ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗЫСКАНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ [1]

П. Ф. Папкович (Ленинград)

За последнее время в нашей технической литературе оживился интерес к вопросу о методах разыскания корней характеристического определителя. Начало этому положено было акад. А. Н. Крыловым, изложившим в своей известной работе, наряду с классическими методами Леверье и Якоби, свою методу развертывания характеристического определителя. Разбору и дальнейшему обоснованию этой методы был затем посвящен ряд работ акад. Лузина. Совсем недавно в трудах Сейсмологического института А. Н. появились заметки инж. Новоторцева о решении той же задачи с помощью методы последовательных приближений. В нашем последнем сообщении Ленинградскому Механическому обществу была сделана попытка сопоставить упомянутые выше классические методы с мотодами, которыми техника пользуется в настоящее время наиболее часто, а именно с методой последовательных приближений, методой Релея-Рица и их видоизменениями. В результате этой работы мы пришли к заключению, что одним из наиболее практичных вычислительных методов, могущих быть для указанной цели использованными, может быть следующий. Целью его является обойти те затруднения, которые в классических методах развертывания характеристического определителя сопряжены с необходимостью вычисления малых разностей близких величин. Отдельные корни характеристического определителя и соответствующие им собственные решения системы линейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{j=m}(A_{ij}+C_{ij}x)\nu_j=0 \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \tag{1}$$

разыскиваются последовательно в порядке убывания величины характеристических чисел, им соответствующих.

Вычисление начинается с того, что, путем ли решения системы (1) относительно соответствующих переменных, или же путем введения в рассмотрение надлежаще подобранных новых переменных, система (1) приводится к виду

$$x\nu_i=\sum_{j=1}^{j=m}\alpha_{ij}^{(1)}\nu_j \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \tag{2}$$

притом так, чтобы наибольший практический интерес представляли наибольшие корни определителя системы (2), а равно и соответствующие им решения. После этого вычисление вначале ведется, как в методе Леверрье, то есть из системы (2) получается новая система вида

$$x^2\nu_i=\sum_{j=1}^{j=m}\alpha_{ij}^{(2)}\nu_j, \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \tag{3}$$

коэффициенты которой получаются из соответствующих коэффициентов исходной системы (2) по общему правилу возведения в квадрат числовых матриц, то есть по правилу:

$$\alpha_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{ik}^{(1)}\alpha_{kj}^{(1)}. \tag{4}$$

[1] Краткое содержание доклада, читанного в Ленинградском Механическом обществе 20 марта 1933 г.

После этого в отличие от методы Леверье, составляются по тому же правилу сразу системы вида:

$$
\left.\begin{array}{ll}
x^4 \nu_j = \sum\limits_{j=1}^{j=\infty} \alpha_{ij}{}^{(4)} \nu_j & \text{при } i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \\
x^8 \nu_j = \sum\limits_{j=1}^{j=\infty} \alpha_{ij}{}^{(8)} \nu_j & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \\
x^{16} \nu_j = \sum\limits_{j=1}^{j=\infty} \alpha_{ij}{}^{(16)} \nu_j & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,,
\end{array}\right\} \tag{5}
$$

что всегда может быть выполнено с помощью зависимостей

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha_{ij}{}^{(4)} = \sum\limits_{k=1}^{k=m} \alpha_{ik}{}^{(2)} \alpha_{kj}{}^{(2)} \\
\alpha_{ij}{}^{(8)} = \sum\limits_{k=1}^{k=m} \alpha_{ik}{}^{(4)} \alpha_{kj}{}^{(4)} \\
\alpha_{ij}{}^{16} = \sum\limits_{k=1}^{k=m} \alpha_{ik}{}^{(8)} \alpha_{kj}{}^{(8)}
\end{array}\right\} \tag{6}
$$

