ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

С. Л. Соболев (*Ленинград*)

§ 1. В настоящей работе мы изложим в общих чертах новый метод решения некоторого класса задач о распространении колебаний. Этот метод был разработан и применен к ряду конкретных задач в теоретическом отделе Сейсмологического ин-та Ак. наук СССР.

Основой нового метода является применение аналитических функций комплексного переменного к решению динамических задач для случая одного волнового уравнения или для уравнений теории упругости. Теория аналитических функций дает возможность построить некоторый класс решений волнового уравнения. Этот класс содержит в частности фундаментальные решения двумерных и трехмерных задач, применяемые обычно в теории характеристик и позволяющие строить с их помощью общее решение задачи о колебаниях полупространства или среды, состоящей из ряда параллельных слоев. Существенным свойством решений упомянутого класса является то, что по заданному решению мы можем внутри класса построить решения, которые получаются в результате отражения заданного решения от прямолинейной границы. К упомянутому классу принадлежит также и некоторые многозначные решения, которые используются в задачах дифракции и в частности дают возможность построить общую теорию дифракции плоских волн и дифракцию любого возмущения относительно угла или логарифмической точки Римановой поверхности в случае двух измерений.

План нашего очерка будет следовать отчасти хронологической последовательности задач, решенных с помощью применения нового метода. Мы изложим сначала одну задачу более специального характера, а именно общую теорию плоских волн в упругом полупространстве со свободной границей. В этой задаче мы имеем лишь частичное применение нового метода. Далее мы переходим к выяснению математических основ этого метода в его общей постановке и к применению его для решения задач о колебаниях упругого полупространства или слоистой среды под влиянием сил особого типа. Следующим вопросом является построение некоторых фундаментальных решений уравнений теории упругости и дальнейшее построение с их помощью общего решения задачи о собственных колебаниях полупространства или слоистой среды при любых начальных условиях. Эта задача, также как и предыдущая, решается как в случае двух, так и в случае трех измерений. Наконец мы перейдем к построению некоторых многозначных решений волнового уравнения, связанных с задачами дифракции. Здесь мы начнем с задачи дифракции плоских волн для двух и для трех измерений, а затем перейдем к общей задаче дифракции для случая двух измерений.

§ 2. Обычным и наиболее известным применением аналитических функций комплексного переменного к уравнениям с частными производными является применение этих функций к уравнению Лапласа с двумя переменными

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Напомним вкратце основные моменты связи уравнения (1) с теорией аналитических функций. Всякое вещественное решение уравнения (1) является вещественной частью некоторой аналитической функции; наоборот, как вещественная так и мнимая части любой аналитической функции являются решениями уравнения (1). Можно подойти к вопросу и с формальной точки зрения: применяя известную формулу Даламбера, мы получим общее решение уравнения (1) в виде:

$$u = f_1(x + iy) + f_2(x - iy).$$

Но, конечно, и при такой постановке необходимость дифференцировать написанные функции комплексных аргументов приводит нас по существу к теории аналитических функций комплексного переменного.

Перейдем теперь к рассмотрению волнового уравнения:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \tag{2}$$

это уравнение имеет вещественное решение вида

$$u = f(t - lx - my - nz), \tag{3}$$

где постоянные l, m, n, определяющие направление движения плоской волны (3), должны быть связаны зависимостью.

$$a^2(l^2 + m^2 + n^2) = 1, \tag{4}$$

а функция f является совершенно произвольной.

Если мы припишем этим постоянным комплексные значения

$$l = l' + il''; \quad m = m' + im''; \quad n = n' + in'', \tag{5}$$

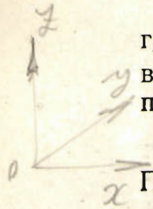
удовлетворяющие соотношению (4), а функцию f будем считать аналитической функцией комплексного переменного, то формула (3) попрежнему будет нам давать решение уравнения (2). Это решение можно назвать комплексной плоской волной. Его вещественная и мнимая части представляют собой произвольные сопряженные гармонические функции аргументов

$$t - l'x - m'y - n'z; \quad l''x + m''y + n''z. \tag{6}$$

При помощи комплексных плоских волн была впервые полностью решена задача об отражении плоских волн в упругой среде от плоской границы.

Основные уравнения теории упругости могут быть, как известно, приведены к двум волновым уравнениям:

$$\Delta^2 \varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \qquad \Delta^2 \vec{\psi} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = 0, \quad (a > b) \tag{7}$$



где скалярная функция φ представляет собой скалярный потенциал, а вектор $\vec{\psi}$ — векторный потенциал. Вектор смещения выражается через эти потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + rot\,\vec{\psi} \tag{8}$$

Плоской упругой волной мы будем называть такое поле смещений, определяемое формулой (8), в котором потенциалы φ и $\vec{\psi}$, как решения волновых уравнений, представляются формулами вида (3).

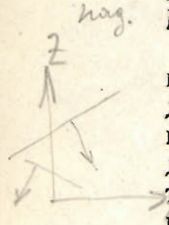
С помощью соответствующего выбора координатных осей можно свести задачу о плоских волнах к плоской задаче теории упругости, когда смещения не зависят от одной из координат, напр., от координаты y; при этом достаточно ограничиться случаем, когда вектор смещения находится в плоскости x,z. В этом случае вместо вектора $\vec{\psi}$ мы будем иметь скаляр ψ, равный длине вектора $\vec{\psi}$, причем этот последний вектор имеет направление оси Y. Вместо указанных выше общих формул мы получаем два волновых уравнения для скалярных функций

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{9}$$

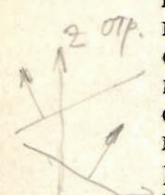
составляющие смещения на оси X и Z выражаются формулами

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}; \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{10}$$

Мы переходим к изложению общей теории плоских волн в полупространстве $z > 0$. Граничные условия на поверхности $z = 0$ могут быть различными. Наибольший интерес представляют два простейших случая, а именно тот случай, когда эта граница свободна от напряжений или когда эта граница является закрепленной, т. е. на ней вектор смещения равен нулю. Мы будем говорить для определенности о случае свободной границы.



Обращаясь к формуле (3), мы видим, что в случае вещественности параметров l, m, n вектор с составляющими l, m, n определяет направление движения плоской волны. Одна плоская волна не удовлетворяет, конечно, предельным условиям; для того чтобы этим условиям удовлетворить, мы должны добавить в ней новые плоские волны, и только совместный агрегат таких волн будет удовлетворять не только дифференциальным уравнениям, но и предельным условиям. Назовем волну падающей, если угол, составленный направлением ее движения с осью Z, будет тупым, и отраженной, если этот угол острый. Надо заметить, что при заданной вещественной падающей волне мы можем получить отраженные волны не только вещественные, но и комплексные. Рассмотрим сначала тот случай, когда падающая волна является чисто продольной, т. е. в формулах (10) функция ψ равна нулю. В этом случае функции φ и ψ, определяющие полный агрегат плоских волн, как падающей так и отраженных, определяются формулами



$$\begin{gathered} \varphi = \Re\left\{\left[\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\right] f_1\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\,z\right) - \right. \\ \left. - \left[\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 - 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\right] f_1\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\,z\right)\right\} \\ \psi = \Re\left\{-4\theta\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right) f_1\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\,z\right)\right\}. \end{gathered} \tag{11}$$

