

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГИМИ КРУГОВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ И ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

П. А. Соколов (Ленинград)

### Введение

В специальной литературе проблема устойчивости круговых цилиндрических оболочек представлена главным образом работами С. П. Тимошенко, R. Logan'sa, Southwell'a и Mises'a. Не приводя здесь ссылок на труды, достаточно указать статью Sanden'a и Tëlke в журнале *Ingenieur Archiv* 1932 г., где имеется перечень и краткий обзор ряда работ по устойчивости круговых оболочек. Однако, указанный в заглавии вопрос в специальной литературе еще не рассматривался. Между тем, при расчетах различного рода цилиндрических оболочек всегда приходится встречаться с вопросом о том — каково влияние упругих ребер на критическую нагрузку всей конструкции. Настоящая работа является попыткой подойти к определению жесткости упругих ребер, при которой пластинка, несущая продольное и нормальное поперечное давление, будет иметь заданную критическую нагрузку.<sup>1</sup>

Задача об устойчивости плоской пластины, сжимаемой вдоль или поперек подкрепляющих ее ребер, была решена для некоторых простых случаев С. П. Тимошенко (1914 г. Изв. Киев. Пол. инст.) Дальнейшее развитие этого решения имеется в работе проф. Папковича, напечатанной в Трудах НИСС'а в 1932 г. В этом же выпуске Трудов НИСС'а автором настоящей работы был рассмотрен случай пластин с цилиндрической круговой кривизной, поддерживаемой круговыми упругими ребрами и несущей лишь одну продольную нагрузку. Целью работы был главным образом расчет палубного настила судов. В отношении влияния на критическую нагрузку, там учитывался лишь изгиб ребер, т. е. предполагалось, что оболочка может при деформации скользить по ребрам, не вызывая в них продольных удлинений. В настоящей работе это предположение отсутствует, но повидимому влияние растяжения и сжатия ребер на нагрузку, для практически интересных случаев, мало. Для прямоугольных пластин с малой цилиндрической кривизной это влияние во всяком случае ничтожно.

В упомянутых выше трудах по исследованию устойчивости цилиндрических оболочек, исходили обыкновенно из уравнений равновесия деформированной оболочки. В данной работе принят метод, представляющий собой комбинацию начала виртуальных перемещений и виртуальных изменений напряжений, основанный на изучении потенциальной энергии упругой системы. Как частное приложение этого метода в работе получена уже известная формула для критического равностороннего давления

<sup>1</sup> Тема работы была выдвинута Научно-исследовательским институтом судостроения, где работа и производилась.

в случае, когда подкрепляющие оболочку упругие ребра отсутствуют, найденная Мисес'ом другим способом. В § 3 даны для деформаций срединной поверхности цилиндрической оболочки точные формулы, учитывающие малые 2-го порядка, т. е. произведение перемещений и их производных. В конце работы дано соотношение, позволяющее отыскать ту жесткость (а также и площадь поперечного сечения) ребер, при которой оболочка будет иметь наперед заданную (в известных пределах) критическую нагрузку. Соотношение, взятое в общем виде, требует, однако, для своих приложений довольно значительных численных подсчетов. При том методе подхода к задаче, какой был принят, повидимому, вообще нельзя указать какого-нибудь другого более простого приема вычислений, чем данный в работе. Возможны лишь упрощения при переходе к числовым подсчетам и при выборе наиболее употребительных размеров конструкций. Краткость отведенного времени не позволяла иллюстрировать работу достаточным количеством численных примеров, так как вопрос оказался гораздо более сложным, чем это предполагалось вначале. Так как изложение всех вычислений, которые оказалось нужным сделать, потребовало бы слишком много места, в статье приведены только наиболее существенные из них с целью сделать изложение кратким.

### § 1. Постановка задачи

Предположим, что оболочка подкреплена рядом кольцевых ребер, расположенных в равных расстояниях друг от друга. Часть ребер мы примем абсолютно жесткими, а остальные упругими с конечной величиной жесткости. Расстояния жестких ребер друг от друга мы возьмем также одинаковым, поместив между каждыми двумя из них одно и то же количество упругих ребер. Предположим, наконец, что оболочка испытывает продольную нагрузку (параллельную оси цилиндра) и равномерно распределенное нормальное давление.

Введем обозначения:

- $r$  — радиус оболочки,
- $2h$  — толщина ее,
- $a$  — расстояние между абсолютно-жесткими ребрами,
- $k-1$  — число упругих ребер между 2 жесткими,
- $EI$  — жесткость упругого ребра,
- $S$  — площадь его поперечного сечения,
- $p$  — продольная сила, отнесенная к единице длины кругового сечения,
- $q$  — равномерно распределенная нормальная нагрузка,
- $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}$  цилиндрич. жесткость оболочки.

Пока внешние силы не превзойдут некоторых критических значений, точки цилиндра и ребер получают лишь перемещения, симметричные относительно оси, но переменные в продольном направлении. Ребра будут испытывать при этом некоторые напряжения. Мы, однако, при исследовании устойчивости не будем учитывать переменности перемещений, а примем прогиб, соответствующий критическому значению внешних сил, постоянным для всей оболочки. Физически это предположение можно осуществить определенным видом нагрузки. В самом деле, критическое нормальное давление можно считать состоящим из постоянного давления  $q$ , распределенного по оболочке, и  $q'$  — действующего на каждое упругое ребро. Соотношение между  $q$  и  $q'$  должно быть выбрано так, чтобы радиус оболочки, сжимаемой отдельно от ребер давлением  $q$  и продольной на-

грузкой  $p$ , получился бы равным радиусу упругих ребер при действии на них нагрузки  $q'$ . Что же касается жестких ребер, то нужно предположить, что они в ненапряженном состоянии имеют как раз этот самый радиус и, следовательно, могут быть вставлены в цилиндр после приложения нагрузок  $q, q', p$ . Жесткие ребра останутся тогда без напряжений, что для изучения устойчивости неважно, раз эти ребра не могут участвовать в общей деформации при потере устойчивости. Если считать, что и упругие ребра в ненапряженном состоянии имеют такой же радиус, что и жесткие ребра, то критическая нагрузка будет, очевидно, больше. Однако, повидимому, для тех размеров оболочки, которые обычно в судостроении встречаются, „критическая жесткость“ ребер, обеспечивающая оболочке наибольшую возможную критическую нагрузку, практически будет в обоих упомянутых случаях одна и та же.

Практически наиболее интересно то соотношение между  $p$  и  $q$ , какое будет у цилиндра, закрытого днищами по концам и сжимаемого одинаковым давлением со всех сторон. Поэтому в дальнейшем возьмем  $2p = qr$ .

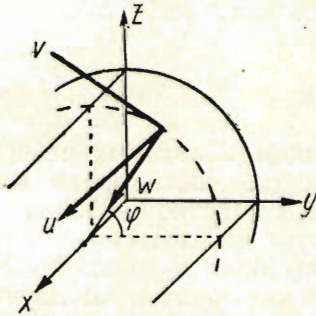


Рис. 1.

Наша цель связать жесткость ребер  $EI$  и критическое давление  $q$  некоторой зависимостью. Эту задачу можно решать в двух предположениях: 1) упругие ребра скреплены с оболочкой и, следовательно, точки их „нейтральных“ осей смещаются также как и сама оболочка (мы считаем нейтральные оси расположенными в срединной поверхности оболочки), и 2) оболочка лишь опирается на ребра и, деформируясь, может по ним скользить, не вызывая в них никаких продольных удлинений. В последнем случае ребра будут работать лишь на изгиб и критическая нагрузка  $q$  будет несколько меньше. Однако, для практически наи-

более интересных случаев очень тонких цилиндрических оболочек с часто расставленными ребрами, это различие, повидимому, должно быть незначительно, в особенности, если  $q$  — наибольшая возможная для конструкции нагрузка.

Мы рассмотрим более близкий к действительности первый случай, применив для этого способ, основанный на изучении потенциальной энергии упругой системы и работы внешних сил. Второй случай может быть легко получен из первого.

Положение точки срединной поверхности цилиндра мы будем определять двумя координатами  $x$  и  $\varphi$  (рис. 1), а ее перемещения в направлениях, указанных на чертеже, — тремя функциями  $x$  и  $\varphi$  —  $u, v, w$ .

Тогда считая  $u, v, w$  малыми, можно по Love<sup>1</sup> для деформаций срединной поверхности, т. е. для растяжений  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и сдвига  $\omega$ , написать с точностью до малых 1-го порядка ( $u, v, w$ ) такие выражения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right), \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

<sup>1</sup> A. E. H. Love. Mathematical theory of elasticity, Cambridge, 1927 г.

Изменения кривизны  $k_1$ ,  $k_2$  и кручение  $\tau$  будут представляться формулами

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ k_2 &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ \tau &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} + \bar{v} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее, усилия срединной поверхности (нормальные  $T_1$  и  $T_2$  и скалы-вающее  $S_1 = -S_2$ ) будут

$$T_1 = \frac{2 Eh}{1 - \sigma^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{2 Eh}{1 - \sigma^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1), \quad S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1 + \sigma} \omega, \quad (3)$$

а изгибающие и скручивающие моменты будут

$$G_1 = -D(k_1 + \sigma k_2), \quad G_2 = -D(k_2 + \sigma k_1), \quad H_1 = -H_2 = D(1 - \sigma)\tau. \quad (4)$$

Нас интересуют перемещения, происходящие непосредственно после потери устойчивости. Мы поэтому будем считать  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  состоящими из двух частей: из конечных перемещений  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , отвечающих критическим значениям внешних сил, и из бесконечно-малых перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , которые точки оболочки получают после потери устойчивости. Первые в случае нормального равномерного давления и постоянной продольной нагрузки могут быть представлены в форме

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a_0 x \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= c_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $a_0$  и  $c_0$  постоянные (малые по сравнению с радиусом цилиндра). При таких перемещениях цилиндр сохранит круговую форму сечения.

Нашу оболочку можно представить в виде бесконечно длинного цилиндра, опертого в равных расстояниях на жесткие ребра и подкрепленного между ними упругими шпангоутами. Соответственно этому, перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  должны быть по отношению к переменным  $x$  и  $\varphi$  периодическими функциями. Образующая цилиндра, после потери устойчивости, получит вид волнистой линии с нулевыми прогибами на жестких ребрах. Частный случай, когда упругие ребра отсутствуют, сводится к вполне изученному случаю потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки конечной длины, свободно опертой по концевым сечениям, закрытой днищами и сжимаемой всесторонней равномерной нагрузкой. Образующая цилиндра примет здесь вид синусоиды с полупериодом, равным длине цилиндра. В направлении окружности сечения погиб  $w$  также получится синусоидальный с определенным числом волн по окружности. Перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будут вида

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sin n\varphi \cdot \cos \frac{\pi x}{a}, \\ v &= B \cos n\varphi \cdot \sin \frac{\pi x}{a}, \\ w &= C \sin n\varphi \cdot \sin \frac{\pi x}{a}, \end{aligned} \right\}$$

где  $a$  — длина цилиндра,  $n$  целое число, а три постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , могут быть выражены через одну. Определение числа волн по окружности, а также величины критической нагрузки, сводится здесь к очень несложным вычислениям (см. статью Sande'n'a и Těl'ke в журнале *Ingenieur-Archiv* 1932 г.).

