ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНАХ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Е. Кочин (Ленинград)

1. Как известно, первое точное решение уравнений гидродинамики, определяющее волновое движение жидкости, было получено в 1802 году Герстнером (Gerstner) и независимо от него в 1863 году Ранкиным (Rankine).

L. Dubreil-Jacotin[1] показал, что в неоднородной несжимаемой тяжелой жидкости не может быть безвихревых установившихся волн и что волны Герстнера являются точным решением для неоднородной бесконечно-глубокой жидкости.

И. А. Кибель[2] заметил, что волны Герстнера можно получить попутно, отыскивая точное решение довольно общего вида уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости. А именно, он рассмотрел вопрос о плоском стационарном адиабатном движении сжимаемой жидкости под действием силы тяжести. Если сделать еще добавочное предположение, что давление вдоль каждой линии тока постоянно, то единственным решением задачи оказываются волны Герстнера в сжимаемой жидкости.

Целью настоящей заметки является элементарное доказательство только что высказанного утверждения и одновременно элементарный вывод волн Герстнера в сжимаемой жидкости.

2. Рассмотрим стационарное движение сжимаемой идеальной жидкости, происходящее под действием силы тяжести. Будем считать, что движение происходит одинаково во всех параллельных вертикальных плоскостях, т. е. будем рассматривать плоское движение жидкости. Сделаем далее предположение, что вдоль каждой линии тока давление p постоянно.

Наконец, мы будем предполагать, что для каждой частицы плотность ρ зависит только от давления p:

$$\rho = f(p), \tag{1}$$

причем функция $f(p)$ для разных частиц может быть разной. Так, например, если мы имеем дело с неоднородной несжимаемой жидкостью, то для каждой отдельной частицы ρ остается постоянным $\rho = \rho_0$, где ρ_0 различно для различных частиц. Если мы имеем дело с адиабатическим движением сжимаемой жидкости, то $p = C\rho^{\varkappa}$, где $\varkappa = \frac{C_p}{C_v}$ есть отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме, а C — постоянная, различная для разных частиц. В случае изотермических движений $p = RT\rho$, где R — газовая постоянная, а T — температура частицы, остающаяся неизменной для данной частицы, но меняющаяся от частицы к частице.

---

[1] L. Dubreil-Jacotin. Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes, Atti della Reale Accademia dei Lincei, XV (6), p. 814—819, 1932.

[2] И. А. Кибель. О некоторых плоских движениях тяжелой сжимаемой жидкости. Прикладная математика и механика, Ленинград, т. 1, стр. 51, 1932.

В нашем случае однако функция $f(p)$ должна быть в силу стационарности движения одной и той же для всех частиц, принадлежащих одной и той же линии тока. Отсюда следует, в силу постоянства p вдоль линии тока, что вдоль каждой линии тока плотность ρ имеет одно и то же значение.

Рассмотрим теперь две бесконечно близкие линии тока AB и A_1B_1 и обозначим через δn расстояние между этими линиями тока в точке A. Как известно, grad p направлен в точке A перпендикулярно к линии уровня AB и по величине обратно пропорционален δn. Но ясно, с другой стороны, что скорость v в точке A тоже обратно пропорциональна δn, так как через каждое сечение, расположенное между линиями тока AB и A_1B_1 проходит одно и то же количество жидкости и следовательно один и тот же объем (в силу постоянства плотности ρ вдоль линии тока). Отсюда мы выводим важное следствие, что вектор $\frac{1}{\rho}$ grad p направлен в точке A перпендикулярно к линии тока AB и по величине пропорционален скорости частицы v, причем коэффициент пропорциональности σ вдоль каждой линии тока один и тот же и может изменяться только при переходе от одной линии тока к другой.

Но известно, что движение каждой частицы идеальной жидкости происходит под действием приложенной к ней внешней силы $\mathbf{F}$ (в данном случае силы тяжести) и внутренней силы давления $-\frac{1}{\rho}$ grad p:

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{2}$$

где $\mathbf{w}$ — вектор ускорения частицы.

Из предыдущего мы выводим следующее заключение: в нашем движении каждая частица движется по своей траектории так, как двигалась бы тяжелая частица по идеальной кривой, реакция которой пропорциональна скорости частицы.

