О НАПРЯЖЕНИЯХ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ УСИЛИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ГРАНИЦЕ

С. Г. Лехницкий (*Ленинград*)

Задача о напряжениях в бесконечной полуплоскости, нагруженной по границе некоторыми усилиями в виде сосредоточенных сил или сплошной нагрузки, распределенной на некоторых участках границы, принадлежит к числу довольно известных задач, если условия задачи таковы, что мы имеем дело с плоской деформацией или плоским напряженным состоянием. В случае действия одной сосредоточенной силы, приложенной нормально к границе, мы имеем решение:

$$\overline{rr}=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{r},\quad \overline{\theta\theta}=0,\quad \overline{r\theta}=0\ .\ .\ . \tag{1}$$

где P — величина силы, r, θ — полярные координаты точек полуплоскости, причем полюс совпадает с точкой приложения силы, а угол θ отсчитывается от линии действия силы (рис. 1)

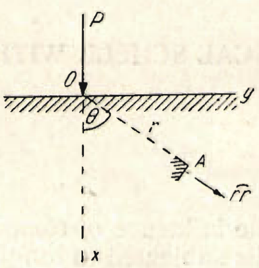

Рис. 1.

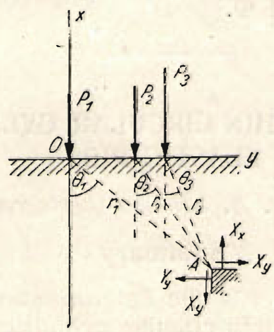

Рис. 2.

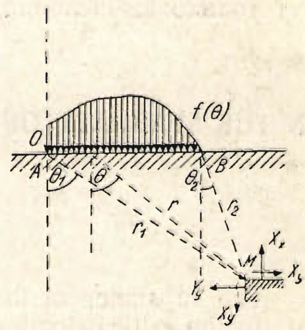

Рис. 3.

Пользуясь этим решением, легко перейти к случаю нескольких сил, а затем и к случаю сплошной нагрузки, распределенной на некотором участке границы.

Переходя к напряжениям X_x, Y_y, X_y, отнесенным к прямоугольной системе координат, получим решение для нескольких сил, суммируя напряжения, возникшие от каждой силы в отдельности:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{r_k}\cos^3\theta_k\\
Y_y &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{r_k}\sin^2\theta_k\cos\theta_k\\
X_y &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{r_k}\sin\theta_k\cos^2\theta_k
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Наконец, для случая сплошной нагрузки, распределенной на некотором участке AB, получаем, как предельный случай формул (2), выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)\cos^2\theta d\theta \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)\sin^2\theta d\theta \\ X_y &= -\frac{2}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)\sin\theta\cos\theta d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь $f(\theta)$ — нагрузка на единицу длины, выраженная в виде функции от угла θ.[1]

Некоторое неудобство решений (2) и (3) в том, что напряжения получаются как функции углов θ_k и расстояний r_k (в первом случае) или как функции углов θ_1 и θ_2, определяющих положение исследуемой точки относительно концов участка (во втором случае), а поэтому в отдельных случаях приходится каждый раз переходить к декартовым координатам x, y,; не совсем удобно также представлять нагрузку как функцию переменного угла θ (см. черт. 3).

Мы позволим себе указать на способ решения этой задачи, при котором указанные неудобства будут устранены с самого начала.

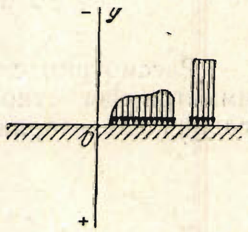

Рис. 4.

Расположим ось x по границе полуплоскости и нагрузку (рис. 4) будем выражать как функцию от x, $f(x)$. Сделаем допущение, что эта функция удовлетворяет условию Дирихле на любом конечном интервале, и, сверх того, абсолютно интегрируема на всем протяжении границы, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \text{конечной величине.}$$

Тогда[2] такая функция может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos t(z-x)\,dz. \qquad (I)$$

При этом надо отметить, что интеграл, стоящий в правой части, во всякой точке, кроме точек разрыва непрерывности $f(x)$, дает значение функции $f(x)$ в этой точке; в точках разрыва этот интеграл дает величину

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Интеграл упрощается, если $f(x)$ функция четная (т. е. нагрузка расположена симметрично относительно оси y); тогда

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(z)\cos tx\cos tz\,dz. \qquad (II)$$

[1] С. П. Тимошенко. Курс теории упругости. Часть I. С.-Петербург 1914, стр. 131. Филоненко-Бородич. Основы теории упругости. Изд. Госстройиздата, 1932, стр. 115.

