ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НА УПРУГОЙ СВЯЗИ

А. П. Черевков (Краснодар)

Вопрос о продольных колебаниях системы масс, соединенных упругой связью, имеет для техники большое значение. Нахождение усилий в сцепных приборах подвижного состава не может быть выполнено точно, если не изучены колебания всего состава, рассматриваемого как одна система жестких вагонов, соединенных упругой связью. Также в условиях работы длинных упругих стержней, например нефтяных буров, необходимо исследование продольных колебаний, а также в целом ряде подобных задач техники. Продольные колебания определяются обычно двумя способами: либо данная система рассматривается как одна упругая нить, что дает грубо-приближенное решение вопроса, либо берется вся система масс, соединенных упругой связью. Система уравнений динамики, составленных для каждой массы, дает единственно точное, но чрезвычайно сложное решение проблемы. Достаточно указать, что основное уравнение для определения частоты может считаться неизвестным в общем виде, так как определитель системы данных уравнений движения, представляющий это уравнение, слишком сложен для исследования в общем виде.

В настоящей статье я изложу самый общий способ решения вопроса о продольных колебаниях системы на упругой связи, применимый как для непрерывной упругой нити, так и для отдельных упруго связанных масс. Такое обобщающее рассмотрение вопроса позволяет не только легко получить все известные элементарные решения, как точные, так и приближенные, но и сразу найти новые важные для техники типы решений, например, если часть масс принята сплошной; прямое рассмотрение такого упрощенного типа системы потребовало бы решения сложных трансцендентных уравнений.

1. Общее уравнение продольных колебаний.

Если обозначить w — перемещение точек упругой связи, E — ее модуль упругости, ω — площадь поперечного сечения упругой нити, принимаемой прямою, то натяжение, возникающее в ней, выражается $\omega E \frac{dw}{dx}$, и уравнение движения следующее:

$$d\left(\omega E \frac{dw}{dx}\right) = \rho\omega\, dx \frac{d^2 w}{dt^2};$$

здесь через ρ обозначена плотность нити. Для исследования свободных колебаний полагаем $w = y \cos nt$, где y — амплитуда колебания, а частота $\frac{n}{2\pi}$ выражается для упрощения через $\lambda = n^2$.

Дифференциальное уравнение для амплитуды колебаний принимает такой вид:

$$\frac{d}{dx}\left(E\omega\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\rho\omega y=0. \qquad (1)$$

Основным в излагаемом методе является введение удельной массы $\mu=\rho\omega$, которая вообще считается переменной по длине x для сплошной нити, но также может быть принята и разрывной функцией в виде ряда отдельных малых конечных отрезков по длине, если распределение масс принято в виде отдельных кусков, соединенных упругой связью. Введем еще для упрощения жесткость связи k, так что:

$$k=E\frac{\omega}{l} \text{ или } e=\frac{1}{E\omega},\ el=1/k. \qquad (2)$$

Уравнение для амплитуды y в окончательном виде выразится так:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0. \qquad (3)$$

Здесь μ и e некоторые заданные функции x, вообще говоря, разрывные как указано выше.

2. Интеграл уравнения амплитуды

Интеграл уравнения (3) должен представиться в виде разложения по степеням λ:

$$y=y_0+\lambda y_1+\lambda^2 y_2+\ldots,$$

в котором $y_0, y_1, y_2,\ldots$ представляют некоторые функции x. Для их определения подставляем выражение y в уравнение (3), причем действие над y в уравнении (3) сокращенно названо D, именно $D(y)=\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e}\frac{dy}{dx}\right)$. Получим:

$$D(y_0)+\lambda D(y_1)+\lambda^2 D(y_2)+\ldots+\lambda y_0+\lambda^2 y_1+\ldots=0.$$

Сравнение членов с одинаковыми степенями λ дает цепь уравнений для определения $y_0, y_1,\ldots$:

$$D(y_0)=0,\ D(y_1)+y_0=0,\ D(y_2)+y_1=0.$$

Из уравнения (1) получим $y_0=1$, или $y_0=x$. Тогда второе уравнение

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e}\frac{dy}{dx}\right)+y_0=0$$