Случай  $n=1$  соответствует Эйлерову изгибу, когда поперечное сечение цилиндра, не изменяя круговой формы, перемещается поперек оси, а  $n=0$  — симметричной относительно оси деформации. В интересующем нас случае очень тонкостенных оболочек конечной длины эти оба случая практически не имеют значения, так как критическая нагрузка здесь будет больше, чем при  $n > 1$ .

В нашем случае можно перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представить в виде двойных рядов Фурье:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\varphi \cos \frac{m\pi x}{a} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{a} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  — некоторые постоянные. При таком выборе перемещений прогиб  $w$  на жестких ребрах будет нуль. Изгибающий момент  $G$ , как это легко видеть из формул (4) и (6), будет на жестких ребрах также нуль. Постоянными  $a_0$  и  $c_0$  можно распорядиться так, чтобы  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  отвечали бы критическому значению внешних сил. Для этого надо в формулах (3) положить

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + u, \\ \bar{v} &= v_0 + v, \\ \bar{w} &= w_0 + w, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = a_0, \quad \varepsilon_2 = -\frac{c_0}{r}, \quad T_1 = -p, \quad T_2 = -qr,$$

тогда

$$\frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left( a_0 - \frac{\sigma c_0}{r} \right) = -p, \quad \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left( -\frac{c_0}{r} + \sigma a_0 \right) = -qr \quad (7)$$

и

$$a_0 = -\frac{p - \sigma qr}{2Eh}, \quad c_0 = \frac{qr - \sigma p}{2Eh} r. \quad (8)$$

В случае равномерного давления

$$\begin{aligned} 2p &= qr, \\ a_0 &= -qr \frac{1-\sigma}{2Eh}, \quad c_0 = qr \frac{1-\sigma}{2Eh}. \end{aligned} \quad (8')$$

Для линейной нагрузки  $q'$ , распределенной по ребру, можно написать

$$\frac{c_0}{r} = \frac{q'r}{ES}, \quad q' = \frac{c_0}{r^2} ES. \quad (9)$$

## § 2. Метод

Способ определения критической нагрузки будет заключаться в применении начала виртуальных перемещений. Для этого потенциальную энергию всей конструкции, определяемую перемещениями  $u(x, \varphi)$ ,  $v(x, \varphi)$ ,  $w(x, \varphi)$ , нужно будет выразить через бесконечное множество параметров  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ . То же необходимо будет сделать и с работой внешних сил.

которую они совершат на перемещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Обозначим силовую функцию всех сил, и внутренних и внешних, через  $U$ . Тогда по началу возможных работ  $U$ , как функция  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ , должна при критических значениях  $p$  и  $q$  иметь минимум; отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial B_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_{mn}} = 0 \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad (10)$$

Критическая нагрузка и жесткость ребер должны быть такими, чтобы система (10) имела решения, отличные от нуля. Из этого условия и должна быть определена искомая связь между  $EI$  и  $p_{\text{крит}}$ .

### § 3. Вычисление потенциальной энергии оболочки

Обозначим через  $W$  потенциальную энергию части конструкции, заключенной между сечениями  $x = a$  и  $x = -a$ , и представим  $W$  в виде суммы 2-х частей:

$$W = V + V',$$

где  $V$  относится к самой оболочке, а  $V'$  к упругим ребрам. Положим кроме того

$$V = V_1 + V_2, \quad V' = V'_1 + V'_2,$$

где  $V_1$  — потенциальная энергия, соответствующая срединным напряжениям в оболочке,  $V_2$  — изгибу ее,  $V'_1$  — растяжению и сжатию упругих ребер и  $V'_2$  — изгибу ребер. Тогда (Love):

$$V_1 = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \int_{-a}^{+a} \int_{-\pi}^{+\pi} [(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\sigma) \left( \epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{1}{4} \omega^2 \right)] r d\varphi dx \quad (11)$$

$$V_2 = \frac{D}{2} \int_{-a}^{+a} \int_{-\pi}^{+\pi} [(k_1 + k_2)^2 - 2(1-\sigma)(k_1 k_2 - \tau^2)] r d\varphi dx \quad (12)$$

Из этих двух формул можно получить и потенциальную энергию каждого упругого ребра. Раз мы считаем, что точки нейтральных осей ребра имеют те же перемещения, что и оболочка, то удлинение ребра по оси будет  $\epsilon_2$ , а изменение кривизны,  $k_2$ . Поэтому для  $i$ -го по счету ребра (считая от сечени  $x = a$ ) потенциальная энергия растяжения будет

$$V_{1i} = \frac{ES}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \epsilon_2^2 \Big|_{x=\frac{ai}{k}} r d\varphi, \quad (13)$$

а изгиба

$$V_{2i} = \frac{EI}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} k_2^2 \Big|_{x=\frac{ai}{k}} r d\varphi. \quad (14)$$

Так как в промежутке между двумя соседними жесткими ребрами лежит  $k-1$  упругих, а таких промежутков два, то

$$V'_1 = 2 \sum_{i=1}^{k-1} V_{1i}, \quad V'_2 = 2 \sum_{i=1}^{k-1} V_{2i}.$$

Что касается работы внешних сил, то она будет состоять только из работы  $V_q$  давления  $q$  и  $V'_q$  — линейной нагрузки по ребру. Продольная нагрузка  $p$  не даст никакой работы, так как перемещения (6) выбраны

так, что после выпучивания стенок цилиндра его сечения  $x = a$  и  $x = -a$  не будет сближаться между собою.

Потенциальная энергия всех сил будет при наших обозначениях

$$U = V + V' - V_q - V'_q.$$

Для вычисления потенциальной энергии оболочки подставим перемещения (6) в деформации (1) и (2), положив

$$\frac{m\pi}{a} = \alpha_m.$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \alpha_m \sin n\varphi \cdot \sin \alpha_m x, \\ \epsilon_2 &= -\frac{c_0}{r} - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (B_{mn} n + C_{mn}) \sin n\varphi \sin \alpha_m x, \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( B_{mn} \alpha_m + \frac{1}{r} A_{mn} n \right) \cos n\varphi \cos \alpha_m x, \\ k_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \alpha_m^2 \sin n\varphi \sin \alpha_m x, \\ k_2 &= - \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{mn} n^2 + B_{mn} n) \sin n\varphi \sin \alpha_m x, \\ \tau &= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{mn} n \alpha_m + B_{mn} \alpha_m) \cos n\varphi \cos \alpha_m x. \end{aligned} \right\} (16)$$

Подставляя это в (12) и опуская для простоты значки  $m$  и  $n$  у  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  и  $\alpha_m$ , находим:

$$V_2 = \frac{D}{2} r \pi a \sum \sum \left[ C^2 \alpha^2 + \frac{1}{r^2} (Cn^2 + Bn)^2 + 2\sigma (Cn^2 + Ba) C \alpha^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) (Cn \alpha + B \alpha)^2 \right]. \quad (17)$$

Прежде чем вычислять  $V_1$ , заметим следующее. Формулы для деформаций (1) и (2) верны лишь с точностью до малых величин порядка  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Если учесть в формуле (2) также и малые второго порядка, т. е. произведение перемещений и их производных, то это отразится в выражении  $V_2$  в виде новых членов, содержащих  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , в степенях выше второй. Новые члены могут быть поэтому отброшены. Не то будет при вычислении  $V_1$ . Если не учитывать в (1) малых второго порядка, то после подстановки формул (1) в (11), получится для  $V_1$  такое выражение:

$$V_{11} = V_{11}^0 + \frac{Eh}{1 - \sigma^2} r \pi a \sum \sum \left[ A^2 \alpha^2 + \frac{1}{r^2} (Bn + C)^2 + \frac{2\sigma}{r} (Bn + C) A \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1 - \sigma}{2} \left( B \alpha + \frac{n}{r} A \right)^2 \right], \quad (18)$$

где  $V_{11}^0$  не зависит от  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Если теперь добавить в (1) члены 2-го порядка малости и подставить их в  $V_1$ , то благодаря присутствию в фор-

мулах (15) в  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  постоянных членов  $a_0$  и  $\frac{c_0}{r}$ , часть новых членов, которые появятся в выражении  $V_1$ , будут содержать  $A, B, C$  во второй степени, и поэтому отброшены быть не могут. Эти члены войдут при возведении двойной суммы в квадрат в интеграл (11) как удвоенные произведения постоянных членов  $a_0$  и  $\frac{c_0}{r}$  на члены 2-го порядка малости.

Таким образом для вычисления  $V_1$  надо  $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega$  выразить через перемещения  $u, v, w$ , учитывая при этом малые второго порядка. То же относится и к величине  $V_1'$ : величину  $V_2'$  можно вычислить по приближенной формуле (2), а для  $V_1'$  необходимо учитывать и высшего порядка малости величины, так как в  $\epsilon_2$  входит постоянный член  $\frac{c_0}{r}$ . Вычисляя таким образом потенциальную энергию  $V_1$  срединных напряжений, мы считаем, что сечения цилиндра  $x = a$  и  $x = -a$  не сближаются при потере устойчивости. Если бы мы для  $V_1$  взяли формулы (1), то при составлении силовой функции  $U$  мы должны были бы учесть работу продольной нагрузки  $p$  на некотором сближении сечений цилиндра  $x = a, x = -a$ . Величина сближений была бы 2-го порядка малости по сравнению с  $u, v, w$ . Обычно в простых случаях так и поступают при решении задач подобных нашей. Например,

определяя критическую Эйлерову нагрузку продольно сжатого стержня, вычисляют сближение концов стержня, которое будет 2-го порядка малости по сравнению с прогибом, а из потенциальной энергии вычитают работу продольных сил на этом сближении и получают таким образом силовую функцию  $U$ . Если считать концы стержня не сближающимися и вычислить

потенциальную энергию по точным формулам, то получится тот же самый результат для силовой функции. Последний способ определения силовой функции  $U$  гораздо более прост, чем обычный путь вычисления работы внешних сил, так как в сравнительно трудных случаях непосредственно найти работу внешних сил из одних геометрических соображений бывает затруднительно. Указанный способ требует однако вывода точных формул для деформаций.