[2] В. И. Смирнов. Курс высшей математики для техников и физиков, том второй, Ленинград, 1932, стр. 427—433.

Для случая, если $f(x)$ нечетная функция, имеем:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(z)\sin tx\sin tz\,dz. \tag{III}$$

Обозначая

$$\int_0^\infty f(z)\cos tz\,dz=\Psi(t) \tag{a}$$

$$\int_0^\infty f(z)\sin tz\,dz=\chi(t) \tag{b}$$

имеем

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)\cos tx\,dt \ \text{(четная функция)} \tag{IIa}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)\sin tx\,dt \ \text{(нечетная функция).} \tag{IIIa}$$

Рассмотрим случай, когда на границе действует нормальная нагрузка, симметричная относительно оси y. Тогда имеем следующие контурные условия для напряжений:

$$(Y_y)_{y=0}=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)\cos tx\,dt,\ (X_y)_{y=0}=0.$$

Полагая пластину неограниченной, естественно предположить, что все напряжения обращаются в нуль на бесконечно далеком расстоянии.

В виду того что напряжение Y_y на границе принимает значение определенного интеграла, будем искать функцию Airy также в виде определенного интеграла, типа

$$\varphi(x,y)=\int_0^\infty \Phi(y,\ t)\cos tx\,dt \tag{c}$$

Эта функция должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0.$$

Чтобы найти вид функции $\Phi(y,\ t)$ нам придется дифференцировать интеграл (c) по x и y как по параметрам, и мы получим:

$$\int_0^\infty\left[t^4\Phi+2t^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\right]\cos tx\,dt=0.$$

Не останавливаясь на строгом математическом доказательстве, получаем для $\Psi(y,\ t)$ дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+2t^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+t^4\Phi=0,$$

откуда находим

$$\Phi=A(t)\,e^{ty}+B(t)\,e^{-ty}+C(t)\,y\,e^{ty}+D(t)\,y\,e^{-ty}\ [1]$$

[1] Для всех значений t, исключая $t=0$.

и

$$\varphi=\int_0^\infty [A(t)e^{ty}+B(t)e^{-ty}+C(t)ye^{+ty}+D(t)ye^{-ty}]\cos tx\,dt \tag{4}$$

где A, B, C, D — неизвестные пока функции от t.

Найдем выражения для напряжений, причем нам опять придется дифференцировать интеграл (4) по x и по y, как по параметрам

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\int_0^\infty [(At+2C)e^{ty}+(Bt-2D)e^{-ty}+Ctye^{ty}+Dtye^{-ty}]\,t\cos tx\,dt\\ Y_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\int_0^\infty [Ae^{ty}+Be^{-ty}Cye^{ty}+Dye^{-ty}]\,t^2\cos tx\,dt\\ X_y&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\int_0^\infty [(At+C)e^{ty}+(-Bt+D)e^{-ty}+\\ &\qquad\qquad+Ctye^{ty}-Dtye^{-ty}]\,t\sin tx\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как все напряжения в бесконечности должны обращаться в нуль надо положить

$$A=C=0.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\int_0^\infty [Bt^2+Dt(ty-2)]\,e^{-ty}\cos tx\,dt\\ Y_y&=\int_0^\infty -[B+Dy]\,e^{-ty}t^2\cos tx\,dt\\ X_y&=\int_0^\infty [-Bt^2+Dt(1-ty)]\,e^{-ty}\sin tx\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Применение контурных условий дает нам уравнения для определения B и D:

$$Bt^2=\frac{2}{\pi}\Psi(t);\qquad -Bt+D=0,$$

откуда

$$B=\frac{2\Psi(t)}{\pi t^2}\quad\text{и}\quad D=\frac{2\Psi(t)}{\pi t}.$$

И мы получим следующие выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)e^{-ty}(ty-1)\cos tx\,dt\\ Y_y&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)e^{-ty}(ty+1)\cos tx\,dt\\ X_y&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)e^{-ty}ty\sin tx\,dt\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Совершенно аналогично получим распределение напряжений для случая нормальной нагрузки, как нечетной функции от x.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)\sin tx\,dt$$

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)(ty-1)e^{-ty}\sin tx\,dt\\
Y_y&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)(ty+1)e^{-ty}\sin tx\,dt\\
X_y&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)\,ty\,e^{-ty}\cos tx\,dt\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Рассмотрим в качестве примера распределение напряжений для того случая, когда нагрузка четная и постоянна на некотором интервале длиной 2ε. Располагая оси координат как показано на чертеже 5, имеем:

$$\Psi(t)=\int_0^\infty f(z)\cos tz\,dz=\int_0^\varepsilon q\cos tz\,dz=q\frac{\sin t\varepsilon}{t}\,.$$

Подставляя значение $\Psi(t)$ в формулы (6), получим

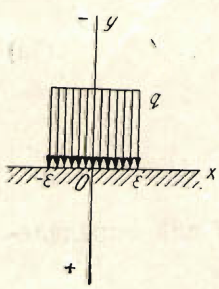

Рис. 5.