дает выражение y_1 по выполнении интегрирования:

$$y_1=\int\int y_0\mu dx\, e dx,$$

т. е. должно быть:

$$\text{либо } y_1=-\int\int\mu\, dx\, e\, dx, \qquad \text{либо } y_1=-\int\int\mu x\, dx\, e\, dx.$$

Точно также определяются прочие функции $y_2, y_3,\ldots$. Мы получим два частных интеграла уравнение (3):

$$Y_1=1-\lambda\int\int\mu\, dx\, e\, dx+\lambda^2\int\int\int\int\mu\, dx\, e\, dx\, \mu\, dx\, e\, dx$$

$$Y_2=x-\lambda\int\int\mu x\, dx\, e\, dx+\lambda^2\int\int\int\int\mu\, x\, dx\, e\, dx\, \mu\, dx\, e\, dx\ldots,$$

и, вводя 2 постоянных интегрирования A и B, общий интеграл уравнения для амлитуды (3) напишем так:

$$y=A(1-\lambda\int\int\mu\,dx\,e\,dx+\lambda^2\int\int\int\int\mu\,dx\,e\,dx\,\mu\,dx\,e\,dx-\ldots)+$$
$$+B(x-\lambda\int\int\mu\,dx\,e\,dx+\lambda^2\int\int\int\int\mu\,x\,dx\,e\,dx\,\mu\,dx\,e\,dx-\ldots) \quad (4)$$

Все интегрирования здесь должны быть произведены от 0 до x, и постоянных интегрирования не должно быть введено. Из этого выражения (4) получим также значение производной y':

$$y'=A(-\lambda\int\mu\,dx+\lambda^2\int\int\int\mu\,dx\,e\,dx\,\mu\,dx-\ldots)e+B(1-\lambda e\int\mu x\,dx+$$
$$+\lambda^2 e\int\int\int\mu x\,dx\,e\,dx\,\mu\,dx-\ldots). \quad (5)$$

3. Условия существования найденного интеграла

В виду сделанных широких допущений относительно произвольности задания функций μ и e, а также их разрывности, необходимо выяснить условия сходимости интеграла (5). Для этого достаточно подчинить эти функции условию

$$\mu\leqslant\mu_0,\; e\leqslant e_0,$$

где μ_0 и e_0 названы наибольшие значения функций μ и e на заданной длине x от 0 до e. Действительно, предельные значения отдельных интегрирований

$$\int\int\mu\,dx\,e\,dx\leqslant\mu_0 e_0\frac{x^2}{1\cdot 2},\quad \int\int\int\int\mu\,x\,dx\,e\,dx\leqslant\mu_0 e_0\frac{x^4}{1\ldots 4},$$

дадут значение верхнего предела интеграла (5)

$$y=A\left(1-\lambda\mu_0 e_0\frac{x^2}{1\cdot 2}+\lambda^2\mu_0^2 e_0^2\frac{x^4}{1\cdot 4}\cdots\right)+$$
$$+B\left(x-\lambda\mu_0 e_0\frac{x^3}{1\cdot 3}+\lambda^2\mu_0^2 e_0^2\frac{x^5}{1\cdot 5}\right),$$

или же

$$y=A\cos\sqrt{2\lambda\mu_0 e_0}\,x+B\sin\sqrt{\lambda\mu_0 e_0}\,x\,/\sqrt{\lambda_0\mu_0 e_0}\,. \quad (6)$$

Этим и доказана абсолютная и равномерная сходимость найденного интеграла (4) для указанного произвольного задания функций μ и e, включая их разрывность. Заметим, что найденное предельное значение интеграла (6) дает решение для колебаний стержня со свободными концами. Именно, полагая $y'=0$ для $x=0$ и $x=l$, должны будем иметь постоянную $B=0$ и $\sin\sqrt{\lambda\mu_0 e_0 l}=0$, откуда $\sqrt{\lambda\mu_0 e_0 l}=\pi$, $\sqrt{\lambda}=n=\dfrac{\pi}{\sqrt{M\frac{l}{E\omega}}}$, так как $\mu_0 l=M$, массе всего стержня; отсюда известное выражение для частоты и периода колебаний: [1]

$$\frac{n}{2\pi}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{M\frac{l}{E\omega}}}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{gE}{\gamma}},$$

[1] С. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. ГИЗ. 1932, стр. 201.