Для этого возьмем сечение цилиндра в точке  $O$  с координатами  $x$  и  $\varphi$  (рис. 2) и проведем в ней оси  $X, Y, Z$  по направлению перемещений  $u, v, w$ . Отметив на оси  $x$  в расстоянии  $dx$  точку  $A$  и на окружности сечения точку  $B$  с центральным углом  $\varphi + d\varphi$ , мы вычислим приращение координат вершин треугольника  $OAB$  после того, как они получают перемещения. При этом малые второго порядка мы отбрасывать не будем. Пусть новое положение  $\triangle OAB$  будет  $O_1A_1B_1$ . Как видно из рис. 3, приращение координат точки  $O$  (т. е. координаты  $O$ ) будут:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 x + u \\ y_0 &= (r - c_0 - w) \sin \frac{v}{r} = (r - c_0 - w) \frac{v}{r} \\ z_0 &= r - (r - c_0 - w) \cos \frac{v}{r} = r - (r - c_0 - w) \left( 1 - \frac{v^2}{2r^2} \right). \end{aligned}$$

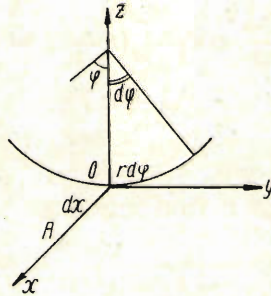


Рис. 2.

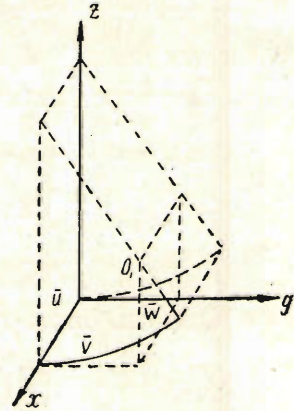


Рис. 3.



Малые третьего и высшего порядка мы здесь отбрасываем. Таким образом мы найдем координаты точек  $A, B$  и  $A_1, B_1$ .

$$\begin{aligned}x_A &= dx, & x_{A_1} &= a_0 x + u + \left(1 + a_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \\ \varphi_A &= 0, & \varphi_{A_1} &= (r - c_0 - w) \frac{v}{r} + \left[(r - c_0 - w) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial x}\right] dx, \\ z_A &= 0, & z_{A_1} &= (c_0 + w) \left(1 - \frac{v^2}{r^2}\right) + \left[\frac{\partial w}{\partial x} + (r - c_0) \frac{1}{r^2} V \frac{\partial v}{\partial x}\right] dx, \\ x_B &= 0, & x_{B_1} &= a_0 x + u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi, \\ y_B &= rd\varphi, & \varphi_{B_1} &= (r - c_0 - w) \frac{v}{r} + \left[(r - c_0 - w) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) - (r - c_0) \frac{v^2}{2r^2} - \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] dx, \\ z_B &= 0, & z_{B_1} &= (c_0 + w) \left(1 - \frac{v^2}{2r^2}\right) + \left[(r - c_0) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \frac{v}{r} - \frac{wv}{r} + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] d\varphi.\end{aligned}$$

В этих формулах члены вида  $\frac{c_0}{r} v \frac{\partial v}{\partial \varphi}$  или  $a_0 v^2$ , представляющие собой произведения постоянных  $\frac{c_0}{r}$  или  $a_0$  на малые 2-го порядка, можно отбросить, так как  $\frac{c_0}{r}$  и  $a_0$  — малые отвлеченного числа. Оставив малые нужного нам порядка, мы для квадрата стороны  $O_1 A_1 = ds_1$  будем иметь:

$$\begin{aligned}ds_1^2 &= \left(1 + a_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left[(r - c_0 - w) \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 \frac{dx^2}{r^2} + \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. (r - c_0) \frac{1}{r^2} v \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 dx^2 = dx^2 \left[ (1 + a_0)^2 + 2(1 + a_0) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{(r - c_0)^2}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Отсюда, опять-таки с точностью до членов 2-го порядка малости,

$$\begin{aligned}ds_1 &= dx (1 + a_0) \left[ 1 + \frac{1}{2(1 + a_0)^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{(r - c_0)^2}{2(1 + a_0)^2 r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{1 + a_0} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \\ &= dx \left[ 1 + a_0 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Таким же образом найдем квадрат длины  $O_1 B_1 = ds_2$

$$\begin{aligned}ds_2^2 &= d\varphi^2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + (r - c_0)^2 + \left(\frac{r - c_0}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 + w^2 + \frac{2(r - c_0)^2}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - 2(r - c_0) w - \right. \\ &\left. - 4 \frac{r - c_0}{r} w \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}ds_2 &= d\varphi (r - c_0) \left[ 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{r - c_0} + \frac{1}{2(r - c_0)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2(r - c_0)^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{2(r - c_0)^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{2(r - c_0)} w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] = \\ &= rd\varphi \left[ 1 + \frac{c_0 + w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 - 2 \frac{c_0 + w}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \right].\end{aligned}$$

Остается составить отношение

$$\frac{ds_1 - OA}{OA} = \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \frac{ds_2 - OB}{OB} = \varepsilon_2.$$

Получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= a_0 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_2 &= - \frac{c_0 + w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 - 2(c_0 + w) \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] =\end{aligned}$$

$$= -\frac{\bar{w}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} \right)^2 - 2\bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right].$$

Для того чтобы получить сдвиг  $\omega$ , мы можем поступить так. Зная координаты вершин  $\triangle O_1A_1B_1$ , мы вычислим тем же путем, как это только что делалось, квадрат стороны  $A_1B_1$  и, зная уже стороны  $O_1B_1$  и  $O_1A_1$ , применим формулу:

$$(A_1B_1)^2 = (O_1B_1)^2 + (O_1A_1)^2 + 2(O_1A_1)(O_1B_1) \cos(O_1A_1O_1B) = ds_1^2 + ds_2^2 + 2ds_1ds_2\omega.$$

Отбрасывая здесь малые выше второго порядка, мы легко найдем  $\omega$ .

Таким образом для деформаций срединной поверхности цилиндрической оболочки будут иметь место следующие общие формулы [вместо формул (1)]:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_2 &= -\frac{\bar{w}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} \right)^2 - 2\bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right], \\ \omega &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (19)$$

При вычислении  $V_1$  для  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  надо взять точные формулы (19). Для сдвига  $\omega$  можно оставить старую формулу (1), так как в сдвиге  $\omega$  (см. формулу 15) нет постоянного члена, не зависящего от  $A, B, C$ ; другими словами, до момента потери устойчивости сдвиг равен нулю. Если представить  $V_1$  в виде суммы

$$V_1 = V_{11} + V_{12}$$

где  $V_{11}$  есть выражение (18), и подставить  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  в (11), то после некоторых вычислений найдем

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-a}^a \left\{ \left( a_0 - \sigma \frac{c_0}{r} \right) \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right) \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} \right)^2 - 2\bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right] \right\} r d\varphi dx. \end{aligned}$$

Подставив сюда перемещения (6), получим окончательно

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} r \pi a \sum \sum \left[ \left( a_0 - \sigma \frac{c_0}{r} \right) (B^2 + C^2) \alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right) (C^2 n^2 + A^2 n^2 + 2CBn) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

#### § 4. Работа нормального давления

Эта работа  $V_q$  может быть вычислена из следующих соображений.  $V_q$  равно произведению давления  $q$  на приращение объема, которое получит часть цилиндра между сечениями  $x=a$  и  $x=-a$  после перемещений  $u, v, w$ . Для вычисления этого объема можно предположить, что сначала точки оболочки получают перемещения  $u$  и  $v$ . Тогда объем цилиндра не изменится. Величина площади первоначально прямоугольного элемента со сторонами  $dx$  и  $rd\varphi$  (рис. 3) будет:

$$dx d\varphi \left( r + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

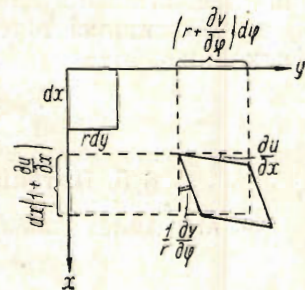


Рис. 4.

Это легко можно получить, если представить цилиндр развернутым на плоскость (рис. 4). Пусть теперь точка цилиндра сместилась во внутреннюю сторону по радиусу на расстоянии  $w$ . Тогда объем, который опишет соответствующий элемент поверхности, равен

$$\left(r + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) r dx d\varphi \int_0^w \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz = \left(r + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \left(w - \frac{w^2}{2r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx d\varphi,$$

а работа будет

$$V_\varphi r d\varphi dx = q \left(r + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \left(w - \frac{w^2}{2r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx d\varphi = q \left[ r w - \frac{w^2}{r} + r w \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] dx d\varphi.$$

Вся работа будет

$$V_q = q \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-a}^a \left[ r w - \frac{w^2}{2} + r w \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] dx d\varphi. \quad (21)$$

В нашем случае

$$r \iint w dx d\varphi = 0,$$

$$V_q = q \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-a}^a \left[ -\frac{w^2}{2} + r w \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] dx d\varphi.$$

Можно и другим путем найти увеличение объема. Например, можно вычислить уменьшение радиуса оболочки в некоторой точке, координаты которой уже после перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будут  $x$  и  $\varphi$ ; нетрудно видеть, что это уменьшение будет

$$w - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{v}{r}.$$

Тогда интеграл

$$\int_{-a}^a dx \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi \int_0^{w - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{v}{r}} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz = \int_{-a}^a dx \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi \left[ r w - \frac{w^2}{2} - r w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right].$$

$w$  дает увеличение объема цилиндра. Интегрируя третий и четвертый члены по частям, легко увидеть, что при наших граничных условиях для перемещений

$$\int_{-a}^a dx \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left( -r w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = - \int_{-a}^a dx \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left( r w \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)$$

и, следовательно, для объема получим то же выражение, что и (21).

Подставляя теперь в (21) перемещения (6), после простых вычислений находим

$$V_q = -q r a \pi \sum \sum \left( \frac{C^2}{2r} + a A C + \frac{n}{r} B C \right). \quad (22)$$

## § 5. Потенциальная энергия ребра и работа нагрузки

Мы имеем для  $i$ -го ребра по формуле (13)

$$V_{1i} = \frac{ES}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon_2^2 \Big|_{x=\frac{ia}{k}} r d\varphi =$$

$$\frac{ES}{2} \int_{-\varphi}^{+\pi} \left[ \frac{c_0}{r^2} + \left( -\frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{c_0}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - 2w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] r d\varphi \right]_{x=\frac{ia}{k}} \quad (23)$$

Здесь  $\epsilon_0^2$  вычислялось по точной формуле (19). Далее, подставив сюда перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (6), найдем

$$V'_{1i} = \frac{ES}{2r} c_0^2 + \frac{ES\pi}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \left[ (C_m + nB_m)(C_m + nB_{m'}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c_0}{r} (n^2 A_m A_{m'} + n^2 C_m C_{m'} - 2nC_m B_{m'}) \right] \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{\pi} i \right\}. \quad (24)$$

При вычислении  $V'_{2i}$  по формуле (14) для  $k_2$ , как уже упоминалось, можно взять формулу (2), учитывающую лишь малые 1-го порядка:

$$V'_{2i} = \frac{EI}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} k_2^2 \Big|_{x=\frac{ia}{k}} r d\varphi = \\ = \frac{ES}{2} \frac{\pi}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} (C_m^2 m n + B_m n)(C_{m'} n^2 + B_{m'} n) \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i \right]. \quad (25)$$

Работу  $V'_{qi}$  нагрузки  $q'$ , распределенной по ребру, легко получить из формулы (21), положив в ней  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ :

$$V'_{qi} = q' \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ -\frac{w^2}{2} + w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right]_{x=i\frac{a}{k}} d\varphi = \\ = V_{q_0} - q' \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} C_m C_{m'} + n B_m B_{m'} \right) \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i \right], \quad (26)$$

где  $V_{q_0}$  не зависит от  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

## § 6. Упрощение силовой функции

Общее выражение для силовой функции  $U$  через коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  может быть значительно упрощено.