В случае же падения чисто поперечной волны мы получаем формулы следующего вида:

$$\varphi = \Re\left\{+4\theta\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right) f_2\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\,z\right)\right\}$$

$f_1(t - \theta x - \sqrt{1/a^2 - \theta^2}\,z)$ есть падающая волна, т. к. радикал считается отрицатель[но] когда подрадикальное выраж[ение] положительно.

$$\psi=\Re\left\{\left[\left(2\theta^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\right]f_2\left(t-\theta x-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,z\right)-\right. \tag{12}$$
$$\left.-\left[\left(2\theta^2-\frac{1}{b^2}\right)^2-4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\right]f_2\left(t-\theta x+\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,z\right)\right\}.$$

В написанных формулах символ $\Re$ обозначет знак вещественной части и все радикалы, входящие в формулы, считаются отрицательными, когда подрадикальное выражение положительно, и положительно мнимыми, когда оно отрицательно. Далее f_1 и f_2 — прозвольные аналитические функции и, наконец, θ — некоторый вещественный параметр; если этот параметр удовлетворяет неравенству

$$|\theta|<\frac{1}{a},$$

то мы получаем вещественные плоские волны; в других случаях мы будем иметь комплексные плоские волны. Написанные формулы содержат как падающие так и отраженные волны, причем падающая волна определяется тем слагаемым, в котором аргумент функции содержит радикал со знаком плюс.

(−)(−)=(+)

Поскольку мы имеем дело с неограниченным полупространством, представляется естественным наложить на решение определенные ограничения на бесконечности, а именно потребовать, чтобы эти решения оставались ограниченными во всем полупространстве. Для мнимых значений радикалов $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}$ и $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}$ нам придется иметь дело со значениями функций f_1 и f_2 на всей плоскости комплексного переменного. Вспоминая известную теорему Лиувилля о том, что функция регулярная и ограниченная на всей плоскости приводится к постоянной, мы должны будем заключить, что в этих случаях одну из вышеупомянутых функций или обе эти функции надо считать постоянными, причем эту постоянную всегда можно считать равной нулю. Эти общие соображения приводят нас к следующим заключениям. Если θ удовлетворяет неравенству $|\theta|<\frac{1}{a}$, то мы можем для любой падающей продольной или поперечной волны построить отраженные волны. Не трудно получить из написанных формул известные правила для углов падения и отражения.

Если параметр θ удовлетворяет условию $\frac{1}{a}<|\theta|<\frac{1}{b}$, то аргумент функции f_1 попадает на всю плоскость комплексного переменного, и формулы (11) неприменимы. Однако, формулы (12) и в этом случае сохраняют свое значение; не трудно видеть, что при этом в агрегате волн, представляемых формулой (12), поперечные волны, определяемые функцией f_2, будут вещественными и будут состоять из двух частей, одной падающей и одной продольной. Отметим существенную разницу с предыдущим случаем. Аналитическая функция f_2 в формулах (12) имеет как вещественную так и мнимую части. В рассматриваемом случае коэффициенты при f_2 в выражении для ψ в формуле (12) будут комплексными и, производя окончательное выделение вещественной части, мы будем иметь для ψ выражение, содержащее как вещественную так и мнимую части f_2, причем падающие и отраженные поперечные волны представляются различными вещественными фукциями. Продольная волна будет в данном случае комплексной. Здесь мы имеем случай, когда угол падения поперечной волны больше предельного угла полного внутреннего отражения.

Положим, наконец, что параметр θ удовлетворяет условию $|\theta|>\frac{1}{b}$; в этом случае, вообще говоря, как формулы (11) так и формулы (12) теряют смысл; однако, существует единственное положительное значение θ, при котором мы получаем ограниченное решение; это значение есть корень уравнения

$$\left(2\theta^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}=0. \tag{13}$$

Приэтом слагаемые формул (11) и (12), содержащие аргумент из нижней полуплоскости комплексного переменного, пропадают, и мы можем за функции f_1 и f_2 брать любые регулярные и ограниченные в верхней полуплоскости функции. Решения, которые получаются таким образом, представляют собой общий случай плоских поверхностных волн или волн Релея. Самим Релеем они были указаны лишь для весьма частного случая гармонических колебаний, затухающих по отношению к z. Единственный положительный корень уравнения (13) дает величину, обратную скорости распространения этих волн Релея.

Общую теорию плоских волн можно применять и к более общим случаям распространения колебаний, в частности она была применена к решению известной задачи Лэмба о колебании упругого полупространства под влиянием сосредоточенной силы, приложенной к некоторой точке поверхности. Решение, данное Лэмбом для точек поверхности, оказалось возможным представить в виде суммы плоских волн, распространенных на непрерывный спектр изменения θ

$$-\frac{1}{b}<\theta<+\frac{1}{b} \tag{14}$$

с присоединением к нему еще плоских волн, соответствующих $\theta=\pm c$ Такое представление решения при $z=0$ привело непосредственно к возможности распространить его и в глубину полупространства, т. е. дало возможность получить формулы для смещений и при $z>0$.

§ 3. Мы переходим теперь к выяснению математической основы нового метода в его общем выражении. Возьмем волновое уравнение для плоского случая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{15}$$

и поставим себе задачей построить решение этого уравнения, имеющего вид

$$u=f(\theta), \tag{16}$$

где f есть произвольная функция, а θ некоторая определенная, вообще говоря, комплексная функция переменных x, y, t. Непосредственная подстановка в уравнение (16) дает

$$f''(\theta)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]+f'(\theta)\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right]=0$$

и в виду произвольности аналитической функции f мы получаем для θ систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2=0\\&\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Анализ этих уравнений приводит к тому, что функция θ должна получаться как решение уравнения следующего вида

$$\delta=l(\theta)t+m(\theta)x+n(\theta)z-\chi(\theta)=0 \tag{18}$$

где $l, m, n\chi$ любые аналитические функции, которые должны только удовлетворять соотношению

$$a^2(m^2+n^2)=l^2. \tag{19}$$

Всякая аналитическая функция $f(\theta)$ будет в конечном счете функцией переменных x, y, t и ее производные по этим переменным выражаются следующими формулами

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{m(\theta)}{\delta'}f'(\theta); \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{n(\theta)}{\delta'}f'(\theta); \qquad \frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{l(\theta)}{\delta'}f'(\theta)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{m^2}{\delta'}f'(\theta)\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n^2}{\delta'}f'(\theta)\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{l^2}{\delta'}f'(\theta)\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{mn}{\delta'}f'(\theta)\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{ml}{\delta'}f'(\theta)\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t}=\frac{1}{\delta'}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{ln}{\delta'}f'(\theta)\right)
\end{gathered} \tag{20}$$

где δ' обозначает производную от левой части уравнения (18) по букве θ

Введем в рассмотрение трехмерное пространство S с координатами x, z, t. Если в некоторой области B этого пространства уравнение (18) дает нам для θ некоторую область плоскости комплексного переменного, то функция f, входящая в формулу (16), должна быть аналитической в этой области; если же для точек x, z, t в некоторой области уравнение (18) дает для θ значения, образующие некоторую линию (например θ оказывается вещественным), то в формуле мы можем принимать за $f(\theta)$ любую вещественную функцию, определенную на упомянутой выше линии и имеющую производные. Такую вещественную функцию мы можем, конечно, рассматривать как предельное значение вещественной части некоторой аналитической функции на упомянутой выше линии. В общем случае аналитической функции f от комплексного переменного θ мы можем, конечно, брать лишь вещественную часть $f(\theta)$ и будем получать таким образом вещественные решения уравнения.