и так далее. Суммы главных коэффициентов систем (2), (3) и (5) позволяют вычислить суммы различных степеней определителя основной системы, так, как известно:

$$
\begin{array}{r}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = \alpha_{11}{}^{(1)} + \alpha_{22}{}^{(1)} + \alpha_{33}{}^{(1)} \ldots + x^{(1)}{}_{mm} = A_1 \\
x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \ldots + x_m{}^2 = \alpha_{11}{}^{(2)} + \alpha_{22}{}^{(2)} + \alpha_{33}{}^{(2)} + \ldots + \alpha^{(2)}{}_{mm} = A_2 \\
x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4 + \ldots + x_m{}^4 = \alpha_{11}{}^{(4)} + \alpha_{22}{}^{(4)} + \alpha_{33}{}^{(4)} + \ldots + \alpha^{(4)}{}_{mm} = A_3 \\
x_1{}^8 + x_2{}^8 + x^8{}_3 + \ldots + x_m{}^8 = \alpha_{11}{}^{(8)} + \alpha_{22}{}^{(8)} + \alpha_{33}{}^{(8)} + \ldots + \alpha^{(8)}{}_{mm} = A_4 \\
x_1{}^{16} + x_2{}^{16} + x^{16}{}_3 + \ldots + x_m{}^{16} = \alpha_{11}{}^{(16)} + \alpha_{22}{}^{(16)} + \alpha_{33}{}^{(16)} + \ldots + \alpha^{(16)}{}_{mm} = A_5.
\end{array}
$$

. . . .

. . . .

Соотношения эти позволяют установить для наибольшего характеристического числа x_1 пределы:

$$
\left.\begin{array}{c}
x_1 < A_1 \\
A_2 : A_1 < x_1 < \sqrt{A_2} \\
\sqrt{A_3 : A_2} < x_1 < \sqrt[4]{A_3} \\
\sqrt[4]{A_4 : A_3} < x_1 < \sqrt[8]{A_4} \\
\sqrt[8]{A_5 : A_3} < x_1 < \sqrt[16]{A_5} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{7}
$$

по мере вычисления все более и более сближающиеся и позвозяющие не только вычислить x_1 с желаемой системой точности, но и **знать, какая степень точности на данном этапе вычисления уже достигнута.**

Вычислив с помощью процесса, изложенного выше, наибольшее характеристическое число с желаемой степенью точности, можно определить соответствующее ему собственное решение системы, то есть совокупность величин ν_{i1} удовлетворяющих системе:

$$
x_1 \nu_{i1} = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{ij}{}^{(1)} \nu_{j1} \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3 \ldots\ m. \tag{2'}
$$

Это можно сделать различными способами: наиболее удобный дается методой последовательных приближений, особенно если вычисление ведется не с помощью исходной системы (2), а с помощью той из систем типа (5), до которой вычисление доведено при определении величины x_1.

Пусть эта система есть

$$x_1^{k}\nu_{ji}=\sum_{j=1}^{j=m}\alpha_{ij}^{(k)}\nu_{j1} \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \qquad (5')$$

За первое приближение для совокупности величин ν_{j1}, можно принять совокупность чисел $\alpha_{ij}^{(k)}$, составляющих любой столбец матрицы $\alpha_{ij}^{(k)}$. Дальнейшие приближения получаются путем подстановки этих значений вместо ν_{j1} в правую часть равенств (5') и определения из левой части этих равенств более точного соотношения между величинами ν_{j1}. Если вычисление коэффициентов $\alpha_{ij}^{(k)}$ доведено предварительно достаточно далеко, то уже второе приближение для ν_{i1}, таким образом полученное, дает для ν_{i1} значения практически совершенно точные. Для проверки, конечно, всегда следует это вычисление продолжить до тех пор, пока результаты двух последовательных приближений не будут тождественны.

Для разыскания второго характеристического числа и соответствующего ему собственного решения системы, предлагается следующая метода.

