МЕЛКИЕ ЗАМЕТКИ

К РАСЧЕТУ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

Н. Н. Давиденков (Ленинград)

Хотя элементарная теория изгиба кривых брусьев разработана уже давно и достаточно подробно, тем не менее до сих пор расчетные формулы даются во всех справочных книгах и курсах в такой неудобной форме, что пользование ими требует большой потери времени на предварительное ознакомление с их структурою и на чисто вычислительную работу. Между тем формулы эти легко могут быть заменены простою подстановкою поправочных коэффициентов в формулы для изгиба прямых брусьев.

Выражение для нормальных напряжений σ при изгибе кривых брусьев, как известно имеет вид: [1]

$$\sigma=\frac{M}{S}\,\frac{z}{r+z}, \tag{1}$$

где M — изгибающий момент,

S — статический момент сечения относительно нейтральной оси,

z — расстояние рассматриваемого волокна от нейтральной оси и

r — исходный радиус кривизны нейтральной оси.

Для нахождения положения нейтральной оси пользуются уравнением равновесия (при отсутствии осевой силы) $\Sigma X=0$, которое приводит к условию:

$$\int\limits_F \frac{z}{r+z}\,dF=0, \tag{2}$$

где F — площадь поперечного сечения.

Условие (2) дает:

$$\int\limits_F \frac{z}{r+z}\,dF=\int\limits_F \frac{r+z-r}{r+z}\,dF=F-\int\limits_F \frac{r}{r+z}\,dF=0,$$

откуда

$$r=\frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{r+z}}. \tag{3}$$

Заменяя $r+z$ через $\rho+y$, где ρ — радиус кривизны геометрической оси и y — расстояние волокна от той же оси (обе эти величины известны из условия задачи), переписываем знаменатель (3) в виде:

$$\int\limits_F \frac{dF}{\rho+y}=\frac{1}{\rho}\int\limits_F \frac{dF}{1+\frac{y}{\rho}}.$$

Разлагая $\left(1+\frac{y}{\rho}\right)^{-1}$ в ряд, находим:

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_F \frac{dF}{1+\frac{y}{\rho}}=\frac{1}{\rho}\int\limits_F \left(1-\frac{y}{\rho}+\frac{y^2}{\rho^2}-\frac{y^3}{\rho^3}+\ldots\right)dF=$$

---

[1] С. Тимошенко. Курс сопротивления материалов, § 133.

$$= \frac{1}{\rho}\left[F + \int\limits_F \left(-\frac{y}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^2} - \frac{y^3}{\rho^3} + \frac{y^4}{\rho^4} - \dots\right) dF\right]. \tag{4}$$

Ограничимся рассмотрением наиболее часто встречающихся сечений, имеющих ось симметрии, перпендикулярную к плоскости действия внешних сил. Тогда все интегралы, содержащие y в нечетной степени, обратятся в нуль, и выражение (4) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\rho}\left[F + \frac{J}{\rho^2} + \int\limits_F \frac{y^4}{\rho^4} dF + \int\limits_F \frac{y^6}{\rho^6} dF + \dots\right], \tag{5}$$

где J — момент инерции поперечного сечения.

Если отношение $\frac{y}{\rho}$ мало, то ряд (5) очень быстро сходится, и практически вполне возможно ограничиться первыми двумя членами его, отбросив в выражении (5) все интегралы. Если даже высота бруса составляет $\frac{1}{3}$ от радиуса кривизны, ошибка от пренебрежения членом

$$\int\limits_F \frac{y^4}{\rho^4} dF$$

уже не превысит $\frac{1}{6^4} = 0{,}1\%$.

Поэтому уравнение (3) с достаточной точностью перепишется так:

$$r = \frac{F\rho}{F + \frac{J}{\rho^2}} = \frac{\rho}{1 + \frac{J}{F\rho^2}} = \rho\left(1 - \frac{J}{F\rho^2} + \frac{J^2}{F^2\rho^4} - \dots\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\rho - r = \gamma,$$

где γ — расстояние между нейтральной и геометрической осями, находим это расстояние:

$$\gamma = \frac{J}{F\rho}\left(1 - \frac{J}{F\rho^2} + \frac{J^2}{F^2\rho^4} - \dots\right).$$

Если $\frac{J}{F\rho^2}$ мало по сравнению с единицею, то можно приближенно написать

$$\gamma = \frac{J}{F\rho}. \tag{6}$$

Ошибка, делаемая при этом, имеет порядок

$$\frac{J}{F\rho^2} = \left(\frac{i}{\rho}\right)^2,$$

где i — радиус инерции сечения. При круглом сечении и отношении $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{3}$ эта ошибка составит $\left(\frac{1}{4 \cdot 3}\right)^2 < 1\%$, т. е. достаточно мала; для прямоугольного сечения она будет еще меньше.