так как
$$M=\frac{\gamma}{g}\omega l,\quad T=2l\sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}. \tag{7}$$

4. Колебания стержня с грузом на конце

В выражении интеграла (4) постоянная A должна согласно условию $y=0$ для $x=0$ уничтожиться, так как в начале стержня нет перемещения; значение интеграла упрощается:

$$y=B\left(x-\lambda\int\int\mu x dx\, e dx+\lambda^2\int\int\int\int\mu x dx\, e dx\, \mu dx\, e dx-\ldots\right)$$

Условие уничтожения натяжения на конце стержня $y'=0$ для $x=l$ дает искомое уравнение для определения частоты:

$$0=1-\lambda e\int\mu x dx+\lambda^2 e\int\int\int\mu x dx\, e dx\, \mu dx-\lambda^3 e\int\int\int\int\int\mu x dx\, e dx\, \mu dx\times$$
$$\times e dx\, \mu dx+\ldots. \tag{8}$$

Интегрирование должно быть здесь распространено на всю длину стержня. Найденное уравнение для частоты (8) является основным в излагаемой теории, так как граничные условия для стержня обнимают широкий круг технических задач. Это уравнение справедливо и для любого распределения масс на стержне в зависимости от задания функций μ и e. При решении вопроса в виде системы уравнений динамики, написанных для каждой массы, это уравнение для частоты получилось бы в виде сложного определителя, разложение которого по степеням λ в общем случае многих масс не приводит ни к какому простому выражению. Как мы видим, найденное нами уравнение (8) для частоты колебаний содержит коэффициенты при степенях λ в виде простых интегралов. Весь труд решения системы уравнений движения совершенно отпадает, и вопрос сводится в нашем методе только к вычислению первых входящих в уравнение (8) интегралов, так как в силу доказанной быстрой сходимости ряда для вычисления частоты λ достаточно небольшого числа членов этого уравнения.

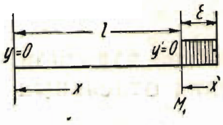

Рис. 1.

В рассматриваемом случае распределения масс ($\mu=0$, для $x=0$ до $x=l$ и μ постоянно на малом отрезке ε) интегрирование легко выполняется:

$$\int\mu x dx=\int_l^{l+\varepsilon}\mu x dx=\mu_1\int_0^{\varepsilon}(l+x')dx'=\mu_1\left(lx'+\frac{x'^2}{2}\right)=\mu_1\varepsilon\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)=M_1 l,$$

если масса на конце стержня $M_1=\mu_1\varepsilon$. Все прочие интегрирования уравнения (8) пропадут как малые высшего порядка в ε, и мы получим линейное уравнение для частоты:

$$1-\lambda e M_1 l=0, \tag{9}$$

откуда находим значение для частоты колебания:

$$\lambda=\frac{1}{eM_1 l}=\frac{k}{M_1};\quad n=\sqrt{\frac{k}{M_1}}=\sqrt{\frac{kg}{Q}}=\sqrt{\frac{gE\omega}{lQ}},$$

где Q — вес груза.

5. Влияние массы стержня на это колебание

Положим теперь, что стержень имеет собственную массу M, так что на длине его l будет нагрузка от удельной массы μ. Интегрирование надо выполнять по двум участкам:

$$\int \mu x\,dx = \mu \frac{x^2}{2}$$

на длине l и

$$\int_0^{l+x'} \mu x\,dx = \mu \frac{l^2}{2} + \mu_1 \int_0^{x'} (l+x')\,dx' = \frac{\mu l^2}{2} + \mu_1 l x' + \frac{1}{2}\mu_1 x'^2.$$

