К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. Г. Лехницкий (Ленинград)

В курсе теории упругости С. П. Тимошенко в главе о плоской задаче приведено решение задачи о напряжениях в бесконечной плоской пластинке под влиянием сосредоченной силы, приложенной в какой-либо точке пластинки.[1] Решение этой задачи не совпадает с решениями той же задачи у иностранных авторов: Love,[2] Coker and Levi,[3] Coker and Filon[4] и др. В недавно вышедшем курсе теории упругости М. М. Филоненко-Бородича повторяется тот же вывод и то же решение, что у С. П. Тимошенко.[5] Задачей этой заметки является указать, в чем причина расхождения решений, и дать по возможности полное исследование этого вопроса.

У С. П. Тимошенко и М. М. Филоненко-Бородича ход решения такой. Сперва рассматривается напряженное состояние полуплоскости под влиянием приложенной нормально к границе сосредоточенной силы. Располагая полярные координаты как показано на рис. 1, авторы получают решение в виде

$$\widehat{rr} = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \widehat{\theta\theta} = 0, \quad \widehat{r\theta} = 0, \tag{1}$$

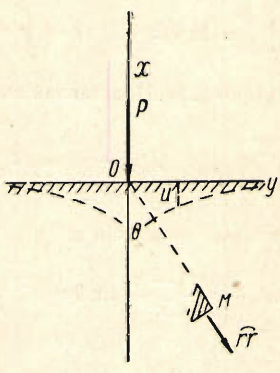

Рис. 1.

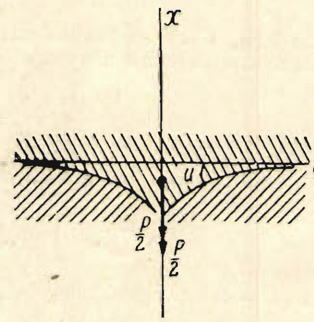

Рис. 2.

где P величина силы. Как мы видим, все точки границы не испытывают никаких усилий, исключая точку приложения силы — O. Далее берется другая полуплоскость, у которой к одной из точек границы приложена сила, по величине равная первой, но действующая в обратном направлении. Напряжения в этой полуплоскости будут обратны по знаку напряжениям в первой полуплоскости; то же самое можно сказать и про перемещения u и v. Перемещения точек границ у обеих плоскостей равны по величине и обратны по знаку. Из этого делается вывод, что обе названные полуплоскости, будучи сложены своими границами, образуют одно целое, одну целую плоскость, находящуюся под действием силы $2P$. Если на каждую из плоскостей действуют силы, по величине $= \frac{P}{2}$, формулы (1) принимаются действительными и для напряжений во всей неограниченной плоскости и примут вид

$$\widehat{r} = -\frac{P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \widehat{\theta\theta} = 0, \quad \widehat{r\theta} = 0 \tag{2}$$

Однако по поводу этого решения нужно заметить, что перемещения, определяемые по напряжениям (2), не будут периодическими функциями от угла θ и при обходе вокруг какого-нибудь замкнутого контура, окружающего точку O приложения силы, мы будем иметь все возрастающие перемещения, которые для одной и той же точки, например, $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ (радиус r предполагается одинаковым), будут принимать различные значения. Короче говоря,

---

[1] Тимошенко. Курс теории упругости, часть I гл. VI, стр. 136. С. Петербург, 1914.

[2] Love. A treatise on the Mathematical theory of Elasticity, Cambridge, 1927; 148 стр. 209.

[3] Coker and Levi. „Contact Pressures and Stress distributions in Cams, Rollers and Wheels", Proc. Inst. Mech. Eng. May. *1930*, стр. 698.

[4] Coker and Filon. A treatise on Photo-Elasticity. Cambridge, *1931*, стр. 327

[5] М. М. Филоненко-Бородич. Основы теории упругости. Изд. Госстройиздата *1932*, стр. 118.