Обратимся к более подробному рассмотрению уравнения (18). Не уменьшая общности мы можем считать коэффициент $l(\theta)$ равным единице и можем принять $-m(\theta)$ за новую комплексную переменную, приэтом в силу условия мы приведем уравнение (18) к виду

$$t-\theta x\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,z-\chi(\theta)=0. \tag{21}$$

Другой вид этого уравнения, удобный при приложениях, мы получим, если мы положим

$$l(\theta)=a; \qquad m(\theta)=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

приэтом наше основное уравнение приведется к виду

$$at-\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)x\pm\frac{i}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)z-\chi(\zeta)=0. \tag{22}$$

Предыдущие соображения определяют некоторый класс решений уравнения (15). Выделим из этого класса некоторые интересные для дальнейшего решения, а именно: положим, что уравнение (21) имеет следующую специальную форму

$$(t-t_0)-\theta(x-x_0)\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,(z-z_0)=0 \tag{23}$$

или что то же уравнение (22) имеет форму

$$a(t-t_0)-\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)(x-x_0)+\frac{i}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)(z-z_0)=0. \tag{24}$$

Произвольная аналитическая функция ζ, где ζ есть решение уравнения (24), будет давать нам решения уравнения (15), зависящее от двух аргументов

$$\xi = \frac{x - x_0}{a(t - t_0)}; \quad \eta = \frac{z - z_0}{a(t - t_0)}, \tag{25}$$

т. е. будет давать нам однородные решения нулевого измерения аргументов $x - x_0$, $z - z_0$, $t - t_0$. Можно доказать и обратное предложение, а именно: всякое однородное решение уравнения (15) может быть получено указанным выше путем.

§ 4. Исследуем теперь более подробно указанные выше однородные решения, причем для простоты письма мы будем считать, что $x_0 = z_0 = t_0 = 0$. Введем вместо x, z полярные координаты

$$\begin{aligned} x &= r \cos\vartheta \\ z &= r \sin\vartheta \end{aligned} \tag{26}$$

Уравнение (24) приэтом перепишется следующим образом:

$$at - \frac{1}{2} r\left(\zeta e^{-i\vartheta} + \frac{1}{\zeta} e^{i\vartheta}\right) = 0, \tag{27}$$

откуда для ζ мы получаем

$$\zeta = \left(\frac{at}{r} \pm \sqrt{\frac{a^2t^2}{r^2} - 1}\right) e^{i\vartheta}. \tag{28}$$

Выбрав у радикала знак —, мы получим следующий закон соответствия. Кругу $\xi^2 + \eta^2 = 1$ на плоскости ξ, η соответствует единичный круг $|\zeta| = 1$ на плоскости переменного ζ, причем каждому радиусу первого круга соответствует радиус второго круга, с тем же центральным углом. Таким образом внутри круга

$$\xi^2 + \eta^2 < 1 \tag{29}$$

решение волнового уравнения будет представлятся формулой

$$u = \Re\left\{f(\zeta)\right\}, \tag{30}$$

где f аналитическая функция в единичном круге. На окружности круга (29) уравнение (27) дает для ζ двойной корень с модулем, равным единице. Наконец, переходя во вне круга (29), мы получим для ζ два различных корня с модулем, равным единице, и эти корни сохраняют постоянные значения на касательных к окружности круга (29). Мы видим таким образом, что структура решения оказывается совершенно различной во вне и внутри круга.

Выясним теперь в общих чертах возможные способы продолжения решения из внутри круга (29) во вне этого круга. Положим, что внутри нам дано определенное однородное решение, определяемое формулой (30).

На окружности круга (29) это решение имеет определенное вещественное значение. Мы можем произвольным образом представить эти вещественные значения в виде суммы двух вещественных слагаемых и в соответствии с этим можем аналитическую функцию f представить в виде суммы двух аналитических функций

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta).$$

Проведем теперь к окружности круга (29) две системы полукасательных, как это указано на рис. 1 и будем считать, что во вне круга определена вещественная функция u_1 следующим образом. На каждой из полукасательных первого семейства она сохраняет постоянное значение, а именно то значение, которое имеет вещественная часть f_1 в точке касания. Аналогичным образом определим функцию u_2 на втором семействе полукасательных, исходя от значений вещественной части f_2 на окружности круга. Сумма $u = u_1 + u_2$ даст нам одно из возможных продолжений решения (30), определенного внутри круга (29). При таком продолжении сохраняется очевидно непрерывность при переходе через окружность круга, но из предыдущего вытекает многозначность этого способа продолжения. В конкретных задачах определенный выбор продолжения связан с физическими условиями задачи, а именно, с известным принципом Ферматa относительно распространения фронта возмущения.

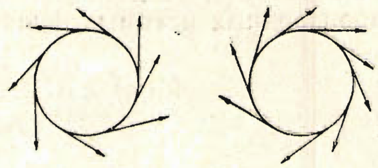


Рис. 1.

Если мы вместо ξ, η обратимся к трехмерному пространству S с координатами x, z, t, то всякой точке ξ, η будет соответствовать определенная полупрямая, выходящая из начала координат (мы считаем $t > 0$), внутренности круга (29) будет соответствовать конический пучок полупрямых, с вершиной в начале и углом arctg a при этой вершине. Можно сказать, что этот конический пучок дает ту часть пространства, куда успело распространиться возмущение, возникшее при $t = 0$ в точке 0, 0 и распространяющейся со скоростью a. Внутри этого конического пучка уравнения (23) и (24) дают для ζ и θ комплектные значения, заполняющие некоторую область, и решение волнового уравнения получается как вещественная часть некоторой аналитической функции одной из этих комплексных переменных. Для переменной ζ вышеупомянутая область будет единичным кругом, а для переменной θ это будет вся плоскость с разрезом $-\frac{1}{a} < \theta < +\frac{1}{a}$ вдоль вещественной оси. Во вне упомянутого конического пучка мы можем получить решение, считая, что u сохраняет постоянное значение на полуплоскостях, касательных к поверхности конического пучка.