Совокупность величин ν_{i2}, составляющих это решение, разыскивается в форме

$$\nu_{i2}=\eta\nu_{i1}+\zeta_i \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \qquad (8)$$

где величина η должна быть определена из условия взаимной ортогональности решений ν_{i1} и ν_{i2}, а ζ_i есть некоторая неизвестная совокупность величин, из которых одна любая, например, первая,[1] может быть полагаема равною нулю, остальные же подлежат определению из системы

$$x\zeta_i=\sum_{j=2}^{j=m}\beta_{ij}^{(1)}\zeta_i, \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \qquad (9)$$

получаемой из системы (2) путем подстановки в нее равенств (8) и последующего за этим исключением величины η из результата этой подстановки. Проделав соответствующие простые выкладки, нетрудно видеть, что между $\beta_{ij}^{(1)}$ и $\alpha_{ij}^{(1)}$ существуют зависимости

$$\beta_{ij}^{(1)}=\alpha_{ji}^{(1)}-\alpha_{1j}\frac{\nu_{ij}}{\nu_{1j}} \qquad (10)$$

Составив систему (9) способом, указанным только что, рекомендуется дальнейшее вычисление второго корня характеристического определителя и соответствующей ему совокупности величин ζ_{i2} производить, повторяя над этой системой все те операции, с помощью которых разысканы были ранее из системы (2) первое из характеристических чисел x и соответствующее ему решение ν_{i1}. Когда такая совокупность величин ζ_{i2} найдена (пусть это есть ζ_{1z}; ζ_{2z}; ζ_{3z};... ζ_{m2}), она подставляется в (8), после чего η подбирается так, чтобы решения ν_{i1} и ν_{i2} были взаимно ортогональны.

Для получения третьего собственного решения можно принять

$$\zeta_{i3}=\eta\zeta_{i2}+\sigma_{i3} \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \qquad (11)$$

или, что то же,

$$\nu_{i3}=\eta_1\nu_{i1}+\eta_2\nu_{i2}+\sigma_{i3} \qquad \text{при } i=1,\ 2,\ 3\ldots\ m. \qquad (12)$$

где, величины η и η_2 должны быть подобраны так, чтобы ν_{i3}, ν_{i2} и ν_{i1} были взаимно ортогональны; $\sigma_{i3}=\sigma_{23}=0$, а остальные σ_{i3} подлежат определению из системы

$$x\sigma_{i3}=\sum_{j=1}^{j=m}\gamma_{ij}^{(1)}\sigma_{j3} \qquad \text{при } i=3,\ 4\ldots\ m. \qquad (13)$$

получаемой из системы (9) путем подстановки в нее ζ_{i3} из ур. (11) и последующего исключения из результата этой подстановки неизвестной η. Между коэффициентами $\beta_{ji}^{(1)}$ и $\gamma_{ij}^{(1)}$ существует очевидно зависимость

$$\gamma_{ij}^{(1)}=\beta_{ij}^{(1)}-\beta_{2j}\frac{\zeta_{i2}}{\zeta_{22}} \qquad (14)$$

Определив x_3 и соответствующие ему σ_{i3} из системы (13) способом, во всем тождественным с тем, с помощью которого ранее находились x_1; x_2 и соответствующие им ν_{i1} и ζ_{i2}, остается для определения искомого третьего решения системы подобрать величины η_1 и η_2 в равенствах (12) так, чтобы решение ν_{i3} было взаимно ортогонально, как с решением ν_{i1}, так и с решением ν_{i2}.

---

[1] Предполагается, что $\nu_{11}\neq 0$. Если $\nu_{11}=0$, то из величин ζ_i полагать равною нулю следует любую, кроме ζ_i. Иначе решение (8) не будет отличным от решения ν_{i1}.

Для разыскания четвертого собственного решения следует затем принять

$$\sigma_{i4} = \eta\sigma_{i3} + \tau_{i4}$$

где

$$\tau_{14} = \tau_{24} = \tau_{34} = 0,$$

а остальные τ_{i4} подлежат определению из системы:

$$x\tau_{i4} = \sum_{j=1}^{j=m} \delta_{ij}^{(1)}\tau_{j1} \qquad \text{при } i = 4, 5 \ldots m. \tag{15}$$

где $\delta_{ij}^{(1)}$ получаются из $\gamma_{ij}^{(1)}$ по правилу:

$$\delta_{ji}^{(1)} = \gamma_{ij}^{(1)} - \gamma_{ij}^{(1)} \frac{\sigma_{i3}}{\sigma_{j3}} \tag{16}$$

Определив из уравнений (15) x_4 и соответствующую ему совокупность величин ν_{i4}, следует для нахождения искомого четвертого собственного решения системы положить:

$$\nu_{i4} = \eta_1\nu_{i1} + \eta_2\nu_{i2} + \eta_3\nu_{i3} + \tau_{i4},$$

подобрав величины η_1, η_2 и η_3 так, чтобы решения ν_{i4}; ν_{i3}; ν_{i2} и ν_{i1}, были взаимно ортогональны. Нетрудно видеть, что величины η_i придется при этом определять каждую из своего особого алгебраического линейного уравнения, так что нахождение их никакого труда составить не может.