Для  $V_1$  — потенциальной энергии растяжения оболочки мы имели

$$V_1 = V_{11} + V_{12} = V_{11}^0 + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \pi r a \sum_m \sum_n \left[ A^2 \alpha^2 + \frac{1}{r^2} (Bn + C)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\sigma}{r} (Bn + C) A \alpha + \frac{1-\sigma}{2} \left( B \alpha + \frac{n}{r} A \right)^2 \right] + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \pi r a \sum_m \sum_n \left[ \left( a_0 - \frac{\sigma c_0}{r} \right) (B^2 + \right. \\ \left. + C^2) \alpha^2 + \frac{1}{r^2} \left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right) (C^2 n^2 + A^2 n^2 + 2CBn) \right].$$

Здесь  $a_0 u \frac{c_0}{r}$  — относительные удлинения цилиндра по оси  $x$  и  $\varphi$  до момента потери устойчивости. Эти числа малы. На этом основании в  $V_1$  можно отбросить некоторые члены. Очевидно, что можно пренебречь во второй сумме ( $V_{12}$ ) членами с  $B^2$ ,  $A^2$  и  $CB$ , так как они содержатся в пер-

вой сумме ( $V_{11}$ ) без малых множителей  $a_0 - \frac{\sigma c_0}{r}$  и  $\sigma a - \frac{c_0}{r}$ . Остальные члены во второй сумме надо оставить, несмотря на то, что они множатся на малые числа, потому что таких членов нет в первой сумме, а коэффициенты  $\alpha^2$  и  $n^2$  могут быть большими числами.

Далее, выражая по формулам (7) давление  $q$  через  $a_0$  и  $\frac{c_0}{r}$ , можно написать:

$$V_q = \frac{Eh}{1-\sigma^2} r \pi a \sum_m \sum_n \left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right) \left( \frac{C^2}{2} + 2\alpha r AC + 2CBn \right) \frac{1}{r^2}.$$

Легко убедиться, что всем этим выражением можно в силовой функции  $U$  пренебречь. В самом деле, все входящие сюда члены встречаются в  $V_{11}$  без малого множителя  $\left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right)$ .

Потенциальная энергия изгиба, согласно формуле (17), будет равна (если подставить туда значение цилиндрической жесткости)

$$V_2 = \frac{Eh}{1-\sigma^2} r \pi a \sum_m \sum_n \frac{h^2}{3r^2} \left[ C^2 r^2 \alpha^4 + \frac{1}{r^2} C^2 n^4 + \frac{2}{r^2} CBn^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} B^2 n^2 + 2\sigma C^2 \alpha^2 n^2 + 2\sigma CBn \alpha^2 + 2(1-\sigma) C^2 n^2 \alpha^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) B^2 \alpha^2 + n(1-\sigma) CBn \alpha^2 \right].$$

Как видно, и здесь все члены в сумме множатся на малое число  $\frac{1}{3} \left( \frac{h}{r} \right)^2$ , а перед суммой стоит такой же множитель  $\frac{Eh}{1-\sigma^2} r \pi a$ , как и в  $V_1$ . Поэтому члены  $B^2 \frac{n^2}{r^2}$  и  $2(1-\sigma) B^2 \alpha^2$  можно отбросить, ибо они опять-таки входят в выражение  $V_1$  без малого множителя  $\frac{1}{3} \left( \frac{h}{r} \right)^2$ . Более того, все члены кроме  $C^2 \alpha^4 r^2$ ,  $2\sigma C^2 \alpha^2 n^2$  и  $2(1-\sigma) C^2 n^2 \alpha^2$  (т. е. члены вида  $CBn^3$  и  $CBn \alpha^3$ ) тоже можно выбросить. Действительно, если  $\alpha$  и  $n$  не принимают больших значений, то для тонких оболочек (т. е. при малых  $\left( \frac{h}{r} \right)^2$ ) можно вообще отбросить в силовой функции всю работу  $V_2$ . Однако  $\alpha$  и  $n$  могут быть велики, а тогда надо оставить лишь наибольшие степени их, т. е. указанные выше члены.

Таким образом часть силовой функции, соответствующая одной только оболочке (без ребер) примет упрощенный вид:

$$V = V_1 + V_2 - V_q = \frac{Eh}{1-\sigma^2} r \pi a \sum_m \sum_n \left[ A^2 \alpha^2 + \frac{1}{r^2} (Bn + C)^2 + \frac{2\sigma}{r} (Bn + C) A \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1-\sigma}{2} \left( B\alpha + \frac{n}{r} A \right)^2 + \left( a_0 - \sigma \frac{c_0}{r} \right) C^2 \alpha + \left( \sigma a_0 - \frac{c_0}{r} \right) C^2 n^2 + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3r^2} C^2 \left( r \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Такое же упрощение мы можем проделать с силовой функцией ребер. Возьмем одно ребро; для него мы имели формулу (24). Так, членами вида  $2nC_m B_m' \frac{c_0}{r}$  можно очевидно пренебречь, так как в формулу скобок входят члены вида  $nC_m B_n$ . Нетрудно убедиться, что можно пренебречь и членами  $A_m A_m' n^2$ , так что во второй скобке остается лишь член  $\frac{c_0}{r} C_m C_m' n^2$ , который

должен быть оставлен ввиду неизвестной величины числа  $n$ . В самом деле, при большом  $n$  для тонких оболочек  $C$  будет велико по сравнению с  $A$  и  $B$ . Легко например усмотреть, что  $C$  и  $Bn$  величины одного порядка, ибо если дуга круга с центральным углом  $\frac{2\pi}{n}$  получит некоторый прогиб  $w$  не изменяя своей длины, то сближение концов дуги будет порядка  $\frac{w}{n}$  (рис. 5).

Далее в потенциальной энергии изгиба  $V'_{2i}$  [формула (25)] можно отбросить под знаком суммы все члены, кроме члена вида  $n^4 C_m C_{m'}$ , содержащего наивысшую степень  $n$ . Это следует из того, что отношение коэффициентов, стоящих перед суммами  $V_{1i}$  и  $V_{2i}$ , т. е. число  $\frac{1}{Sr^2}$  мало и, следовательно, можно применить те же соображения, в силу которых аналогичные члены были отброшены в сумме  $V_2$ .

Наконец, можно в силовой функции  $U$  отбросить всю работу  $V_q$  линейной нагрузки ребра, также как была отброшена работа  $V_q$ . Действительно, если в формулу (26) подставить значение  $q' = \frac{2ES}{r^2} c_0$  [см. (9)], то там все члены будут множиться на малую величину  $\frac{c_0}{r}$ , а так как они все встречаются в  $V'_{1i}$  без этого малого множителя, то  $V'_{qi}$  можно по сравнению с  $V'_{1i}$  пренебречь.

Таким образом

$$U = V_1 + V_2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (V'_{1i} + V'_{2i}), \quad (28)$$

где  $V_1 + V_2$  дается формулой (27), а

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^{k-1} (V'_{1i} + V'_{2i}) = V' = V'_i + \frac{ES\pi}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} [C_m + \right. \\ \left. + nB_{m'})(C_m + nB_m) - \frac{c_0}{r} n^2 C_m C_{m'}] \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{m\pi i}{k} \cdot \sin \frac{m'\pi i}{k} \right\} + \\ \left. + \frac{EI\pi}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} C_m C_{m'} n^4 \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{m\pi i}{k} \cdot \sin \frac{m'\pi i}{k} \right] \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

## § 7. Составление уравнений для коэффициентов

Выше уже говорилось, что искомую связь между жесткостью ребер  $EI$  и критической нагрузкой  $p_k$  можно получить из условия существования отличных от нуля решений для неизвестных  $A, B, C$ , следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial B_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial C_{mn}} = 0 \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3... \\ n=1, 2, 3... \end{matrix} \quad (30)$$

По формуле (27), после некоторых вычислений, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial A} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} \pi r a \left[ A \left( 2\alpha^2 + (1-\sigma) \frac{n^2}{r^2} \right) + B \frac{(1+\sigma)n\alpha}{r} + C \frac{2\sigma a}{r} \right] \\ \frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial B} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} \pi r a \left[ A \frac{(1+\sigma)n\alpha}{r} + B \left( \frac{2n^2}{r^2} + (1-\sigma)\alpha^2 \right) + C \frac{2n}{r^2} \right] \\ \frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial C} &= \frac{Eh}{1-\sigma} \pi r a \left[ A \frac{2\sigma a}{r} + B \frac{2m}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. C \left( \frac{2}{r^2} + \frac{2h^2}{3r^2} n^2 \left( \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right)^2 - 2p_1\alpha^2 - 2q_1 \frac{n^2}{r^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} (31)$$

где под  $p_1$  и  $q_1$  разумеются следующие отвлеченные числа:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1-\sigma^2}{2Eh} p = -a_0 + \sigma \frac{c_0}{r} \\ q_1 &= \frac{1-\sigma^2}{2Eh} qr = \frac{c_0}{r} - \sigma a_0 \end{aligned} \right\} (32)$$

для равносторонней нагрузки  $qr = 2p$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -a_0 \frac{1-\sigma^2}{1-2\sigma} = \frac{c_0}{r} \frac{1-\sigma^2}{2-\sigma} \\ q_1 &= -2a_0 \frac{1-\sigma^2}{1-2\sigma} = 2 \frac{c_0}{r} \frac{1-\sigma^2}{2-\sigma} \end{aligned} \right\}$$

Для потенциальной энергии  $V_1'$  ребер, по формуле (29), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial A_m} &= 0, \\ \frac{\partial V'}{\partial B_m} &= 2 \frac{ES}{r} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (B_m' n + C_m') n \sum_{i=1}^{i=k-1} \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i \right], \\ \frac{\partial V'}{\partial C_m} &= 2 \frac{ES}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m'=1}^{\infty} \left( B_m' n + C_m' - \frac{c_0}{r} C_m' n^2 \right) \sum_{i=1}^{i=k-1} \sin \frac{m\pi}{r} i \sin \frac{m'\pi}{k} i \right] + \\ &\quad + 2 \frac{EI}{r^3} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m'=1}^{\infty} C_m' n^4 \sum_{i=1}^{i=k-1} \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i \right]. \end{aligned}$$

Для определения  $\sum_{i=1}^{i=k-1} \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i$  надо воспользоваться следующими

соотношениями (как это сделал проф. П. Ф. Папкович<sup>1</sup> при вычислении потенциальной энергии изгиба ребер, подкрепляющих плоскую прямоугольную пластину): если ни  $m$  ни  $m'$  не кратны числу  $2k$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i &= 0, \text{ когда число } m \pm m' \text{ не кратно } 2k \text{ (} m \neq m' \text{);} \\ \text{ " " " " } &= \frac{2}{k}, \text{ когда } m = m'; \\ \text{ " " " " } &= -\frac{k}{2}, \text{ когда } m + m' \text{ кратно } 2k; \\ \text{ " " " " } &= \frac{k}{2}, \text{ когда } m - m' \text{ кратно } 2k. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Об устойчивости прямоугольной плоской пластины, подкрепленной упругими ребрами жесткости. Труды НИССа 1932 г.