§ 5. Применим предыдущие результаты об однородных решениях к задаче Лэмба о колебании в полуплоскости $z > 0$ под влиянием сосредоточенной силы, действующей в момент $t = 0$ в точке $x = 0$, $z = 0$ и направленной параллельно оси Z. Можно показать, что при наличии такой силы потенциалы φ и ψ продольных и поперечных волн должны быть однородными решениями соответствующих волновых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\psi - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Следовательно, мы будем искать эти потенциалы в виде вещественных частей некоторых аналитических функций:

$$\begin{aligned} \varphi = \Re\{\Phi(\theta_1)\} \\ \psi = \Re\{\Psi(\theta_2)\} \end{aligned} \tag{32}$$

Где комплексные переменные θ_1 и θ_2 определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} t - \theta_1 x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_1^2}\, z = 0 \\ t - \theta_2 x + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_2^2}\, z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Для определения функций Φ и Ψ мы имеем предельные условия, выражающие отсутствие напряжений на границе $z=0$. Существенным обстоятельством является тот факт, что при $z=0$ уравнения (33) совпадают, а следовательно, для каждой точки границы переменные θ_1 и θ_2 оказываются одинаковыми. Это дает нам возможность выразить предельные условия через одну и ту же комплексную переменную θ. Пользуясь формулами дифференцирования (20) и приравнивая нулю обе составляющие вектора напряжения, действующего на границу $z=0$, мы получаем два уравнения для определения искомых функций Φ и Ψ. Эти уравнения с добавлением естественных условий на бесконечности дают нам следующие выражения производных искомых функций.

$$\left.\begin{aligned}
\Phi'(\theta_1) &= iC\frac{-2\theta_1^2+\frac{1}{b^2}}{\left(2\theta_1^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_1^2}}\\
\Psi'(\theta_2) &= iC\frac{2\theta_2\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}}{\left(2\theta_2^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_2^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Где C — некоторая вещественная постоянная, пропорциональная импульсу мгновенной силы.

Произведем в общих чертах анализ полученных формул. Для компелксного переменного θ_1 мы будем иметь всю плоскость с разрезом $-\frac{1}{a}<\theta<+\frac{1}{a}$, причем точки этого разреза соответствуют образующим поверхности конического пучка, о котором упоминалось в предыдущем параграфе. Для переменной θ_2 надо изменить $\frac{1}{a}$ на $\frac{1}{b}$, причем a есть скорость распространения продольных волн, а b скорость поперечных волн. Физический смысл имеет лишь полуплоскость $z>0$ и в соответствии с этим мы должны рассматривать не весь конический пучок, но лишь его половину, а для комплексных переменных θ_1 и θ_2 мы будем иметь лишь верхнюю полуплоскость с верхним берегом соответствующего разреза. Для комплексного переменного θ_1 мы имеем на этом—разрезе $\frac{1}{a}<\theta<\frac{1}{a}$, и первая из формул (34) дает нам для Φ' чисто мнимые значения. Это приводит нас к тому факту, что продольный потенциал φ обращается в нуль на поверхности конического пучка, и мы считаем его равным нулю и во вне этого пучка. Несколько иное обстоятельство будет иметь место, для поперечного потенциала. Здесь мы имеем на разрезе условие $-\frac{1}{b}<\theta<\frac{1}{b}$ и вторая из формул (34) дает нам комплексное значение Ψ' при $\frac{1}{a}<|\theta|<\frac{1}{b}$. Таким образом, на некоторых образующих поверхность конического пучка потенциал ψ будет отличным от нуля. Пользуясь элементарными соображениями, мы убеждаемся, что во-вне пучка его надо продолжать так, чтобы он сохранял постоянные значения на полуплоскостях, касательных к поверхности конического пучка и идущих к границе $z=0$. Указанное особое свойство потенциалов φ и ψ связано с тем фактом, что продольные волны, распространяясь вдоль границы $z=0$ быстрее поперечных, порождают в силу предельных условий и поперечные волны, которые таким образом как бы забегают вперед по отношению к тем волнам, которые распространяются с обычной скоростью b.

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся формул (34). Если θ совпадает с корнем уравнения

$$\left(2\theta^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}=0, \tag{35}$$

то формулы (34) дают бесконечные значения для потенциалов. Вещественный корень уравнения (35) мы уже встречали в теории плоских волн, и здесь, как и там, это приведет нас к явлению поверхностных волн.

§ 6. Мы переходим теперь к выяснению общих законов отражения упругих колебаний определенного типа от прямолинейной границы, причем мы здесь, как в задаче Лэмба, имеем дело со случаем двух измерений. Пусть в полуплоскости $z>0$ мы имеем дело с продольным возмущением, потенциал которого определяется формулой

$$\varphi=\Re\{\Phi(\theta)\}, \tag{36}$$

где комплексного переменное удовлетворяет обычному уравнению вида

$$\delta\equiv t-\theta x+\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,z-\chi(\theta)=0 \tag{37}$$

Заданное решение в общем случае может быть определено как в той области пространства x, z, t, где уравнение (37) приводят к комплексным значениям θ, заполняющим некоторую область, так и в такой области этого пространства, где уравнение (37) дает, например, вещественное значение для θ. Положим, что аналитическая функция $\Phi(\theta)$ и продолжение решения в область вещественных значений θ определено так, что вблизи границы $z=0$ возмущения отсутствуют до определенного момента времени. Начиная с того момента, когда заданные возмущения дойдут до поверхности, мы должны будем добавить к заданному возмущению, которое можно назвать падающей волной, еще отраженную продольную волну и отраженную поперечную волну. Мы будем искать эти отражения волны в обычной форме

$$\varphi_1=\Re\{\Phi_1(\theta_1)\};\quad \psi_2=\Re\{\Psi_2(\theta_2)\} \tag{38}$$

где комплексные переменные θ_1 и θ_2 должны удовлетворять уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&\equiv t-\theta_1x-\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}\,z-\chi(\theta_1)=0\\ \delta_2&\equiv t-\theta_2x-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}\,z-\chi(\theta_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Эти уравнения написаны так, чтобы значения переменных θ_1 и θ_2 совпадали бы с θ при $z=0$. Отметим также, что в уравнениях (39) мы выбираем у радикалов знак, противоположный тому, который мы имеем в уравнении (37). Это гарантирует нам то обстоятельство, что отраженные возмущения не будут менять картины движения в моменты времени, предшествующие отражению. Подставляя в предельные условия продольный потенциал $\varphi+\varphi_1$ и поперечный ψ_2 и пользуясь соответствующими формулами дифференцирования (20), мы получим два уравнения для определения искомых функций Φ_1' и Ψ_2'. Существенным при этом явится совпадение комплексных переменных θ, θ_1, θ_2 на границе $z=0$.

Формулы, дающие окончательный ответ, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1'(\theta_1)&=\frac{-\left(2\theta_1^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta_1^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_1^2}}{\left(2\theta_1^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta_1^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_1^2}}\,\Phi'(\theta_1)\\ \Psi_2'(\theta_2)&=\frac{-4\theta_2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_2^2}\left(2\theta_2^2-\frac{1}{b^2}\right)}{\left(2\theta_2^2-\frac{1}{b^2}\right)^2+4\theta_2^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_2^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}}\,\Phi'(\theta_2)\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Отметим, что они не содержат совершенно функции $\chi(\theta)$, которая входила в уравнение (37). Совершенно аналогично решается общая задача отражения от прямолинейной границы и в том случае, когда заданная падающая волна представляет собою возмущение чисто поперечного типа

$$\psi = \Re\{\Psi(\theta)\}, \tag{41}$$

где θ определяется уравнением вида:

$$\delta \equiv t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_2^2}\, z - \chi(\theta) = 0. \tag{42}$$

Во всех случаях необходимо, конечно, пользуясь физическими условиями задачи, продолжать решения из области комплексности переменных θ в ту область, где эта переменная имеет вещественное значение, как мы это делали, например, в задаче Лэмба, продолжая значения θ во вне конического пучка.