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t\varepsilon}{t}(ty-1)e^{-ty}\cos tx\,dt\\
Y_y&=-\frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t\varepsilon}{t}(ty+1)e^{-ty}\cos tx\,dt\\
X_y&=-\frac{2qy}{\pi}\int_0^\infty \sin t\varepsilon\cdot e^{-ty}\sin tx\,dt.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

От этих формул нетрудно перейти к случаю сосредоточенной силы. Положим, что равнодействующая сплошной нагрузки всегда остается равной силе P, а величина ε стремится к нулю. Тогда

$$q\cdot 2\varepsilon=P,\qquad q=\frac{P}{2\varepsilon},\qquad \lim\frac{\sin t\varepsilon}{t\varepsilon}=1$$

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{P}{\pi}\int_0^\infty (ty-1)e^{-ty}\cos tx\,dt\\
Y_y&=-\frac{P}{\pi}\int_0^\infty (ty+1)e^{-ty}\cos tx\,dt\\
X_y&=-\frac{Py}{\pi}\int_0^\infty t\,e^{-ty}\sin tx\,dt
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Выполняя интегрирование, мы получим

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ Y_y &= -\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ X_y &= -\frac{2P}{\pi}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

что совершенно совпадает с результатами, полученными обычным способом $\left(\text{при указанном расположении координат } \widehat{rr} = -\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right)$.

Но и для случая конечного отрезка 2ε интегралы в формуле (8) нетрудно вычислить. В формуле (8) мы имеем интегралы типов

$$\int_0^\infty e^{-ty}\sin t\varepsilon\cos tx\,dt;\qquad \int_0^\infty e^{-ty}\sin t\varepsilon\sin tx\,dt,\qquad \int_0^\infty e^{-ty}\frac{\sin t\varepsilon}{t}\cos tx\,dt.$$

Производя замену

$$\sin t\varepsilon\cos tx = \frac{1}{2}[\sin(x+\varepsilon)t - \sin(x-\varepsilon)t]$$

$$\sin t\varepsilon\sin tx = \frac{1}{2}\cos(x+\varepsilon)t - \cos(x-\varepsilon)t]$$

указанные интегралы мы приведем к интегралам типа

$$\int_0^\infty e^{-ty}\sin\alpha t\,dt;\qquad \int_0^\infty e^{-ty}\cos\alpha t\,dt,\qquad \int_0^\infty e^{-ty}\frac{\sin\beta t}{t}\,dt.$$

Значения этих интегралов:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-ty}\sin\alpha t\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2} \\ &\int_0^\infty e^{-ty}\cos\alpha t\,dt = \frac{y}{\alpha^2+y^2} \\ &\int_0^\infty e^{-ty}\frac{\sin\beta t}{t}\,dt = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{y}. \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

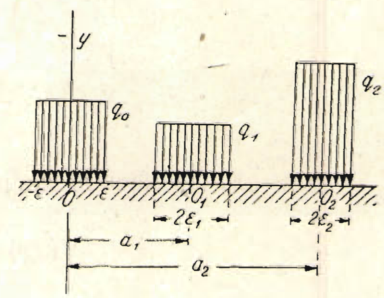

Рис. 6.

Формулы (8) примут вид

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{q}{\pi}\left\{y\left[\frac{x+\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2+y^2} - \frac{x-\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right] - \operatorname{arc\,tg}\frac{x+\varepsilon}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\varepsilon}{y}\right\} \\ Y_y &= -\frac{q}{\pi}\left\{y\left[\frac{x+\varepsilon}{(x+\varepsilon)^2+y^2} - \frac{x-\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right] + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+\varepsilon}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\varepsilon}{y}\right\} \\ X_y &= -\frac{qy^2}{\pi}\left[\frac{1}{(x+\varepsilon)^2+y^2} - \frac{1}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эти формулы могут быть, разумеется, выведены и из формул (3), по которым $f(\theta)=q$. Случай действия нескольких нагрузок $q_0, q_1 \ldots q_n$, распределенных равномерно на конечных участках, приводит к вычислению интегралов тех же типов.