Если же  $m$  и  $m'$  кратны числу  $k$ , то

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{m\pi}{k} i \sin \frac{m'\pi}{k} i = 0.$$

Тогда для  $m = k, 2k, 3k, \dots$

$$\frac{\partial V'}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial V'}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial V'}{\partial C_m} = 0,$$

а для всякого другого  $m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial A_m} &= 0 \\ \frac{\partial V'}{\partial B_m} &= k \frac{ES}{r} \pi \sum_n [n^2 (B_m - B_{2km-m} + B_{2k+m} - B_{4k-m} + B_{4n+m} - B_{6k-m} + \dots) + \\ &\quad + n (C_m - C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots)] \\ \frac{\partial V'}{\partial C_m} &= \sum_n \left[ k \frac{ES}{r} \pi n (B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{kES}{r} \pi - \frac{kES}{r} \pi n^2 \frac{c_0}{r} + \frac{kEI}{r} \pi n^4 \right) (C_m - C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots) \right]. \end{aligned}$$

Система (30) для  $m = k, 2k, 3k, \dots$  и любых  $n$  примет вид:

$$\left. \begin{aligned} A \left( 2\alpha^2 + (1 - \sigma) \frac{n^2}{r^2} \right) + B \frac{(1 + \sigma) n \alpha}{r} + C \frac{2\sigma \alpha}{r} &= 0 \\ A \frac{(1 + \sigma) n \alpha}{r} + B \left( \frac{2n^2}{r^2} + (1 - \sigma) \alpha^2 \right) + C \frac{2n}{r^2} &= 0, \\ A \frac{2\sigma \alpha}{r} + B \frac{2n}{r^2} + C \left( \frac{2}{r^2} - 2p_1 \alpha^2 - 2q_1 \frac{n^2}{r^2} + \frac{2h}{3r^2} r^2 \left( \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Если положить:

$$\frac{kS(1 - \sigma)}{ah} = \delta, \quad \frac{kJ(1 - \sigma^2)}{ahr^2} = \gamma,$$

то система (30) для всякого  $m$  некратного  $k$  и произвольного  $n$  будет такая:

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} (2\alpha^2 r^2 + (1 - \sigma) n^2) + B_{mn} (1 + \sigma) n \alpha r + C_{mn} 2\sigma \alpha r &= 0 \\ A_{mn} (1 + \sigma) n \alpha r + B_{mn} (2n^2 + (1 - \sigma) \alpha^2 r^2) + C_{mn} 2n + n \delta (C_{mn} - C_{2k-m_1 n} + \\ + C_{2k+m_1 n} - C_{4k-m_1 n} + \dots) + \delta n^2 (B_{m_1 n} - B_{2k-m_1 n} + B_{2k+m_1 n} - B_{4k-m_1 n} + \dots) &= 0 \\ A_{mn} 2\alpha r + B_{mn} 2n + C_{mn} [2 - 2p_1 \alpha^2 r^2 - 2q_1 n^2 + \frac{2h^2}{3r^2} (\alpha^2 r^2 + n^2)^2] + n \delta (B_{m_1 n} - B_{2k-m_1 n} + \\ + B_{2k+m_1 n} - B_{4k-m_1 n} + \dots) + [\delta \left( 1 - \frac{c_0}{r} n^2 \right) + \gamma n^4] \cdot (C_{mn} - C_{2k-m_1 n} + C_{2k+m_1 n} - \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Очевидно уравнения (33) и (34) разбиваются на ряд систем, каждая из которых зависит от одного и того же числа  $n$  и разных  $m$ . Достаточно, следовательно, решить систему для какого-либо одного  $n$  и считать, что все коэффициенты  $A, B, C$  для остальных  $n$  будут нули. Такое решение будет самым общим. Далее, каждая система с определенным значком  $n$  в свою очередь разобьется на  $k$  независимых групп троек уравнений. В первую группу войдут только коэффициенты

$$\begin{aligned} A_1, A_{2k-1}, A_{2k+1}, A_{4k-1}, \dots \\ B_1, B_{2k-1}, B_{2k+1}, B_{4k-1}, \dots \\ C_1, C_{2k-1}, C_{2k+1}, C_{4k-1}, \dots \end{aligned}$$



Вторая группа будет зависеть лишь от

$$\begin{aligned} & A_2, A_{2k-2}, A_{2k+2}, A_{4k-2}, \dots \\ & B_2, B_{2k-2}, B_{2k+2}, B_{4k-2}, \dots \\ & C_2, C_{2k-2}, C_{2k+2}, C_{4k-2}, \dots \end{aligned}$$

$k-1$  группа будет содержать

$$\begin{aligned} & A_{k-1}, A_{k+1}, A_{3k-1}, A_{3k+1}, \dots \\ & B_{k-1}, B_{k+1}, B_{3k-1}, B_{3k+1}, \dots \\ & C_{k-1}, C_{k+1}, C_{3k-1}, C_{3k+1}, \dots \end{aligned}$$

Наконец, последняя  $k$ -ая группа будет содержать коэффициенты

$$\begin{aligned} & A_k, A_{2k}, A_{3k}, \dots \\ & B_k, B_{2k}, B_{3k}, \dots \\ & C_k, C_{2k}, C_{3k}, \dots \end{aligned}$$

Каждая группа будет содержать бесчисленное множество троек уравнений. Если для примера взять каждое второе уравнение в тройке, то для  $i$ -ой группы ( $1 \leq i \leq k-1$ ) получится система следующего вида:

$$\begin{aligned} & F_i A_i + G_i B_i + H_i C_i + n\delta(C_i - C_{2k-i} + C_{2k-i} \dots) + n^2\delta(B_i - B_{2k-i} + \\ & \quad + B_{2k-i} \dots) = 0 \\ & {}_{2k-i}A_{2k-i} + G_{2k-i}B_{2k-i} + H_{2k-i}C_{2k-i} + n\delta(-C_1 + C_{2k-i} - C_{2k-i} + \dots) + n\delta^2(-B_i + \\ & \quad + B_{2k-i} - B_{2k+i} + \dots) = 0 \\ & F_{2k+i}A_{2k+i} + G_{2k+i}B_{2k+i} + H_{2k+i}C_{2k+i} + n\delta(C_i - C_{2k-i} + C_{2k+i} - C_{2k-i} + \dots) + \\ & \quad + n^2\delta(B_i - B_{2k+i} \dots) = 0 \end{aligned}$$

где  $F_i, G_i, H_i$  — соответствующие коэффициенты во втором уравнении системы (34). Система первых и третьих уравнений всех троек будет построена подобным же образом. Однако, первые уравнения будут проще, ибо не будут содержать бесконечных рядов с коэффициентами  $B$  и  $C$ . Поэтому при помощи первого уравнения можно исключить во 2-м и 3-м коэффициент  $A$ . Решая все уравнения системы (34) относительно  $A$  и, подставляя в остальные 2, найдем после некоторых преобразований

$$\left. \begin{aligned} & 2B_m(1-\sigma) \frac{(n^2 + \alpha^2 n^2)^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} + 2C_m n(1-\sigma) \frac{(2+\delta)\alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} + \\ & + n^2\delta(B_m - B_{2k-m} - B_{2k+m} \dots) + n\delta(C_m - C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots) = 0, \\ & 2B_m n(1-\sigma) \frac{(2+\sigma)\alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} + \\ & + C_m \left[ \frac{2n^2}{3r^2} (\alpha^2 r^2 + n^2)^2 - 2p_1 \alpha^2 r^2 - 2q_1 n^2 + 2(1-\sigma) \frac{2(1+\sigma)\alpha^2 r^2 n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1+\sigma)n^2} \right] + \\ & \quad + n\delta(B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + \\ & \quad + \left[ \delta \left( 1 - \frac{c_0}{r} n^2 \right) + \gamma n^4 \right] (C_m - C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots) = 0, \end{aligned} \right\} (35)$$

или, вводя соответствующие обозначения,

$$\left. \begin{aligned} & \varphi_m B_m + \chi_m C_m + n^2\delta(B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + n\delta(C_m - C_{2k-m} + \dots) = 0 \\ & \chi_m B_m + \psi_m C_m + n\delta(B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + \varepsilon(C_m - C_{2k-m} + \dots) = 0 \end{aligned} \right\} (36)$$

[Здесь  $\varepsilon = \delta \left( 1 - \frac{c_0}{r} n^2 \right) + \gamma n^4$ , остальные обозначения ясны из самих формул (35) и (36)]. Вместо троек уравнений мы получили пары. Если считать

$1 \leq m \leq k-1$ , то (36) представляет собой первую пару уравнений  $m$ -ой группы. Вторые два уравнения напишутся по аналогии с (34)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2k-m} B_{2k-m} + \chi_{2k-m} C_{2k-m} + n^2 \delta (-B_m + B_{2k-m} \dots) + n \delta (-C_m + C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots) &= 0 \\ \chi_{2k-m} B_{2k-m} + \psi_{2k-m} C_{2k-m} + n \delta (-B_m + B_{2k-m} \dots) + \epsilon (-C_m + C_{2k-m} - C_{2k+m} \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} (37)$$

Третья пара уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2k+m} B_{2k+m} + \chi_{2k+m} C_{2k+m} + n^2 \delta (B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + n \delta (C_m - C_{2k-m} + C_{2k+m} \dots) &= 0 \\ \chi_{2k-m} B_{2k+m} + \psi_{2k+m} C_{2k+m} + n \delta (B_m - B_{2k-m} + B_{2k+m} \dots) + \epsilon (C_m - C_{2k-m} + \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} (38)$$

Первая, третья, пятая и т. д. пары уравнений будут иметь в рядах с  $B$  и  $C$  одни и те же знаки. Наоборот, во 2-ой, 4-ой и т. д. парах знаки будут обратные.