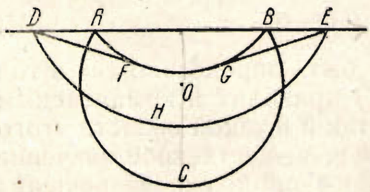


Рис. 2.

Для примера рассмотрим тот случай, когда падающая волна представляет собой возмущение, идущее от источника, находящегося в точке $x=0$, $z=z_0$ и посылающего в момент $t=0$ такие колебания, для которых $\varphi=0$, а ψ представляет собой решения волнового уравнения, однородного относительно аргументов x, $z-z_0$, t.

В этом случае падающая волна определяется формулой:

$$\psi = \Re\{\Psi(\theta)\}, \tag{43}$$

где θ представляет собою решение уравнения:

$$\delta \equiv t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\,(z - z_0) = 0. \tag{44}$$

Функция $\Psi(\theta)$ есть заданная функция комплексного переменного, регулярная на плоскости θ, с разрезом $-\frac{1}{b} < \theta < \frac{1}{b}$. Эта функция будет иметь особую точку на бесконечности, что соответствует источнику колебания, и ее вещественная часть должна обращаться в нуль на разрезе, который соответствует фронту распространяющегося возмущения. В этом случае отраженная поперечная волна также будет определяться однородным решением:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \Re\{\Psi_1(\theta_1)\} \\ \delta_1 &\equiv t - \theta_1 x - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_1^2}\,(z + z_0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

центр которого находится в точке $x=0$, $z=-z_0$. Отраженная продольная волна будет иметь более сложную структуру:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \Re\{\Phi_2(\theta_2)\} \\ \delta_2 &\equiv t - \theta_2 x - \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_2^2}\, z - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_2^2}\, z_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

и ее фронт будет некоторой алгебраической кривой. На прилагаемом рисунке (см. рис. 2) дается геометрическая картина фронта возмущений в момент времени, следующий после отражения. Часть круга ACB представляет собою область, занятую падающей поперечной волной. Алгебраическая кривая DHE ограничивает область отраженного продольного возмущения.

Отраженное поперечное возмущение частично занимает сегмент $AFGB$, внутри которого соответствующая комплексная переменная принимает комплексное значение, а частично это возмущение находится в треугольниках DAF и BGE, где значение этой переменной вещественно и принадлежит промежуткам

$$\left.\begin{array}{c} -\frac{1}{b}<\theta<-\frac{1}{a} \\ \text{и} \\ \frac{1}{a}<\theta<\frac{1}{b} \end{array}\right\} \tag{47}$$

Здесь, как и в задаче Лэмба, мы будем иметь явления поверхностных волн.

§ 7. Переходим теперь к описанию применения нового метода в пространстве трех измерений. Основным для нас будет при этом принцип наложения плоских волн. Выберем вращающуюся систему координат

$$\begin{aligned} X&=r\cos(\vartheta-\lambda) \\ Y&=r\sin(\vartheta-\lambda) \end{aligned} \tag{48}$$

где r, ϑ, z цилиндрические координаты и λ произвольный параметр. Возьмем решение плоской задачи в неограниченном пространстве координат X, z, зависящие от параметра λ. Согласно общему правилу мы будем иметь, например, для потенциала продольных волн:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi=\Re\{\Phi(\theta_{\vartheta-\lambda})\} \\ \delta\equiv t-\theta_{\vartheta-\lambda}r\cos(\vartheta-\lambda)+\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2_{\vartheta-\lambda}}\,z-\chi(\theta)=0 \end{array}\right\} \tag{49}$$

Интегрируя по параметру λ, мы будем иметь выражение для потенциала продольных волн в трехмерном пространстве:

$$\varphi(r,\vartheta,z)=\Re\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\theta_{\vartheta-\lambda},\lambda)\,d\lambda. \tag{50}$$

Для получения потенциала поперечных возмущений нужно применить тот же процесс. В решении плоской задачи

$$\left.\begin{array}{c} \psi=\Re\{\Psi(\theta_{\vartheta-\lambda},\lambda)\}; \\ \delta\equiv t-\theta_{\vartheta-\lambda}r\cos(\vartheta-\lambda)+\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2_{\vartheta-\lambda}}\,z-\chi(\theta_{\vartheta-\lambda})=0 \end{array}\right\} \tag{51}$$

мы должны считать Ψ длиной некоторого вектора, направленного по оси Y и затем должны складывать геометрически эти векторы, соответствующие различным значениям λ. Это приведет нас окончательно к векторному потенциалу, который имеет составляющие на оси r и ϑ цилиндрической системы координат, определяемые следующими формулами

$$\left.\begin{array}{c} \psi_r=\Re\int\limits_0^{2\pi}\Psi(\theta_{\vartheta-\lambda},\lambda)\sin(\vartheta-\lambda)\,d\lambda \\ \psi_\vartheta=\Re\int\limits_0^{2\pi}\Psi(\theta_{\vartheta-\lambda},\lambda)\cos(\vartheta-\lambda)\,d\lambda. \end{array}\right\} \tag{52}$$

Указанный процесс приводит нас к построению опять некоторого класса решений уравнений теории упругости в трех измерениях. С помощью этого класса решений мы можем рассматривать для случая трех измерений задачи, аналогичные тем, о которых мы упоминали выше в случае двух измерений. Вместе с введенным классом решений полезно еще ввести некоторые новые решения, которые получаются вращением таких поперечных волн, для которых вектор смещения направлен по оси Z. Рассматривая те их этих решений, которые представляются в комплексной форме, мы получим для плоского случая решения следующего вида:

$$V = -\frac{\partial\psi_z}{\partial x}; \quad \psi_z = \Re\{\Psi_z(\theta'_{\vartheta-\lambda}, \lambda)\}$$
$$\delta' \equiv t - \theta'_{\vartheta-\lambda} r\cos(\vartheta-\lambda) + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta'^2_{\vartheta-\lambda}}\, z - \chi(\theta'_{\vartheta-\lambda}) = 0. \tag{53}$$

В результате интегрирования по λ мы получим векторный потенциал, определяемый вектором, параллельными оси z, причем длина этого вектора будет определяться формулой:

$$\psi_z = \Re\int_0^{2\pi} \Psi_z(\theta'_{\vartheta-\lambda}, \lambda)\, d\lambda. \tag{54}$$

Можно доказать, что среди введеных решений заключаются между прочим все те решения уравнений теории упругости, для которых потенциалы являются однородными функциями аргументов.