В самом деле, обозначая длины участков через $2\varepsilon_0, 2\varepsilon_1 \ldots 2\varepsilon_n$ имеем (см. рис. 6) для случая четной функции — симметричной нагрузки:

$$\Psi(t)=\int_0^\infty \cos tz\cdot f(z)\,dz=\int_0^{\varepsilon_0} q_0\cos tzdz+\int_{a_1-\varepsilon_1}^{a_1+\varepsilon_1} q_1\cos tzdz+\ldots+$$

$$+\int_{a_n+\varepsilon_n}^{a_n+\varepsilon_n} q_n\cos tzdz=q_0\frac{\sin t\varepsilon_0}{t}+\sum_{k=1}^{n} q_k\frac{\sin(a_k+\varepsilon_k)t-\sin(a_k-\varepsilon_k)t}{t},$$

а для нечетной функции

$$\chi(t)=\int_0^\infty f(z)\sin tzdz=\int_0^{\varepsilon_0} q_0\sin tzdz+\int_{a_1-\varepsilon_1}^{a_1+\varepsilon_1} q_1\sin tzdz+\ldots+$$

$$+\int_{a_n-\varepsilon_n}^{a_n+\varepsilon_n} q_n\sin tzdz=q_0\frac{1-\cos t\varepsilon_0}{t}+\sum_{k=1}^{n} q_k\frac{\cos(a_k-\varepsilon_k)t-\cos(a_k+\varepsilon_k)t}{t}.$$

Точно так же можно вывести формулы для случая касательной нагрузки, выражающейся в виде функций (IIa) или (IIIa).

Для случая нечетной нагрузки имеем условия:

$$(X_y)_{y=0}=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)\sin txdt. \qquad (Y_y)_{y=0}=0.$$

Пользуясь формулами (5а) и определяя функции $B(t)$ и $D(t)$ из этих условий, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)(ty-2)e^{-ty}\cos txdt\\
Y_y&=\frac{2y}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)te^{-ty}\cos txdt\\
X_y&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi(t)(1-ty)e^{-ty}\sin txdt
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Для случая четной нагрузки придется функцию Airy брать в виде

$$\varphi(xy)=\int_0^\infty \Phi(y,t)\sin txdt.$$

Удовлетворяя условиям на бесконечности и условиям на границе:

$$(X_y)_{y=0}=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)\cos txdt, \quad (Y_y)_{y=0}=0$$

получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)(ty-2)e^{-ty}\sin txdt\\
Y_y&=-\frac{2y}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)\cdot te^{-ty}\sin txdt\\
X_y&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t)(1-ty)e^{-ty}\cos txdt
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

При помощи вышеуказанных приемов можно найти напряжения в полосе, ограниченной в одном направлении, под влиянием усилий, приложенных к граням. Полагая, что эти усилия нормальны и являются четными функциями от x, которые могут быть представлены в виде интегралов

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi_1(t)\cos txdt$$

и

$$f_2(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi_2(t)\cos txdt$$

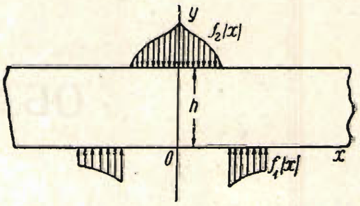

Рис. 7.

мы можем найти решение в форме определенных интегралов, пользуясь выражениями (5) и определяя функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ из условий

$$(Y_y)_{y=0} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi_1(t)\cos txdt, \quad (X_y)_{y=0} = 0$$

$$(Y_y)_{y=+h} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi_2(t)\cos txdt, \quad (X_y)_{y=+h} = 0$$

где h — высота полосы (см. черт. 7). Однако решение в этой форме настолько сложно, что является более рациональным пользоваться решением Bleich'a, выведенным им для полосы конечных размеров, в виде рядов Фурье. [1]

Ленинград, январь 1933 г.

ÜBER DAS PROBLEM DER ELASTISCHEN HALBEBENE BEI AM RANDE VORGESCHRIEBENEN BELASTUNGEN

von *S. G. Lechnitzky* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Es wird eine Lösung des Problems der elastischen Halbebene für den Fall von Belastungen, die am Rande vorgeschrieben sind, gegeben. Die vom Verfasser benutzte Methode beruht auf der Darstellung der vorgeschriebenen Belastungen durch Fourier-Integrale. Ausführlich werden die am Rande angreifende Einzelkraft und die auf einer endlichen Strecke gleichmässig verteilte Belastung behandelt.

[1] Bleich. Der gerade Stab mit recht. Querschnitt als ebenes Problem. Der Bauingenieur, 1923, Heft 9, стр. 255.