мы сталкиваемся с многозначностью перемещений, если считать точки $(\theta=0)$ и $(\theta=2\pi)$ принадлежащими одной целой плоскости.

В самом деле, найдем перемещения u^r и $v\theta$, отнесенные к полярным координатам, пользуясь решением (2) и дифференциальными зависимостями для случая плоско-напряженного состояния:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{\widehat{rr}-\sigma\widehat{\theta\theta}}{E} \tag{I}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=\frac{\widehat{\theta\theta}-\sigma\widehat{rr}}{E}\cdot r-u_r \tag{II}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}=\frac{\widehat{r\theta}}{\mu} \tag{III}$$

где $\mu=\dfrac{E}{2(1+\sigma)}$ — модуль сдвига.

Получаем:

$$u_r=-\frac{P}{E\pi}\lg r\cos\theta+\Phi(\theta)$$

и

$$v_0=\frac{P}{E\pi}\sin\theta(\sigma+\lg r)-\int\Phi(\theta)\,d\theta+\Psi(r).$$

где $\Phi(\theta)$, $\Psi(r)$ — функции интегрирования. Подставляя выражения для u_r и $v\theta$ в уравнение (III) после сокращений получим:

$$\frac{\Phi'(\theta)}{r}+\frac{1}{r}\int\Phi(\theta)\,d\theta+\frac{P(1-\sigma)}{E\pi}\,\frac{\sin\theta}{r}+\Psi'(r)-\frac{\Psi(r)}{r}=0.$$

Это равенство возможно только тогда, когда

$$\Phi'(\theta)+\int\Phi(\theta)\,d\theta+\frac{P(1-\sigma)}{E\pi}\sin\theta=C,\quad \Psi'(r)\,r-\Psi(r)=-C,$$

где $C=\mathrm{const}$. Обозначая

$$\int\Phi(\theta)\,d\theta=z,$$

получим:

$$z''+z+\frac{P(1-\sigma)}{E\pi}\sin\theta=C.$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$z=\int\Phi(\theta)\,d\theta=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta+\frac{P(1-\sigma)}{2E\pi}\theta\cos\theta+C,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом мы убеждаемся, что перемещение u_r должно содержать в виде слагаемого член с $\theta\sin\theta$, а $v\theta$ — член с $\theta\cos\theta$. Эти величины Coker называет „Cyclical terms", и они-то и создают многозначность перемещений.

В самом деле, при $\theta=0$ член $\theta\cos\theta$ обращается в 0, а при $\theta=2\pi$ в 2π, тогда как в случае сплошной, неразрезанной плоскости эти точки, при одинаковых r, очевидно совпадают.

Иностранные авторы, упомянутые мной, решают эту задачу весьма различными способами, но получают одно решение:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr}&=-\frac{3+\sigma}{4\pi}\cdot\frac{P\cos\theta}{r}\\ \widehat{\theta\theta}&=\frac{1-\sigma}{4\pi}\cdot\frac{P\cos\theta}{r}\\ \widehat{r\theta}&=\frac{1-\sigma}{4\pi}\cdot\frac{P\sin\theta}{r},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где σ — коэффициент Пуассона.

Мы позволим себе указать здесь на один из способов решения, который достаточно прост и в должной мере строг.

Пусть сила действует в точке O (см. рис. 3). Расположим координаты, как показано на чертеже, и сделаем предположение, что нормальные напряжения $\widehat{rr}$ меняются по закону $\cos\theta$. Такое предположение делается при решении задачи о полуплоскости). Так как плоскость предполагается неограниченной, а напряжения, очевидно, убывают по абсолютной величине по мере удаления от точки приложения силы, мы можем заключать, что на бесконечно далеком расстоянии все напряжения должны обращаться в нуль, так как нам не задано никаких усилий, действующих на бесконечности. В качестве решения бигармонического уравнения мы возьмем функцию Airy в виде