Остановимся подробнее на том частном случае, когда потенциал является однородной функцией переменных r, z, t (не зависит от ϑ) и когда вектор смещения находится в меридиональной плоскости. В этом случае картина возмущений обладает осевой симметрией по отношению к оси. Скалярный потенциал будет однородным решением волнового уравнения, а векторный потенциал будет направлен по оси ϑ цилиндрической системы координат. Для скалярного потенциала будем иметь формулу:

$$\varphi = \Re\int_0^{\pi} \Phi(\theta_{\vartheta-\lambda})\, d\lambda, \tag{55}$$

где

$$\delta \equiv t - \theta_{\vartheta-\lambda} r\cos(\vartheta-\lambda) + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2_{\vartheta-\lambda}}\, z = 0. \tag{56}$$

Соответствующим подбором аналитической функции мы можем добиться того, чтобы, не меняя потенциала φ, исключить из формулы, его определяющей, знак вещественной части, т. е. иметь просто

$$\varphi = \int_0^{\pi} \Phi(\theta_{\vartheta-\lambda})\, d\lambda. \tag{57}$$

Одной из основных задач является определение аналитической функции $\Phi(\theta_{\vartheta-\lambda})$ по заданному потенциалу $\varphi(\xi, \eta) = \varphi\left(\frac{r}{t}, \frac{z}{t}\right)$. Как оказывается, это можно сделать при помощи следующей конечной формулы:

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\pi}\varphi\left(0, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}}\right). \tag{58}$$

Аналогичным способом можно определить подъинтегральную функцию и выражение для потенциала поперечных волн:

$$\psi'(\theta)=\frac{2}{\pi}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\theta^2}}\right)}{\theta\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\theta^2}}. \tag{59}$$

Основное свойство введенного нами класса решений заключается в возможности сравнительно легко строить для него закон отражения от прямолинейной границы, чтобы получить отраженные потенциалы для решений, определяемых формулами (50) и (54); достаточно просто произвести отражение тех плоских волн, вращение которых определяло заданные потенциалы. Такой процесс отражения, очевидно, приводит нас к решениям, удовлетворяющим предельным условиям, но необходимо еще убедиться в том, что те добавочные слагаемые, которые определяют отраженные волны, не меняют картины движения до момента отражения. Можно показать, что это будет действительно так, если выяснить более подробно связь потенциалов φ, ψ с той подинтегральной функцией, которая стоит в формулах (50) и (54). Кроме того, и здесь надо соответствующим образом продолжать решение за область комплексности, как мы это и делали в случае двух измерений.

Отметим одно существенное различие, относящееся к механическим свойствам однородных решений для случаев двух и трех измерений. В случае двух измерений однородные потенциалы нулевого измерения давали, между прочим, решение задачи о действии мгновенного импульса в некоторой точке, или лучше сказать, некоторой прямой, если принять во внимание третье измерение. Однородные потенциалы в трехмерном пространстве дают уже не сосредоточенный импульс, а силу, сосредоточенную в заданном месте и действующую от заданного момента во все последующие моменты (включенная сила). Путем наложения таких включенных сил можно получить, очевидно, силу, действующую по любому закону.

§ 8. Одной из основных задач, которые могут быть решены с помощью изложенной теории, является задача о собственных колебаниях полупространства и слоистых сред. Задача эта состоит в следующем: в начальный момент $t=0$ даны значения смещений и их скоростей в функциях координат:

$$\left.\begin{aligned}
&u|_{t=0}=u_0(x,y,z); && v|_{t=0}=v_0(x,y,z); && w|_{t=0}=w_0(x,y,z)\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_0'(x,y,z); && \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0'(x,y,z); && \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=w_0'(x,y,z)
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

требуется определить смещения во все моменты времени. Способ решения этой задачи для неограниченной среды был предложен Volterra. Он основан на применении так называемого метода характеристик. Остановимся подробнее на этом способе для случая двух измерений. Если в пространстве x, z, t даны два решения уравнений упругости, векторы смещений которых суть u, w и u_1, w_1, а составляющие тензора напряжений X_x, X_z, Z_z и $X_x^{(1)}$, $X_z^{(1)}$ $Z_z^{(1)}$, то существует формула:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S\Big\{&(X_xu_1+X_zw_1-X_x^{(1)}u-X_z^{(1)}w)\cos nx+\\
&+(X_zu_1+Z_zw_1-X_z^{(1)}u-Z_z^{(1)}w)\cos nz-\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial t}u_1+\frac{\partial w}{\partial t}w_1-\frac{\partial u_1}{\partial t}u-\frac{\partial w_1}{\partial t}w\right)\cos nt\Big\}\,dS=0,
\end{aligned} \tag{61}$$

где через S обозначена произвольная замкнутая поверхность в пространстве x, z, t, внутри которого векторы смещений имеют непрерывные первые производные. Применяя эту формулу соответственно выбранным поверхностям и взяв в качестве одного из решений искомое решение, а в качестве другого специально подобранное особое решение, мы можем найти значение искомого решения в произвольной точке пространства. В качестве поверхностей, к которым применяется формула (61), необходимо взять замкнутые поверхности, ограниченные конической поверхностью

$$a^2\ (t-t_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \tag{62}$$

или

$$b^2\ (t-t_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2, \tag{63}$$

плоскостью $t=0$ и малым цилиндром с осью $x=x_0$, $y=y_0$.

Описанным приемом задача в неограниченном пространстве решается до конца.

Рамки настоящей статьи не позволяют детальнее останавливаться на особенностях применения этого метода в случае полупространства. Существенным является то, что те особые решения, которые были применены Volterra, принадлежат к изученному нами классу решений, отражение которых нами получено. Следует отметить небольшую разницу, которая будет по сравнению с вышеизложенным. В то время как в наших прежних решениях уравнений теории упругости мы предполагали, что потенциалы представляются через функции комплексного переменного с помощью формул (16), здесь мы будем иметь дело со случаем, когда не потенциалы, а сами смещения представляются в таком виде. Это обстоятельство, однако, не представляет ничего принципиально трудного. Очевидно, что составляющие вектора смещений удовлетворяют волновому уравнению и мы можем поэтому строить решения, в которых эти составляющие представляются в виде (16). Формулы, дающие величины вектора смещений в тех двух частных решениях, которые были использованы Volterra, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &u_1=\Re\left\{-i\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1{}^2}\right\}; \qquad w_1=\Re\{-i\theta_1\} \\ &\text{и} \\ &u_2=\Re\{-i\theta_2\}; \qquad\qquad w_2=\Re\left\{i\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2{}^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где θ_1 дается формулой (23), а θ_2 отличается от θ_1 заменой a на b. Ввиду того что теория отражения такого рода решений от границы разработана, удается перенести метод Volterra и на случай ограниченного пространства.

Подробный анализ позволяет и для этой задачи построить теорию поверхностных волн. Если в начальный момент $t=0$ возмущение было сосредоточено в некотором ограниченном участке полупространства, то приэтом с течением времени от этого участка будет распространяться со скоростью c, скоростью Rayleigh'я, волна, принадлежащая к классу поверхностных волн того типа, который был разобран в теории комплексных плоских волн.

Кроме задачи о колебании в полупространстве, таким же путем может быть решена задача о колебании произвольной среды, состоящей из параллельных слоев с различными физическими свойствами.

Задача свободных колебаний в трех измерениях принципиально решается тем же способом. Вместо формулы (61) необходимо написать другую, являющуюся ее обобщением на случай четырехмерного пространства (x, y, z, t). Несколько меняется и вид частных решений, применяемых при этом. Удобнее всего воспользоваться с этой целью решениями, не обладающими осевой симметрией. Самый вид частных решений, входящих при этом, мы оставляем в стороне, не затрагивая деталей способа. Существенным является то, что здесь, как и для случая двух измерений, интегралами типа (50) и (52) выражаются не потенциалы, а сами смещения. Для этих частных решений удается найти их конечное представление и, построив теорию отражения, поступать так же, как в двухмерном случае.