Следовательно выражение первого интеграла в уравнении (8) таково:

$$\int \mu x\,dx = \frac{1}{2} Ml + M_1 l + \frac{1}{2} M_1 \varepsilon.$$

Последний член как малая порядка ε отбрасывается. Точно также выполняем второе и третье интегрирования:

$$\int\int \mu x\,dx\,e\,dx = \frac{1}{6} Ml^2 e + \frac{1}{2} Mle\varepsilon + \frac{1}{2} M_1 le\varepsilon + \frac{1}{6} M_1 e\varepsilon^2,$$

$$\int\int\int \mu x\,dx\,e\,dx\,\mu\,dx = \frac{1}{24} M^2 el^2 + \frac{1}{6} Ml^2 e M_1.$$

Член с M^2 отбрасываем, считая массу стержня M малой. Прочие интегрирования дадут малые высшего порядка. Подставляя найденные значения в уравнение (8), получим такое уравнение для частоты колебаний:

$$1 - \lambda e\left(\frac{1}{2} Ml + M_1 l\right) + \lambda^2 e \frac{1}{6} MM_1 el^2 = 0. \tag{10}$$

Положим в этом уравнении для первого приближения, пренебрегая массой M, согласно (9):

$$\lambda e M_1 l = 1, \text{ так что } \lambda^2 e \frac{1}{6} M_1 M e l^2 = \frac{1}{6}\lambda Ml.$$

Подставляем это в уравнение (10) вместо члена с λ^2:

$$1 - \lambda el\left(M_1 + \frac{1}{3} M\right) = 0. \tag{11}$$

Сравнивая это с (9), видим, что влияние собственной массы стержня на колебание оценивается прибавкой к массе груза $^1/_3 M$.

Это заключение, получаемое обычно по так называемой „методе Релея", таким образом очень просто получается из первых членов нашего уравнения (8); если бы удержать члены порядка M^2, то мы легко получили бы следующее приближение.

6. Колебание стержня с двумя грузами

Согласно излагаемому методу, полагаем, что оба груза распределены на малых участках ε' и ε'', так что их массы выражаем через удельную массу μ:

$$\mu\varepsilon' = M_1 \text{ и } \mu\varepsilon'' = M_2.$$

Таким образом, согласно этому заданию функция μ в уравнении (8) определяется как разрывная тем, что на всей длине стержня кроме этих двух участков μ уничтожается. Первый член уравнения (8) должен быть интегрирован по двум участкам:

$$\int \mu x\,dx = \mu \int_{l_1}^{l_1+\varepsilon'} x\,dx = \mu \int_0^{\varepsilon'} (l + x')\,dx' = \varepsilon' \mu l_1 = M_1 l_1 \text{ — по участку } \varepsilon',$$

$$\int \mu x\,dx = M_2 (l_1 + l_2) \text{ по участку } \varepsilon''.$$

Таким образом полное значение этого интеграла таково:

$$\int \mu x\,dx = M_1 l_1 + M_2 (l_1 + l_2).$$

Точно также находим следующие интегралы, пренебрегая малыми высшего порядка в ε' и ε''.

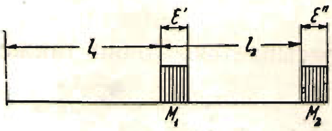

Рис. 2.

$$\int\int\int \mu x\,dx\,e\,dx\;\mu\,dx = M_1 l_1 e l_2 M_2.$$

Следующие интегрирования пропадут как малые высшего порядка, и мы получим для уравнения частоты (8) квадратное уравнение в λ:

$$1 - \lambda e(M_1 l_1 + M_2 (l_1 + l_2)) + M_1 M_2 e^2 l_1 l_2 \lambda^2 = 0.$$

Вводя здесь жесткость упругой связи $\frac{1}{el_1} = k$ и $\frac{1}{e} l_2 = k_2$, напишем его так:

$$M_1 M_2 \lambda^2 - \lambda \Big(M_1 k_2 + M_2 (k_1 + k_2) \Big) + k_1 k_2 = 0. \tag{12}$$

Необходимо особо рассмотреть важный случай, когда крайняя масса M_2 сравнительно с первой M_1 может считаться малой. В этом случае первое приближение мы будем уже иметь, если положить $M_2 = 0$, т. е. согласно (9)

$$M_1 \lambda - k_1 = 0, \text{ и следовательно } M_1 M_2 \lambda^2 = k_1 M_2 \lambda.$$