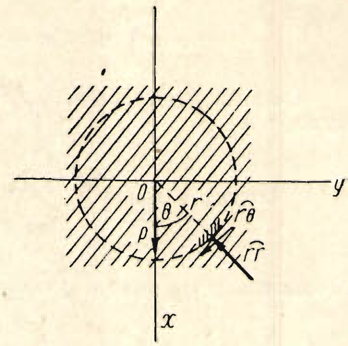

Рис. 3.

$$\varphi = Ar\theta\sin\theta + \left(\alpha r^3 + \frac{\beta}{r} + \delta\, r\lg r\right)\cos\theta,$$

где $Ar\cdot\theta\sin\theta$ функция Airy для полуплоскости, а вторая часть — добавочная функция, которая также дает напряжение $\widehat{rr}$, пропорциональное $\cos\theta$. Постоянное α можно сразу положить равным нулю, так как иначе напряжения не удовлетворят условиям на бесконечности. Получаем выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr} &= \left(-\frac{2\beta}{r^3} + \frac{\delta + 2A}{r}\right)\cos\theta \\
\widehat{\theta\theta} &= \left(\frac{2\beta}{r^3} + \frac{\delta}{r}\right)\cos\theta \\
\widehat{r\theta} &= \left(-\frac{2\beta}{r^3} + \frac{\delta}{r}\right)\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Для того чтобы определить постоянные β, δ и A, произведем в плоскости круговой разрез из точки O как из центра, любого радиуса r, и рассмотрим равновесие вырезанной части. Действие оставшейся части, как это принято, сказывается в том, что по окружности распределятся напряжения $\widehat{rr}$ и $\widehat{r\theta}$. Применяя условия статики, получим уравнения:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\widehat{rr}\cos\theta - \widehat{r\theta}\sin\theta)\,rd\theta + P = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi}(\widehat{rr}\sin\theta + \widehat{r\theta}\cos\theta)\,rd\theta = 0.$$

Из этих уравнений после подстановки в них выражений (A) заключаем, что

$$\beta = 0, \text{ и } A = -\frac{P}{2\pi}.$$

Таким образом у нас остается еще неопределенной постоянная δ; ее-то мы и определим из того условия, что перемешения u_r и v_θ должны выражаться периодическими функциями. Пользуясь равенствами I и II, получим:

$$u_r = \frac{\delta(1-\sigma) - \frac{P}{\pi}}{E}\lg r\cdot\cos\theta + \Phi(\theta)$$

$$v_\theta = \frac{\delta\, 1-\sigma) + \frac{\sigma P}{\pi}}{E}\cdot\sin\theta - \frac{\delta(1-\sigma) - \frac{P}{\pi}}{E}\lg r\cdot\sin\theta - \int\Phi(\theta)\,d\theta + \Psi(r).$$

Поставляя эти выражения в равенство (III), после преобразований получаем уравнение, которому должно удовлетворять

$$\int\Phi(\theta)\,d\theta = z$$

$$z'' + z + \frac{-4\delta + \frac{P(1-\sigma)}{\pi}}{E}\sin\theta + C,$$

где $C = \mathrm{const}$.

Общий интеграл этого уравнения

$$z = \int \Phi(\theta)\, d\theta = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + C + \frac{-4\delta + \frac{P(1-\sigma)}{\pi}}{2E}\,\theta\cos\theta.$$

Очевидно, „Cyclical term“ $\theta\cos\theta$ пропадет, если положить коэффициент при нем равным нулю, т. е.

$$-4\delta + \frac{P(1-\sigma)}{\pi} = 0.$$

Отсюда находим

$$\delta = \frac{P(1-\sigma)}{4\pi}$$

и после подстановки получаем решение (3).

ZUM EBENEN PROBLEM DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

von *Lechnitzky* *(Leningrad)*

Zusammenfassung

Berichtigung einer Stelle in dem Lehrbuche der Elastizitätstheorie von S. P. Timoschenko.