### § 8. Решение основных уравнений

Чтобы решить полученные уравнения мы сложим первые уравнения (36) и (37). Получим:

$$\varphi_m B_m + \chi_m C_m = -\varphi_{2k-m} B_{2k-m} - \chi_{2k-m} C_{2k-m}$$

Складывая вторые 2 уравнения (36) и (37), найдем:

$$\chi_m B_m + \psi_m C_m = -\chi_{2k-m} B_{2k-m} - \psi_{2k-m} C_{2k-m}$$

Подобным же образом найдем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m B_m + \chi_m C_m &= -\varphi_{4k-m} B_{4k-m} - \chi_{4k-m} C_{4k-m} \\ \chi_m B_m + \psi_m C_m &= -\chi_{4k-m} B_{4k-m} - \psi_{4k-m} C_{4k-m} \\ \varphi_m B_m + \chi_m C_m &= -\varphi_{6k-m} B_{6k-m} - \chi_{6k-m} C_{6k-m} \\ \chi_m B_m + \psi_m C_m &= -\chi_{6k-m} B_{6k-m} - \psi_{6k-m} C_{6k-m} \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\}$$

Вычитая из первой пары уравнений (36) другие пары с нечетными номерами, получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m B_m + \chi_m C_m &= \varphi_{2k+m} B_{2k+m} + \chi_{2k+m} C_{2k+m} \\ \chi_m B_m + \psi_m C_m &= \chi_{2k+m} B_{2k+m} + \psi_{2k+m} C_{2k+m} \\ \varphi_m B_m + \chi_m C_m &= \varphi_{4k+m} B_{4k+m} + \chi_{4k+m} C_{4k+m} \\ \chi_m B_m + \psi_m C_m &= \chi_{4k+m} B_{4k+m} + \psi_{4k+m} C_{4k+m} \end{aligned} \right\}$$

При помощи этих уравнений мы должны коэффициенты

$$B_{2k-m}, B_{2k+m}, B_{4k-m}, \text{ и } C_{2k-m}, C_{2k+m}, C_{4k-m}$$

выразить через  $B_m, C_m$  и подставить их в уравнения (36). Не приводя здесь вычислений, которые для этого нужно сделать, мы напишем лишь окончательный результат. Вместо уравнений (36) мы будем иметь

$$\begin{aligned} B_m \left[ \varphi_m + n^2 \delta \sum_{i=m, 2k-m, 2k+n, 4k-m} \frac{\psi_i \varphi_m - \chi_i \chi_m}{\psi_i \varphi_i - \chi_i^2} + n \delta \sum_{i=m, 2k-n, 2k+m, 4k-m} \frac{\chi_m \psi_i - \chi_i \varphi_m}{\psi_i \varphi_i - \chi_i^2} \right] + \\ + C_m \left[ \chi_m + n \delta \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m, 4k-m} \frac{\varphi_i \psi_m - \chi_i \chi_m}{\psi_i \varphi_i - \chi_i^2} + \right. \\ \left. + n \delta \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m, 4k-m} \frac{\chi_m \varphi_i - \chi_i \psi_m}{\psi_i \varphi_i - \chi_i^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$B_m \left[ \chi_m + n\delta \sum_{i=m, 2k-m, 2+k} \frac{\psi_i \varphi_m - \gamma_i \gamma_m}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} + \epsilon \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m} \frac{\gamma_m \varphi_i - \gamma_i \varphi_m}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} \right] + \\ + C_m \left[ \psi_m + \epsilon \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m} \frac{\varphi_i \psi_m - \gamma_i \gamma_m}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} + n\delta \sum_{i=m, k-k-m, 2k+m} \frac{\gamma_m \psi_i - \gamma_i \psi_m}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} \right] = 0.$$

Система должна иметь для  $C_m$  и  $B_m$  решение, отличное от нуля, поэтому определитель, составленный из коэффициентов при  $C_m$  и  $B_m$ , должен быть нуль. При составлении определителя, некоторые члены пропадут и после различных преобразований и деления определителя на количество  $\varphi_m \psi_m - \gamma_m^2$  получится следующее уравнение:

$$1 + \epsilon \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\varphi_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} + n^2 \delta \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\psi_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} - 2n\delta \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\gamma_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} + \\ + n^2 \delta (\epsilon - \delta) \left\{ \left( \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\varphi_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} \right) \left( \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\varphi_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} \right) - \right. \\ \left. - \left( \sum_{i=m, 2k-m \dots} \frac{\gamma_i}{\psi_i \varphi_i - \gamma_i^2} \right) \right\} = 0. \quad (39)$$

Полученное уравнение и представляет собой некоторую зависимость между критической нагрузкой, жесткостью ребра и площадью его поперечного сечения. В дальнейшем оно будет упрощено.

### § 9. Критическая нагрузка в случае, когда упругие ребра отсутствуют

Уравнение (39) содержит 4 величины:  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $J$  и  $S$ . Если критическая нагрузка (а также и площадь ребра  $S$ ) задана, то из уравнения можно найти момент инерции ребра  $J$ . Необходимо установить теперь лишь пределы, в которых может вообще изменяться критическая нагрузка оболочки, если жесткость ребра непрерывно увеличивать, начиная от нулевого значения. Для определения наименьшей критической нагрузки оболочки, когда жесткость упругих ребер есть нуль, можно воспользоваться системой уравнений (33), считая там  $k$  равным 1-це (ребра отсутствуют). Каждую тройку уравнений (33) с определенными значками  $m$  и  $n$  можно решить относительно  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  отдельно и взять для остальных коэффициентов нулевые решения. Положив определитель уравнений (33) равным нулю, легко найти и критическую нагрузку. Наименьшая из всех значений ее, при различных  $m$  и  $n$ , и будет искомая критическая нагрузка, которую пластина имеет в действительности. Чтобы установить характер деформации после потери устойчивости, надо в выражении (6) считать все коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нулями, кроме тех, номера которых  $m$  и  $n$  соответствуют наименьшей нагрузке. Таким образом прогиб  $w$  будет представлять собой синусоиду с  $m$  полуволнами между соседними абсолютно жесткими ребрами и  $n$  волнами по окружности сечения цилиндра.

Исключая из уравнений (33) коэффициент  $A$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} B \frac{(n^2 + \alpha^2 r^2)^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} + Cn \frac{(2+\sigma)\alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n} = 0 \\ 2Bn(1-\sigma) \frac{(2+\delta)\alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} + \\ + C \left[ \frac{2h^2}{3r^2} (\alpha^2 r^2 + n^2)^2 - 2p_1 \alpha^2 r^2 - 2q_1 n^2 + 2(1-\sigma) \frac{2(1+\sigma)\alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1-\sigma)n^2} \right] = 0, \end{aligned} \right\} (40)$$

откуда

$$C \left[ \frac{2h^2}{3r^2} (\alpha^2 r^2 + n^2)^2 - 2p_1 \alpha^2 r^2 - 2q_1 n^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) \left( \frac{2(1 + \sigma) \alpha^2 r^2 + n^2}{2\alpha^2 r^2 + (1 - \sigma)n^2} + \frac{n^2 [(2 + \sigma) \alpha^2 r^2 + n^2]^2}{[2\alpha^2 r^2 + (1 - \sigma)n^2] (n^2 + \alpha^2 r^2)^2} \right) \right] = 0,$$

или после несложных преобразований

$$C \left[ \frac{2h^2}{3r^2} (\alpha^2 r^2 + n^2)^2 + 2p_1 \alpha^2 r^2 - 2q_1 n^2 + 2(1 - \sigma) \frac{\alpha^4 r^4}{(\alpha^2 r^2 + n^2)} \right] = \\ = \frac{\psi_m \varphi_m - \chi_m^2}{\varphi_m} = 0. \tag{41}$$

При равностороннем давлении  $p_1 = \frac{q_1}{2}$  (см. 32). В этом случае для критического нормального давления получится формула

$$q_1 = qr \frac{1 - \sigma^2}{2Eh} = \frac{\alpha^2 r^2}{n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 r^2} \left( (1 - \sigma) \frac{\alpha^2 r^2}{(\alpha^2 r^2 + n^2)^2} + \frac{h^2 (\alpha^2 r^2 + n^2)^2}{3r^2 \alpha^2 r^2} \right)$$

или

$$q = \frac{2Eh}{n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 r^2} \left( \frac{\alpha^2 r^2}{(\alpha^2 r^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{3\alpha^2 (1 - \sigma^2)} \frac{(\alpha^2 r^2 + n^2)^2}{\alpha^2 r^2} \right), \quad \sigma r = \frac{m\pi}{a} r.$$

Это выражение совпадает с известной формулой R. v. Mises'a для тонкостенных труб, полученной им из уравнений равновесия оболочки. Для отыскания наименьшего значения нагрузки Sanden<sup>1</sup> выражает  $q$  через переменную

$$z = \frac{\alpha r}{\alpha^2 r^2 + n^2}.$$

Тогда нагрузка будет функция двух переменных  $z$  и  $\alpha r$  (вместо  $n$  и  $\alpha r$ ):

$$q = \frac{2Eh}{r} \frac{\alpha r}{z - \frac{1}{2} \alpha r} \left( \frac{1}{z^2} + \varepsilon z^2 \right)$$

где

$$\varepsilon = \frac{h^2}{3r^2 (1 - \sigma^2)}.$$

Частная производная  $q$  по  $\alpha r$  будет всегда положительна. Это показывает, что  $m$  должно быть наименьшим, т. е.  $m = 1$ . Остается найти  $n$ . Если производную по  $n$  приравнять нулю, то получится следующее уравнение для определения  $n = n_{\min}$ :

$$(\alpha \mu)^4 = 3 + \frac{2}{\mu - 1}, \tag{42}$$

где

$$n^2_{\min} = (\mu - 1) \left( \frac{\pi r}{a} \right)^2, \quad \alpha = \sqrt[4]{\varepsilon} \frac{\pi r}{2}.$$

В статье Sanden'a имеются кривые, позволяющие графически найти корень уравнения (42) по заданному  $\alpha$ .

Итак, критическая нагрузка для равносторонне сжатого цилиндра, подкрепленного только жесткими ребрами на расстоянии  $a$  друг от друга, будет:

$$q_{кр} = \frac{2Eh}{r} \frac{\frac{\pi^2 r^2}{a^2}}{n^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \left( \frac{\frac{\pi^2 r^2}{a^2}}{\left( \frac{r^2 \pi^2}{a^2} + n^2 \right)^2} + \frac{h^2}{3r^2 (1 - \sigma^2)} \frac{\left( \frac{\pi r^2}{a^2} + n^2 \right)^2}{\frac{\pi^2 r^2}{a^2}} \right), \tag{43}$$

где  $n$  — одно из двух целых чисел, соседних с  $n_{\min}$ .