Подставляя это в уравнение (12) вместо члена с λ^2, получим второе приближение:

$$k_1 - \lambda (M_1 + M_2) = 0. \tag{13}$$

Таким образом лучшее приближение получается, если отбрасываемую массу M_2 прибавить к оставленной на стержне M_1. Это важное заключение, справедливое при малости M_2, не было получено другими приближенными методами. Но можно найти сходящийся процесс для вычисления корней уравнения частоты (12), применимый и для большого числа масс, распределенных по упругой связи. Действительно, уравнение (12) может быть написано таким образом:

$$(M_1 \lambda - k_1)\;(M_2 \lambda - k_2) - \lambda M_2 k_2 = 0, \tag{14}$$

и если в нем для первого приближения принять, отбрасывая массу M_2, $M_1 \lambda - k_1 = 0$, то, полагая для второго приближения исправленную массу $M_1' = M_1 + \Delta M_1$, должны будем иметь $\lambda\Delta M_1\,(M_2\lambda - k_2) - \lambda M_2 k_2 = 0$ и $\Delta M_1 = \frac{k_2 M_2}{k_2 - M_2\lambda}$. (15)

Таким образом, когда найдено приближенное значение λ [по нашей формуле (13)], то из (15) мы получим исправленную массу M_1' и следующее приближение и т. д.

Для примера рассмотрим две массы вагонов весом $3\cdot 10^4$ *кг* и $1\cdot 10^4$ *кг*, следовательно $M_1 = \frac{3\cdot 10^4}{9{,}8}$ и $M_2 = \frac{1\cdot 10^4}{9{,}8}$.

Жесткость буферной пружины согласно отношению

$$\frac{Q}{\omega} = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{e}, \quad \frac{E\omega}{l} = k = \frac{Q}{\Delta l},$$

где Q — полный натяг пружины в пределах 3 — 4 *т*, Δl — полное удлинение — 100 *мм*; взяты $K_1 = 5\cdot 10^4$ *к/м* и $K_2 = 4\cdot 10^4$ *кг/м*. Полагая для упрощения $\lambda = \lambda'\cdot 9{,}8$, получим точное уравнение и его корень

$$3\lambda^2 - 21\lambda' + 20 = 0, \quad \lambda' = 1{,}1371.$$

Приближенное же решение согласно (9) и (13):

$$\lambda' = \frac{5}{3} = 1{,}66 \text{ по (9) и } \lambda' = \frac{5}{3+1} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ по (13).}$$

Последнее, как и указано нами ранее, ближе к точному. Для следующего приближения определяем поправку к массе M_1, согласно (15) и исправленную массу M_1':

$$\Delta M_1' = \frac{4}{4 - 5/4} = \frac{16}{11}, \quad M_1' = 3 + \frac{16}{11} = 4\frac{5}{11}.$$

Это дает следующее приближение для корня λ':

$$\lambda' = \frac{5}{4 + \frac{5}{11}} = \frac{55}{49} = 1{,}123.$$

Если взять еще одну поправку для массы, то найдем в следующем приближении:

$$\Delta M_1'' = \frac{4}{4 - \frac{55}{49}} = \frac{196}{141}, \quad M_1'' = 3 + \frac{196}{141} = 4\frac{55}{141},$$

$$\lambda' = \frac{5}{4 + \frac{55}{141}} = 1{,}138,$$

что практически уже не отличается от точного значения. Соответствующая частота колебаний,

$$\frac{n}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} = \frac{\sqrt{9{,}8\lambda'}}{2\pi} = 0{,}4982\sqrt{\lambda'} \text{ в сек. и } = 29{,}9\sqrt{\lambda'} \text{ в мин.,}$$

что дает 31,9 колебаний в минуту.