§ 9. Мы изложили, каким образом решаются основные вопросы теории отражения упругих волн от плоской границы для случаев свободных и вынужденных колебаний. Не останавливаясь на том, как можно решать вопросы преломления, анализ которых построен на том же принципе, перейдем к другой области применения нашего метода комплексного переменного. Мы имеем здесь в виду теорию дифракции волн.

Одна из основных задач дифракции — это задача об огибании волной препятствий, имеющих вид угла или ширмы. Математически эта задача ставится следующим образом. Требуется найти решение волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{65}$$

для области пространства, ограниченной двумя плоскостями, проходящими через ось z, т. е. области

$$0 < \vartheta < \alpha, \tag{66}$$

где ϑ есть цилиндрическая координата пространства при граничных условиях

$$u\big|_{\vartheta=0} = 0 \qquad u\big|_{\vartheta=\alpha} = 0 \tag{67}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\vartheta=0} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\vartheta=\alpha} = 0 \tag{68}$$

Обычно при этом

$$\pi < \alpha < 2\pi.$$

Еще Sommerfeld показал эквивалентность такого рода задач с задачей о решении волнового уравнения в многолистном пространстве с линией разветвления на сгибаемом ребре $z=0$. Ход доказательства приэтом напоминает известные соображения из теории отражения волн от концов свободной и закрепленной струны. Рассмотрим, например, такое колебание, в котором, кроме граничных условий (67), даны еще начальные условия

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= u_0(r, \vartheta, z) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= u_0'(r, \vartheta, z). \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Одновременно с областью (66) рассмотрим еще область $-\alpha < \vartheta < 0$ и определим в ней дополнительно начальные условия по нечетному закону

$$\begin{aligned} u_0(r, \vartheta, z) &= -u_0(r, -\vartheta, z) \\ u_0'(r, \vartheta, z) &= -u_0'(r, -\vartheta, z) \end{aligned} \tag{70}$$

Очевидно, что, благодаря полной симметрии задачи, величина смещений на нейтральной плоскости ϑ будет нуль. Повторяя многократно процесс отражения от обеих сторон угла, мы придем к нужным результатам. Таким образом, если продолжить соответственно начальные условия, то задача сведется к задаче о колебании области $-\infty < \vartheta < +\infty$ с произвольными начальными условиями. Эта область однако не есть наше обычное пространство, а представляет собой Риманово пространство с логарифмической линией разветвления $r=0$, так как все функции координат, которые мы рассматриваем, вообще говоря, не будут уже периодическими функциями от ϑ с периодом 2π, а будут иметь другой период. Поэтому точки с координатами ϑ, отличающимися на $2k\pi$, нужно помещать на различные листы Риманова пространства. Если рассматривается задача о вынужденных колебаниях, то способ ее приведения к многолистной задаче будет совпадать с прежним. Вместо начальных условий мы должны будем в Римановом пространстве поместить отраженные источники в соответствующих точках.

Решение задачи по способу комплексного переменного, даваемое ниже, не накладывает никаких ограничений вроде периодичности. В качестве частного примера разберем сначала плоскую задачу. Если мы построим комплексное переменное ζ по формуле

$$\zeta = \left(\frac{at}{r} - \sqrt{\frac{a^2t^2}{r^2} - 1}\right) e^{i\vartheta}, \tag{71}$$

то всякая его функция, имеющая точки разветвления при $\zeta = 0$, даст разветвляющееся решение волнового уравнения с точкой разветвления $r = 0$. Некоотрые из этих решений дают сразу ответ на определенные физические задачи. Рассмотрим одну из таких задач, а именно, задачу о дифракции плоской волны. Сущность этой задачи заключается в следующем. В пространстве x, y, t с логарифмической точкой разветвления в начале координат двигается по одному листу элементарная плоская волна, выражаемая для $t < 0$ формулой:

$$\begin{aligned} &u = 0 \quad r\cos\vartheta < -at; \quad \text{или} \quad |\vartheta| > \frac{\pi}{2} \\ &u = 1 \quad x > -at; \quad |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{72}$$

Эта волна представляет собой плоское возмущение, фронт которого параллелен оси y и движется со скоростью a к началу координат. До вступления возмущения в некоторую точку $u = 0$, а после его вступления $u = 1$.

Рис. 3.

Рассмотрим это же движение после прохождения волны через логарифмическую точку. Можно доказать, что это решение должно после дифракции быть однородной функцией нулевого измерения относительно координат и времени, т. е. внутри круга $r < at$ представляться вещественной частью функции комплексного переменного ζ, а во внешности продолжаться по какому-либо из описанных выше законов (см. рис. 3). Внутренность круга и будет представлять область, где будет сказываться явление дифракции. Значение функции комплексного переменного $f(\zeta)$ на контуре области не трудно установить из физических соображений. Эти значения должны быть таковы, чтобы u непрерывно менялось при переходе изнутри круга $r < at$ во внешность этого круга, где явление дифракции никакого влияния оказать не могло. Благодаря установленному закону соответствия точек круга $r < at$ с точками круга $|\zeta| < 1$, мы можем получить ответ на вопрос.

Для удобства перенумеруем листы Римановой поверхности цифрами от $-\infty$ до $+\infty$, проведя разрез от начала по отрицательной оси и считая нулевым листом тот, на котором $-\pi < \vartheta < +\pi$. На нулевом листе, как видно из чертежа, круг дифракции везде граничит с возмущенной областью, которая на чертеже отмечена штриховкой и где следовательно $u = 1$. На всех же остальных листах он граничит с областью, где $u = 0$. Таким образом мы должны построить такую гармоническую функцию, которая на нулевом листе обращается на контуре в 1, а в остальных в 0. Эта гармоническая функция известна, она дается формулой:

$$u = \Re\left\{\frac{1}{\pi i}\lg\left[\frac{1}{i}\lg\zeta - \pi\right] - \frac{1}{\pi i}\lg\left[\frac{1}{i}\lg\zeta + \pi\right]\right\}, \tag{73}$$

где под $\lg\zeta$ понимается его главное значение, т. е. $i \arg\zeta$. Формула (73) позволяет исследовать общее явление дифракции плоских волн на логарифмической поверхности. Любая плоская волна, которая до дифракции определяется формулой

$$u = f(x + at) \text{ при } t < 0, \tag{74}$$

где $f(s) = 0$ при $s < 0$, может быть разложена на сумму плоских волн с помощью формулы

$$u = \int_0^\infty u_0(x + at - h) f'(h)\, dh, \tag{75}$$

где u_0 изученная нами разрывная функция, равная то нулю, то единице. Дифракцию общего вида плоской волны мы получим, складывая отдельные слагаемые, т. е. изучая дифракцию подинтегрального выражения и затем интегрируя по параметру. Переход от дифракции на логарифмической поверхности к дифракции относительно угла может быть получен с помощью теории отражения.

