКОВОДСТВА ПО ГИДРОМЕХАНИКЕ, СОДЕРЖАЩИЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ГИДРОМЕХАНИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И НЕ ВОШЕДШИЕ В ПРЕДЫДУЩИЙ СПИСОК:

1. Prandtl—Titijens. Hydro-Aeromechanik. II. 1931. Berlin.
2. Lichtenstein. Grundlagen der Hydrodynamik. 1929. Berlin.
3. Villat. Leçons sur la théorie des tourbillons. 1930. Paris.
4. Саткевич. Теоретические основы гидро-аэромеханики. Ч. II (печатается).
5. Prasil. Technische Hydrodynamik, 2. Aufl. 1926. Berlin.
6. Kaufmann. Angewandte Hydromechanik I. 1931. Berlin.
7. Милович. Основы динамики жидкости. 1933. Москва.
8. Жуковский. Теоретические основы воздухоплавания. 1925. Москва.
9. Fuchs—Hopf. Aerodynamik. 1922. Berlin.