Для вычисления наибольших напряжений обращаемся опять к формуле (1), которая после подстановок:

$$S = F\gamma$$
$$z = y + \gamma$$
$$r + z = \rho + y$$

и после замены y через $\pm \frac{h}{2}$ (для крайних волокон) дает:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{M}{F\gamma} \frac{2\gamma \pm h}{2\rho \pm h}. \tag{7}$$

Принимая во внимание (6), находим окончательно:

$$\sigma_{\substack{\text{нар.} \\ \text{внут.}}} = \frac{M}{W} \frac{\frac{2J}{Fh\rho} \pm 1}{1 \pm \frac{h}{2\rho}} = \frac{M}{W} \frac{\pm 1 + \frac{2i^2}{h\rho}}{1 \pm \frac{h}{2\rho}}, \tag{8}$$

где $W=\frac{2J}{h}$ — момент сопротивления сечения, вычисленный по правилам для прямого бруса. Здесь знаки (+) относятся к наружным, а (—) — к внутренним волокнам (считая от центра кривизны). В частном случае прямоугольного сечения высотою h формула (8) дает:

$$\sigma=\frac{M}{W}\,\frac{\pm 1+\frac{h}{6\rho}}{1+\frac{h}{2\rho}}. \tag{9}$$

Для круглого сечения диаметра d находим точно так же

$$\sigma=\frac{M}{W}\,\frac{\pm 1+\frac{d}{8\rho}}{1\pm\frac{d}{2\rho}}. \tag{10}$$

Мы видим, что крайние напряжения при изгибе кривого бруса получаются из напряжений для прямого бруса простым умножением на некоторый поправочный множитель, зависящий от формы сечения и от отношения высоты сечения к радиусу. Не составит труда для ряда частных значений $\frac{h}{\rho}$ и $\frac{d}{\rho}$ подсчитать эти коэффициенты и составить таблицу, которая избавит рассчитывающего от всяких вычислений и вместе с тем сразу покажет ему порядок ошибки, проистекающей от пренебрежения кривизной.

Ниже приводим такую таблицу в кратком виде:

Таблица [1]

поправочних коэффициентов, подсчитанных по формулам:

$$\sigma_{\text{нар.}}=\frac{M}{W}\cdot\frac{1+\frac{2J}{Fh\rho}}{1+\frac{h}{2\rho}}=\frac{M}{W}\alpha_1$$

$$\sigma_{\text{внутр.}}=\frac{M}{W}\cdot-\frac{-1+\frac{2J}{Fh\rho}}{1-\frac{h}{2\rho}}=-\frac{M}{W}\alpha_2.$$

1. Прямоугольное сечение

$\frac{h}{\rho}$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
α_1	0,866	0,878	0,889	0,901	0,913	0,925	0,939	0,954	0,968	0,984
α_2	1,222	1,194	1,167	1,141	1,118	1,095	1,074	1,054	1,036	1,017

2. Круглое сечение

$\frac{d}{\rho}$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
α_1	0,850	0,862	0,875	0,888	0,900	0,917	0,932	0,948	0,963	0,982
α_2	1,250	1,218	1,188	1,159	1,132	1,108	1,083	1,061	1,040	1,019

[1] Вычисления сделаны студентом И. М. Мотыгуниным, которому автор приносит здесь свою благодарность.

ZUR BERECHNUNG KRUMMLINIGER STÄBE

von *N. N. Davidenkow* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Die Berechnung krummliniger Stäbe von kreisförmigem und rechteckigem Querschnitt wird auf die Berechnung gerader Stäbe zurückgeführt unter Benutzung gehöriger Korrektions-Koeffizienten. Diese Koeffizienten sind vom Verhältnis von Querschnittshöhe zum Krümmungsradius der Stabachse abhängig. Einige Werte dieser Koeffizienten sind in Tabelle 1 (rechteckiger Querschnitt) und Tabelle 2 (kreisförmiger Querschnitt) zusammengestellt.