<sup>1</sup> Sanden und Tölke, Ingenieur Archiv 1932.

Это значение  $q_{кр}$  будет для оболочки наименьшим, так как оно соответствует нулевому значению жесткости и площади сечения упругого ребра. Наибольшая возможная для оболочки нагрузка будет та, которая соответствует  $k$  полуволнам между 2-мя соседними жесткими ребрами, с узловыми линиями, расположенными на упругих ребрах. Последние, следовательно, при потере устойчивости не будут участвовать в деформации. Нагрузку в этом случае можно получить из (43), если подставить вместо  $a$  величину  $\frac{a}{k}$ , а  $n$  найти указанным выше способом.

### 10. Связь между критической нагрузкой, жесткостью ребра и площадью его сечения

Эта зависимость получена нами в виде (39). Положив там

$$\Phi = \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m} \frac{\varphi_i}{\varphi_i \varphi_i - \chi_i^2}, \quad \Psi = n^2 \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m} \frac{\psi_i^2}{\varphi_i \psi_i - \chi_i^2},$$

$$X = n \sum_{i=m, 2k-m, 2k+m} \frac{\gamma_i}{\varphi_i \psi_i - \chi_i^2},$$

где, согласно (35) и (36) и (41)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_i \psi_i - \chi_i^2}{\varphi_i} &= \frac{2h^2}{3r^2} (\beta_i^2 + n^2)^2 - 2q_1 \left( n^2 + \frac{1}{2} \beta_i^2 \right) + 2(1 - \sigma^2) \frac{\beta_i^4}{(\beta_i^2 + n^2)^2}, \\ \varphi_i &= 2(1 - \sigma) \frac{(n^2 + \beta_i^2)^2}{2\beta_i^2 + (1 - \sigma)n^2}, \quad \chi_i = 2(1 - \sigma) n \frac{(2 + \sigma)\beta_i^2 + n^2}{2\beta_i^2 + (1 - \sigma)n^2}, \\ \psi_i &= \frac{2h^2}{3r^2} (\beta_i^2 + n^2)^2 - 2q_1 \left( \frac{1}{2} \beta_i^2 + n^2 \right) + 2(1 - \sigma) \frac{2(1 + \sigma)\beta_i^2 + n^2}{2\beta_i^2 + (1 - \sigma)n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

а

$$\beta_i = r\alpha_i = \frac{r}{a} i\pi,$$

получим вместо (39):

$$1 + \epsilon\Phi + \delta\Psi - 2\delta X + \delta(\epsilon - \delta)(\Phi, \Psi - X^2) = 0, \quad (45)$$

где

$$\left. \begin{aligned} &= k \frac{(1 - \sigma^2)S}{ah}, \quad \gamma = k \frac{(1 - \sigma^2)J}{ahr^2}, \quad \epsilon = \delta \left( 1 - n^2 \frac{2 - \sigma}{2(1 - \sigma^2)q_1} \right) + \gamma n^4, \\ &q_1 = qr \frac{1 - \sigma^2}{2Eh}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Уравнение (45), к решению которого сводится отыскание неизвестных  $J$  и  $S$  по заданной критической нагрузке  $q_{кр}$ , зависит от чисел  $m$  и  $n$ . При этом нагрузка  $q_{кр}$ , которая входит в каждую из сумм  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $X$  и в величину  $\epsilon$ , может быть задана конечно только в установленных выше для нее пределах. Для каждой пары  $m$  и  $n$  уравнение (45) даст определенное соотношение между  $S$  и  $J$ . Числа же  $m$  и  $n$  изменяются по значениям  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Если бы для простоты считать, что площадь поперечного сечения  $S$  задана, то за истинное значение  $J$  необходимо взять наибольшее из всех  $J_{mn}$ , так как тогда пластинке будет обеспечена заданная критическая нагрузка в отношении всех деформаций, отвечающих разным  $m$  и  $n$ .

Примерно такие же вычисления приходится вести при определении момента инерции упругих ребер, подкрепляющих слегка изогнутую по

цилиндру прямоугольную пластинку,<sup>1</sup> но соотношение (45) будет тогда гораздо проще и, кроме того, тогда можно взять  $n=1$  (при малой кривизне), что сильно упрощает подсчет. Вычисления будут совсем простыми, когда кривизна пластины равна нулю.<sup>2</sup>

Указанный здесь несколько громоздкий способ вычисления, повидимому, не допускает в общем виде каких-либо упрощений. Кроме того, при том методе решения задачи об устойчивости, который был здесь принят, повидимому, вообще нельзя дать другого какого-нибудь более простого приема вычислений. Упрощения возможны лишь при переходе к числовым подсчетам и при выборе употребительных размеров конструкций.

### § 11. Частные случаи

Уравнение (45) относится к тому случаю, когда каждое упругое ребро несет некоторую нагрузку  $q'$  (см. формулы (7), (8), (9)). Величина  $q'$  должна быть такой, чтобы радиус ребра под влиянием  $q'$  уменьшился на ту же величину, что и радиус оболочки под влиянием критической нагрузки  $q$ . Если теперь считать, что в ненапряженном состоянии упругое ребро имеет как раз этот уменьшенный радиус (см. § 1) и, следовательно, не испытывает никакого давления, то соотношение (45) останется в старом виде, но только, как это нетрудно видеть, вместо  $\epsilon$  там будет стоять величина

$$\epsilon_1 = \delta + \gamma n^4. \quad (47)$$

Далее, если при составлении основных уравнений учитывать для ребер только потенциальную энергию изгиба, т. е. предполагать возможность скольжения ребер по поверхности оболочки при потере ее устойчивости, то, как легко убедиться, в (45) надо положить  $\delta = 0$ . Формула (45) тогда примет совсем простой вид:

$$1 + n^4 \gamma \Phi = 0. \quad (48)$$

Это соотношение получено нами в другой работе, для случая слегка искривленных пластин. В этом случае (а также и в случае плоской пластины) число  $n$  в (48) оказывается равным единице, что значительно сокращает числовой расчет. При вычислении „критической жесткости“ ребра, расчет будет совсем простым, так как оказывается, что в этом случае в (48)  $m = k - 1$ .

### § 12. О вычислении момента инерции ребра

Основное соотношение (45) можно преобразовать к виду несколько более удобному для вычислений. Обозначив в (48)

$$\frac{\varphi_i \psi_i - \gamma_i^2}{\varphi_i} = \Delta_i,$$

мы имеем

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_i \psi_i - \gamma_i^2} = \frac{1}{\Delta_i}, \quad \frac{\gamma_i}{\varphi_i \psi_i - \gamma_i^2} = n \frac{(2 + \sigma) \beta_i^2 + n^2}{(n^2 + \beta_i^2)^2} \frac{1}{\Delta_i},$$

$$\frac{\psi_i}{\varphi_i \psi_i - \gamma_i^2} = \frac{\psi_i}{\varphi_i} \frac{\Delta_i + \frac{\gamma_i^2}{\varphi_i}}{\Delta_i} = \frac{1}{\varphi_i} + \frac{\frac{\gamma_i^2}{\varphi_i}}{\Delta_i} = \frac{2\beta_i^2 + (1 - \sigma)n^2}{2(1 - \sigma)(n^2 + \beta_i^2)^2} + \left( n \frac{(2 + \sigma) \beta_i^2 + n^2}{(n^2 + \beta_i^2)^2} \right)^2 \frac{1}{\Delta_i}.$$

<sup>1</sup> П. Соколов. Об устойчивости пластины, подкрепленной рабрами при наличии малой цилиндрической кривизны. Труды НИССа 1932 г.

<sup>2</sup> П. Папкович. Об устойчивости плоской прямоугольной пластины, подкрепленной упругими рабрами. Труды НИССа 1932 г.

Отсюда

$$\Phi = \sum_{i=m, 2k-m, \dots} \frac{1}{\Delta_i}, \quad \Psi = \sum_{i=m, 2k-m, \dots} \left[ n^2 \frac{2\beta_i^2 + (1-\sigma)n^2}{2(1-\sigma)(n^2 + \beta_i^2)^2} + \left( n^2 \frac{(2+\sigma)\beta_i^2 + n^2}{(n^2 + \beta_i^2)^2} \right)^2 \frac{1}{\Delta_i} \right]$$

$$X = \sum_{i=m, 2k-m, \dots} n^2 \frac{(2+\sigma)\beta_i^2 + n^2}{(n^2 + \beta_i^2)^2} \frac{1}{\Delta_i},$$

где

$$\beta_i = \frac{ri\pi}{a}, \quad \Delta_i = \frac{2h^2}{3r^2} (n^2 + \beta_i^2)^2 + 2(1-\sigma^2) \frac{\beta_i^4}{(\beta_i^2 + n^2)^2} - 2q_1 \left( n^2 + \frac{1}{2} \beta_i^2 \right).$$

Положив  $\frac{a}{k} = c$ , введем в рассмотрение функцию

$$f_n \left( \frac{i}{k} \right) = \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \beta_i^2} \left[ \frac{h^2}{3r^2} (n^2 + \beta_i^2)^2 + (1-\sigma^2) \frac{\beta_i^4}{(\beta_i^2 + n^2)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{k} \frac{r\pi}{c} \right)^2} \left[ \frac{h^2}{3r^2} \left( n^2 + \left( \frac{i}{k} \frac{r}{c} \pi \right)^2 \right)^2 + \frac{(1-\sigma^2) \left( \frac{i}{k} \frac{r}{c} \pi \right)^4}{\left( \left( \frac{i}{k} \frac{r}{c} \pi \right)^2 + n^2 \right)^2} \right]. \quad (49)$$

Тогда

$$\Delta_i = 2 \left( n^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{k} \frac{r}{c} \pi \right)^2 \right) \left[ f_n \left( \frac{i}{k} \right) - q_1 \right].$$