Этих соображений можно однако избежать, если с самого начала ввести в рассмотрение периодические элементарные плоские волны. На этом мы останавливаться не можем. Дифракция плоских волн в трехмерном пространстве также изучается при помощи элементарных решений, равных нулю в невозмущенной области и единице в возмущенной. Для того чтобы изучить падающую под определенным углом к оси разветвления элементарную плоскую волну, введем особую подвижную систему координат. Пусть угол, составленный нормалью к фронту волны с осью z, равен ω, тогда из геометрических соображений очевидно, что кажущаяся скорость движения фронта волны вдоль оси z равна $\frac{a}{\cos\omega}$. Приэтом можно убедиться, что характер зависимости нашего решения от координат z и t таков, что u во всех частях пространства должно быть функцией только от

$$t - \frac{z\cos\omega}{a} = \tau \tag{76}$$

Если в волновом уравнении совершить соответствующую замену переменных, то получится уравнение для u, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sin^2\omega}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \tag{77}$$

Таким образом задача сведена к задаче двух измерений. Если в прежнем решении заменить a на $\frac{a}{\sin\omega}$ и t на τ, то оно даст ответ на интересующий вопрос. Мы получим такую физическую картину явления (см. рис. 4). Плоскость $ABCD$ — плоскость фронта волны пересекается с осью разветвления в точке E. Дифракционное возмущение сосредоточено на всех листах Римановской поверхности внутри конуса $EFGHI$, с вершиной в точке E, касательного к плоскости волны по линии EF. Значения $u = 1$ получатся на нулевом листе Риманова пространства между конусом и плоскостью $ABCD$. Внешность этой плоскости на нулевом листе и внешность конуса на всех остальных — область невозмущенная. Интегрирование такой плоской волны, также как для случая двух измерений, позволяет получить дифракцию плоской волны общего типа.

Последний вопрос, на котором необходимо остановиться — это вопрос дифракции для любых начальных условий (дифракция свободных колебаний). Эта задача пока решена только для случая распространения волны в двухмерном пространстве.

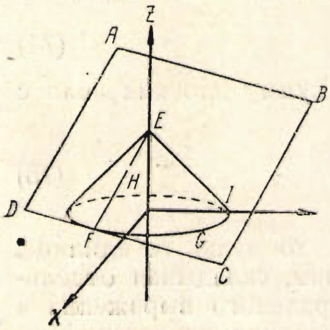


Рис. 4.

Способ ее решения основан на интегрировании в плоскости некоторого комплексного параметра решений, зависящих от параметра.

В виду недостатка места у нас нет возможности останавливаться на деталях этого способа, и мы приведем только окончательный результат.

Суть дела заключается в том, что с помощью контурных интегралов ищется представление такого решения волнового уравнения на Римановой поверхности, которое на первом листе при $at<(x_0^2+y_0^2)$ равно известному решению Volterra.

$$\lg\left(\frac{at}{r_1}-\sqrt{\frac{a^2t^2}{r_1^2}-1}\right), \tag{78}$$

где через r_1 обозначено расстояние от переменной точки области до фиксированной точки с координатами x_0, z_0, t_0, а на остальных листах обращается в нуль. Это решение играет, как известно, основную роль при решении задачи о свободных колебаниях по методу характеристик. Если известна его дифракция, то приемами, аналогичными тем, которые были использованы в теории свободных упругих колебаний и на которых у нас нет времени останавливаться, можно решить и здесь общую задачу. Построение частного решения (78) можно получить, накладывая рассмотренные нами элементарные плоские волны; формулы, дающие ответ на вопрос, имеют вид:

$$W=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c v(\lambda)\,d\lambda+\psi(x,y), \tag{79}$$

где c подобранный соответственно контуру, $v(\lambda)$ решение разобранного типа, которое дается формулой:

$$\left.\begin{aligned} v(\lambda)&=\frac{1}{\pi i}\lg\left[\frac{1}{i}\lg\zeta-\lambda\right],\\ \zeta&=\left(\frac{at_1}{r}-\sqrt{\frac{a^2t_1^2}{r^2}-1}\right)e^{i\varphi}\\ t_1&=t+\frac{r_0}{2ar}\left(e^{i(\varphi_0-\lambda)}+e^{i(\lambda-\varphi_0)}\right).\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

где

Здесь через r_0, φ_0 обозначены полярные координаты точки x_0, y_0. Интеграл (79) дает представление искомой функции как до дифракции так и после нее. Таким образом поставленная задача решается до конца.

Наш очерк был бы неполным, если бы мы ничего не сказали о том, каковы же задачи, стоящие в настоящий момент перед новым методом и каковы перспективы его дальнейшего развития.

Прежде всего отметим, что некоторые результаты, касающие, например, распространения волн в слое, пока еще недостаточно глубоко освещены. Несмотря на то, что метод комплексного переменного, теоретически говоря, дал полное решение задачи, которое не удавалось до сих пор получить никаким другим путем, все же некоторые из полученных формул не позволяют в настоящий момент провести качественный анализ. Дело в том, что для поздних моментов времени, т. е. при многократных отражениях от границы, получается представление смещений в виде суммы, хотя и конечного, но очень большого числа слагаемых. Поэтому качественный характер явления теряется. В настоящий момент этот вопрос разрабатывается и кое-какие результаты в этом направлении уже получены.

Второй вопрос, нуждающийся в освещении — это вопрос об изучении механических свойств тех особых решений, которые характеризуются однородными потенциалами нулевого измерения, и построение однородных решений других измерений. Дело в том, что до сих пор мы имеем лишь механическую характеристику нескольких источников частного типа и вопрос о механическом поведении всех рассмотренных источников является открытым.

Наконец весьма обширный круг задач стоит еще перед теорией дифракции. Здесь, помимо естественно встающего вопроса о дифракции в трех измерениях, встает такой труднейший вопрос, как вопрос о дифракции упругих волн. Элементарное рассмотрение этого вопроса сразу приводит к весьма сложным граничным задачам теории функции комплексного переменного. Эти задачи принадлежат к числу так называемых смешанных задач, для которых в настоящее время еще не разработано никакой теории.

Разрешению этих вопросов и будут посвящены дальнейшие исследования в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Соболев. Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применении к отражению плоских упругих волн. Труды СИ № 10, *1931*.

2. С. Соболев. Применение теории плоских волн к задаче H. Lamb'a. Труды СИ № 18 *1932*.

3. Е. Нарышкина. Об одном применении теории плоских волн. Труды СИ № 19, *1932*.

4. V. Smirnoff et S. Soboleff. Sur le problème plan des vibrations élastiques C. R. Avril *1932*.

5. V. Smirnoff et S. Soboleff. Sur quelques problèmes des vibrations élastiques. C. R. Mai *1932*.

6. V. Smirnoff et S. Soboleff. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. Труды СИ № 20.

7. V. Smirnoff et S. Soboleff. Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques. Труды СИ № 29, *1933*.

8. E. Naryschkina. Über die Schwingungen des festen elastischen Halbraumes der längs der Ebene mit einer elastischen kompressiblen Flüssigkeit grenzt. Труды СИ № 21, *1933*.

9. S. Soboleff. Sur les vibrations d'un demiespace et d'une couche élastique. Математический сборник, т. 40, в. 2, *1933*.

10. S. Soboleff. L'équation d'onde sur la surface logarithmique de Riemann. C. R. Janvier *1933*.

11. S. Soboleff. Sur un problème de la diffraction des ondes. C. R. Janvier *1933*.

12. Смирнов. Курс высшей математики для физиков, т. III.