7. Колебание упругой связи с тремя массами

В данном случае распределения масс интегрирование членов уравнения (8) нужно производить по трем промежуткам. Таким образом для $\int \mu x\,dx$ находим значения:

$M_1 l_1$ — для первого промежутка, $M_1 l_1 + M_2(l_1 + l_2)$ — для второго и $M_1 l_1 + M_2(l_1 - l_2) + M_3 l$ — окончательное. Найдя также все члены, получим уравнение третьего порядка:

$$0 = 1 - \lambda e[l_1 M_1 + (l_1 + l_2) M_2 + l M_3] + \lambda^2 e^2 [l_1 l_2 M_1 M_2 + (l_1 + l_2) l_3 M_2 M_3 + l_1(l_2 + l_3) M_1 M_3] - M_1 l_1 e l_2 M_2 e l_3 M_3 \lambda^3,$$

или вводя жесткости связей k_1, k_2, k_3:

$$0 = M_1 M_2 M_3 \lambda^3 - \lambda^2 [k_3 M_1 M_2 + (k_1 + k_2) M_2 M_3 + (k_2 + k_3) M_1 M_3] + \lambda [k_2 k_3 M_1 + (k_1 + k_2) k_3 M_2 + (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3) M_3] - k_1 k_2 k_3. \quad (16)$$

Если примем для первого приближения, отбрасывая массу M_3, уравнение (12), то, помножая его на λ, найденное λ^3 представим в (16) и получим для второго приближения:

$$M_1(M_2 + M_3)\lambda^2 - \lambda[M_1 k_2 + (M_2 + M_3)(k_1 + k_2)] + k_1 k_2 = 0 \quad (17)$$

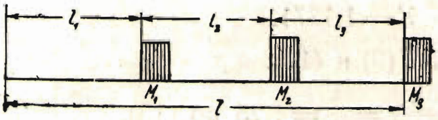

Рис. 3.

Сравнивая это с (12), видим, что *лучшее приближение получается, когда отбрасываемую массу M_3 прибавляем к крайней остающейся M_2*. Если же написать уравнение (16) в таком виде:

$$\{M_1 M_2 \lambda^2 - \lambda[M_1 k_2 + M_2(k_1 + k_2)] + k_1 k_2\}(M_3 \lambda - k_3) - k_3 M_3 (\lambda^2 M_1 - \lambda(k_1 + k_2)) = 0, \quad (18)$$

то мы найдем значение поправки ΔM_2 к массе M_2, если λ определено приближенно согласно (12):

$$\Delta M_2 = \frac{k_3 M_3}{M_3 \lambda - k_3 \lambda}, \quad (19)$$

что совпадает с (15) и является общим свойством системы. Если взять для примера 3 веса: $3 \cdot 10^4$ *кг*, $2 \cdot 10^4$ *кг* и $1 \cdot 10^4$ *кг* соответственно массы $M_1 = 3 \cdot 10^4/9{,}8$, $M_2 = 2 \cdot 10^4/9{,}8$, $M_3 = 1 \cdot 10^4/9{,}8$, а жесткости связей $k_1 = 5 \cdot 10^4$ *кг/м*, $k_2 = 4 \cdot 10^4$ *кг/м*, $k_3 = 3 \cdot 10^4$ *кг/м*, то получим следующие уравнения, точные и приближенные и их решения, полагая $\lambda = \lambda'/9{,}8$.

$6\lambda'^3 - 57\lambda'^2 + 137\lambda' - 60 = 0$, корни $\lambda' = 5{,}939; 3; 0{,}5613$

$6\lambda'^2 - 30\lambda' + 20 = 0$ (согласно 12), $\lambda' = 4{,}21; 0{,}8$.

$6\lambda'^2 - 39\lambda' + 20 = 0$ (согласно 17), $\lambda' = 3{,}74; 0{,}6$.

9 апреля 1933 г.

ÜBER LÄNGSSCHWINGUNGEN EINES LINEAREN ELASTISCHEN SYSTEMS

Von *A. Czerevkov* (*Krasnodar*)

Zusammenfassung

Die Längsschwingungen eines linearen Gebildes, das mit beliebig verteilten Massen und Elastizitäten behaftet ist (z. B. Eisenbahnzug) werden untersucht. Es wird ein allgemeines Lösungsverfahren vorgeschlagen, indem Entwicklungen in Potenzreihen noch steigenden Potenzen der Frequenz benutzt werden.