В § 9 мы видели, что  $f_n \left( \frac{i}{k} \right)$  представляют собою общее выражение для критической нагрузки  $q_1$  и что при  $i=1$  и некотором  $n=n_1$  определяемом из уравнения (42), нагрузка  $q_1$  принимает наименьшее возможное значение, а при  $i=k-1$  и соответствующем  $n=n_2$  — наибольшее значение. Нагрузка  $q_1$  в основном соотношении должна быть задана в этих пределах и может быть получена как значение функции  $f_n \left( \frac{i}{k} \right)$  при некотором выборе чисел  $i$  и  $n$ . Отсюда легко видеть, что для всех значений, по которым изменяется  $i$  в суммах  $\Phi$ ,  $\Psi$  и  $X$ , за исключением первого значения

$$\Delta_i > 0;$$

для первого значения ( $i=m$ )  $\Delta_m$  может быть любого знака; ограничиваясь случаем, когда нагрузка  $q_1=0$  (см. (47)), мы покажем, что если для некоторой пары значений  $m$  и  $n$   $\Delta_m$  также больше нуля, то соответствующее основное уравнение (45) даст для  $J$  и  $S$  отрицательные значения и, следовательно этот случай может быть отброшен, как неинтересный (это будет показывать, что пластина выдержит заданную нагрузку при деформации, соответствующей выбранным  $m$  и  $n$ , даже не будучи подкреплена ребрами). В самом деле, если все  $\Delta_i$  более нуля, то все члены в рядах  $\Psi$ ,  $\Phi$  и  $X$  положительны. Кроме того, в соотношении (45), которое может быть написано в нашем случае в виде

$$1 + \frac{(1-\sigma^2)Jn^4}{chr^2} \Phi + \frac{(1-\sigma^2)}{ch} S(\Phi + \Psi - 2X) + \frac{(1-\sigma^2)^2 SI}{c^2 h^2 r^2} n^4 (\Phi\Psi - X^2) = 0, \quad (50)$$

выражение

$$\Phi + \Psi - 2X = \sum \left[ n^2 \frac{2\beta_i^2 + (1-\sigma)n^2}{2(1-\sigma)(n^2 + \beta_i^2)^2} + \left( 1 - n^2 \frac{(2+\sigma)\beta_i^2 + n^2}{(n^2 + \beta_i^2)^2} \right) \frac{1}{\Delta_i} \right]$$

также более нуля. Далее, так как у нас

$$\Delta_i = \frac{\varphi_i \psi_i - \gamma_i^2}{\varphi_i} > 0, \quad \gamma_i < \sqrt{\varphi_i \psi_i}.$$

то общий член суммы  $\Phi \cdot \Psi - X^2$  будет

$$\frac{1}{\Delta_i \Delta_j} (\varphi_i \psi_j + \varphi_j \psi_i - 2\chi_i \chi_j) < \varphi_i \psi_j + \varphi_j \psi_i - 2\sqrt{\varphi_i \psi_j \varphi_j \psi_i} = (\sqrt{\varphi_i \psi_j} - \sqrt{\varphi_j \psi_i})^2 > 0$$

а тогда и

$$\Phi \cdot \Psi - X^2 > 0.$$

Отсюда ясно, что какова бы ни была площадь  $S$  ребра, момент инерции  $J$  не может быть при  $\Delta_i > 0$  положительным числом, так как иначе левая часть (50) не могла бы быть нулем.

Таким образом можно исключить из рассмотрения все значения  $m$  и  $n$ , для которых  $\Delta_m > 0$ . Количество уравнений (50) тогда несколько сократится.

Для численных приложений полезно представить себе, как изменяется функция  $f_n(\frac{i}{k})$  в зависимости от  $n$  и от  $i$ . В § 9 говорилось, что если  $f_n(\frac{i}{k})$  представить в виде функции от  $z = \frac{\beta_i^2 + n^2}{\beta_i}$  и от  $\beta_i$ , то частная производная по  $\beta_i$  всегда положительна. Кривые

$$\frac{\beta_i^2 + n^2}{\beta_i} = \text{const} = C_1.$$

представляют собой в прямоугольных осях  $n$  и  $\frac{i}{k}$  семейство эллипсов с полуосями  $\frac{c_1}{2}$  и  $\frac{c_1 c}{2\pi r}$  и центром на оси  $\frac{i}{k}$  в расстоянии  $\frac{c_1 c}{2\pi r}$  от начала координат (рис. 6) При движении по каждому эллипсу,

начиная от начала координат до точки  $\frac{c_1 c}{\pi r}$  на оси  $\frac{i}{k}$ ,

$f_n(\frac{i}{k})$  будет все время возрастать. Если провести ка-

кую-нибудь прямую  $\frac{i}{k} = \text{const}$ , то для всей области,

лежащей направо от этой прямой (на рис. 5), наимень-

шее значение  $f_n(\frac{i}{k})$  будет достигаться в некоторой

точке прямой  $\frac{i}{k} = \text{const}$ . То значение  $n$ , при котором

это будет происходить, можно легко найти из урав-

нения (42), где нужно считать

$$\alpha = \sqrt[4]{\epsilon \frac{i}{k} \frac{\pi r}{c}} \text{ и } n_{\min}^2 = (\mu - 1) \left( \frac{i}{k} \frac{\pi r}{c} \right)^2.$$

Минимальные значения  $f_n(\frac{i}{k})$  расположатся на некоторой кривой, по-

строить которую очень нетрудно. Вдоль этой кривой  $f_n(\frac{i}{k})$  будет возра-

стать при возрастании  $\frac{i}{k}$ .

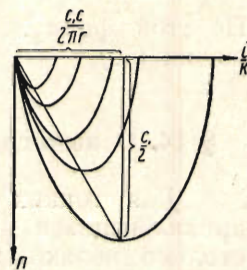


Рис. 6.

### § 13. Критическая жесткость ребра

Под этим термином мы разумеем жесткость ребра, при которой критическая нагрузка будет наибольшая из возможных для оболочки ее значений, т. е.

$$q_1 = f_{n_2} \left( \frac{k}{k} \right) = f_{n_2}(1)$$



Практически, именно эту жесткость ребра наиболее важно вычислить. Это можно сделать по данным выше формулам, если только  $k$  не особенно велико. Для пластин слегка искривленных, а также плоских, наибольшая нагрузка достигается при  $n=1$  и  $m=k$ ; как уже упоминалось в § 11, критический момент инерции может быть получен из основного соотношения (48) при  $n=1$  и при  $m$  наиболее близком к  $k$ , т. е. при  $m=k-1$ . Повидимому и в нашем общем случае критический момент инерции получится из (50), если там считать  $n=n_2$  и  $m=k-1$  (что однако нуждается в проверке на численных примерах).

На практике число ребер  $k-1$  может быть очень велико. Для многих конструкций, употребляемых на практике, не будет большой ошибкой вообще считать  $k=\infty$ . В этом случае, при  $m=k-1$  и  $n=n_2$ , первые 2 члена в рядах  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $X$  непосредственно по приведенным выше формулам вычислить нельзя, так как  $\Delta_m = \Delta_{2k-m} = 0$ . Сумма обоих членов будет выражением вида:

$$\frac{F_n\left(\frac{k-1}{k}\right)}{f_{n_2}\left(\frac{k-1}{k}\right) - f_{n_2}(1)} + \frac{F_n\left(\frac{k+1}{k}\right)}{f_{n_2}\left(\frac{k+1}{k}\right) - f_{n_2}(1)},$$

где  $F_n$  — некоторая функция аргумента  $\frac{1}{v}$ . При  $k \rightarrow \infty$  эта сумма будет равна

$$\frac{F_n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{k} f_n'(1)} + \frac{F_n\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k} f_n'(1)} = \frac{F_n\left(1+\frac{1}{k}\right) - F_n\left(1-\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k} f_n'(1)} \rightarrow \frac{2F_n'(1)}{f_n'(1)}.$$

По этой формуле можно подсчитать значение сумм в основном выражении (50).

#### § 14. О вычислении $J$ для оболочек, употребляемых в судостроении

Для тонких оболочек обыкновенно число  $n_2$  (т. е. количество волн, проявляющихся при потере устойчивости по окружности цилиндра) настолько велико, что, если в (50) положить  $n=n_2$ , то всеми членами за исключением  $\gamma n^4 \Phi + 1$  можно будет пренебречь.

Примем:

$$\begin{aligned} c &= 30 \text{ см (расстояние между упругими ребрами),} \\ r &= 200 \text{ см (радиус оболочки),} \\ 2h &= 1 \text{ см (толщина ее),} \\ \sigma &= 0,3. \end{aligned}$$

Для определения наибольшей нагрузки  $q_1 = f_{n_2}(1)$  надо найти сначала число  $n_2$  из уравнения (42). Имеем по таблице кривых в статье Sanden'a или непосредственно решая уравнение (42)

$$\mu = 1,87,$$

откуда:

$$n_{\min}^2 (\mu - 1) \left(\frac{\pi r}{c}\right)^2 = 0,87 \cdot 20,9^2 \approx 380; \quad n_{\min} \approx 19,5.$$

Число волн в направлении круга  $n_2$  будет или 19 или 20, смотря по тому, какое из этих двух чисел обращает нагрузку  $q_1$  (43), т. е. функцию  $f_{n_2}(1)$  в наименьшее значение. Практически, однако,  $q_1$  будет при обоих  $n$  одинаково, так что можно просто принять, что наибольшая возможная на-

грузка будет

$$q_1 = f_{n_2}(1) = \frac{438}{380 + 219} \left( 2,08 \cdot 10^{-6} \frac{(438 + 380)^2}{438} + 0,91 \frac{438}{(438 + 380)^2} \right) \approx 2,71 \cdot 10^{-3},$$

сжимающее критическое напряжение  $T_2$  будет

$$\frac{q^2}{2h} = \frac{Eq_1}{1 - \sigma^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2,71 \cdot 10^{-3}}{0,91} = 5950 \text{ кг/см}^2.$$

Из формулы (29), дающей выражение потенциальной энергии ребер, видно, что при достаточно большом  $n$ , вторая сумма будет больше, чем первая сумма. Во второй сумме коэффициент  $C_m C_{,m} n^4$  в  $n^4$  раз больше, чем в 1-й сумме, в которой  $C_m$  и  $B_m n$  числа одного порядка. Если взять площадь сечения ребер около  $20 \text{ см}^2$  (коробка № 14), а момент инерции — около  $1000 \text{ см}^4$ , то отношение коэффициентов при обеих суммах будет

$$\frac{Sn^2}{I} = \frac{8 \cdot 10^5}{1000} = 800;$$

при  $n = 20$  вторая сумма будет примерно в  $\frac{n^4}{800} = 200$  раз более первой. Поэтому примерно для  $n > 15$  можно первую сумму в (29) отбросить. Соответствующее основное уравнение получится из (45), если там положить  $S = 0$ :

$$1 + \frac{1 - \sigma^2}{chr^2} Jn^4 \Phi = 0.$$

Это уравнение приводит к сравнительно несложным вычислениям, ибо требует только вычисления ряда  $\Phi$ .

## ON THE STABILITY OF A THIN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL WITH ELASTIC RIBS

By P. A. Sokolov (Leningrad)

### Summary

The substance of the paper is the determination of the influence of elastic ribs on the critical loading of thin circular cylindrical shells subjected to longitudinal and transverse normal forces. The method adopted in the paper consists in a combination of the principles of virtual displacements and virtual changes of stresses. As a special case of the general equations given in the present paper the wellknown Mises formulae for the critical normal pressure are deduced. For extensions of the middle surface of the shell in § 3 formulae, which take into account second order terms are given. At the end of the paper a relation which allows to find the required rigidity of the ribs for a given critical loading is proposed. This relation requires however for its application rather troublesome arithmetical calculations.