С помощью описанного процесса можно последовательно вычислить все представляющие практический интерес корни характеристического определителя, а равно и соответствующие им собственные решения системы, причем вычисление можно всегда остановить, как только все нужные собственные решения системы найдены.

Если в исходной системе все $a_{ij}^{(1)}$, величины одного знака, то для нахождения x_1 и соответствующего ему собственного решения системы не придется при этом сделать, как легко видеть, ни одного вычитания; поэтому потери точности вычисления, связанной с вычислением малых разностей близких величин при нахождении величины x_1, и соответствующего ей собственного решения в этом случае можно избежать вовсе. Для того чтобы остальные собственные решения и соответствующие им характеристические числа могли быть вычислены с необходимой степенью точности, необходимо возможно точнее вычислять совокупность величин ν_{i1}; σ_{i2}; τ_{i3}; τ_{i4} и т. д.

Численные примеры показывают, что обычно все вычисления вполне удается провести с помощью логарифмической линейки. При этом первое характеристическое число x_1 и соответствующее ему решение будут найдены всего точнее; x_2, ν_{i2} с несколько меньшею относительной точностью и так далее. Но обычно и знать последние бывает достаточно с меньшей точностью.

Изложенный выше прием усиления сходимости процесса последовательных приближений для определения совокупностей величин ν_{i1}; ζ_{i2}; σ_{i3}; τ_{i4} и т. д. не нов: он заимствован из статьи Mises'a и Pollaczek-Geiringer, помещенной в Zeitschr. f. Ang. Math. und Mechanik Bd 9, S. 152. Возможности использования неравенств (7) для суждения о том, с какою степенью точности вычислен разыскиваемый корень характеристического определителя, в практических вычислениях у нас до сих пор внимания не уделялось, хотя этот прием также не нов (его можно найти в частности в статье Van den Dungen'a в том же журнале Z. A. M. M., 8. 1928. p 225.

Совершенно, повидимому, не использован до сих пор был предлагаемый способ разыскания собственных решений, отличных от основного, то есть соответствующего максимальному характеристическому числу. Насколько он проще того, который для этой цели был предложен упомянутыми выше авторами, видно хотя бы из того, что все вычисление предлагаемым методом может быть выполняемо с помощью логарифмической линейки, в то время как при нахождении второго собственного решения по способу Mises'a и Pollaczek-Geiringer для получения результата с точностью до 5 знаков требуется выполнить ряд промежуточных вычислений на 20 десятичных знаков, из которых первые 15 в конце концов при вычитании пропадают.

Излагаемая метода разработана пока применительно к тому лишь случаю, когда все характеристические числа реальны. Она может быть, повидимому, однако обобщена и на случай, когда последние являются компексными. Это предполагается сделать в особой последующей статье. Выполненные для нескольких частных примеров сравнительные вычисления показывают, что решение изложенным методом получается быстрее и проще, чем с помощью методы Релея-Рица и ее видоизменений.

ÜBER EIN VERFAHREN ZUR AUFLÖSUNG DER SÄKULARGLEICHUNG

von *P. Papkowitsch* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren zur Auflösung der Säkulargleichung vorgeschlagen, das wesentlich von der Leverrier'schen Methode ausgeht. Dabei gelingt es das Rechnen mit kleinen Differenzen grosser Zahlen zu vermeiden. Somit wird die Berechung der Eigenwerte und Eigenlösungen mit für die Praxis genügender Genauigkeit mittels eines Rechenschiebers ermöglicht. Einer speziellen Betrachtung ist dabei die Frage über die Auffindung höherer Eigenlösungen unterworfen.