3. Обозначим координаты некоторой частицы через x и z (ось OX направлена горизонтально, ось OZ — вертикально вверх); тогда уравнение (2) приведет нас к следующим двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\sigma\frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \sigma\frac{dx}{dt} - g, \end{aligned} \tag{3}$$

ибо вектор с проекциями $-\sigma\frac{dz}{dt}$, $\sigma\frac{dx}{dt}$ по величине равен как раз σv и в то же время перпендикулярен к вектору скорости частицы $\mathbf{v}$. Умножая второе уравнение (3) на i и прибавляя к первому, получим

$$\frac{d^2(x+iz)}{dt^2} = \sigma i \frac{d(x+iz)}{dt} - gi.$$

Интегрируя полученное линейное уравнение с постоянными коэффициентами по обычным правилам, получим

$$x + iz = \frac{gt}{\sigma} + C_1 + C_2 i + (C_3 + C_4 i)\, e^{i\sigma t}$$

или, обозначая произвольные постоянные через $C_1 = a$, $C_2 = c$, $C_3 + iC_4 = re^{i\varphi}$, найдем

$$x + iz = \frac{gt}{\sigma} + a + ic + re^{i(\sigma t + \varphi)}.$$

Наконец, отделяя в полученном выражении вещественную и мнимую части, найдем

$$x = a + r \cos(\sigma t + \varphi) + \frac{gt}{\sigma}$$
$$z = c + r \sin(\sigma t + \varphi). \tag{4}$$

Отсюда видно, что движение каждой частицы складывается из прямолинейного движения параллельно оси OX со скоростью $\frac{g}{\sigma}$ и из кругового движения по кругу радиуса r с угловой скоростью σ. Траекторией этого движения будет служить трохоида — кривая, вычерчиваемая некоторой точкой круга, катящегося по прямой линии. Расстояние между двумя последовательными гребнями трохоиды, которое мы обозначим через λ и которое очевидно является длиной волны, должно равняться отрезку, проходимому за время одного периода $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ точкой, двигающейся равномерно со скоростью $\frac{g}{\sigma}$;

$$\lambda = \frac{2\pi g}{\sigma^2}. \tag{5}$$

Ясно, что для всех линий тока величина λ, а следовательно и σ должна быть одной и той же, так как иначе линии тока пересекались бы между собой.

4. Для каждой частицы величины a, c, r, φ будут различны. Можно считать, что a и c являются Лагранжевыми переменными, определяющими рассматриваемую частицу; тогда r и φ будут функциями от a и c, вид которых мы сейчас и определим.

Из формул (4) видно, что координата частицы z колеблется в пределах от $c - r$ до $c + r$; отсюда заключаем, что для всех частиц линии тока AB величины c и r имеют одно и то же значение. Итак, каждая линия тока характеризуется своим значением c, кроме того радиус r окружностей, описываемых частицами, есть функция одного только c.

Уравнения (4), в которых t рассматривается как параметр, суть очевидно параметрические уравнения траектории частицы, т. е. уравнения линии тока, отвечающей фиксированному значению c. Введем вместо t другой параметр

$$u + a + \frac{gt}{\sigma};$$

тогда получим уравнения линии тока в виде

$$x = u + r\cos\left(\frac{\sigma^2}{g} u - \frac{\sigma^2}{g} a + \varphi\right)$$
$$z = c + r\sin\left(\frac{\sigma^2}{g} u - \frac{\sigma^2}{g} a + \varphi\right)$$

и так как эти уравнения должны иметь тот же самый вид при всех значениях a, то мы можем заключить, что

$$\varphi - \frac{\sigma^2}{g} a = \alpha(c),$$

где α может зависеть только от c.

Вводя для краткости обозначение

$$\frac{\sigma^2}{g} = k,$$

где k есть постоянное число, будем иметь

$$x = a + r\cos(\sigma t + ka + \alpha) + \frac{gt}{\sigma}$$
$$z = c + r\sin(\sigma t + ka + \alpha). \tag{6}$$

5. Нам осталось определить функции $r(c)$ и $\alpha(c)$. Мы используем для этой цели уравнение неразрывности. Отметим кстати, что основное уравнение (2) было нами использовано не в первоначальной его форме, а в форме, преобразованной на основе условия неразрывности. Поэтому, если мы потребуем теперь, чтобы выполнялось условие неразрывности, то мы можем быть уверены, что будет выполняться и основное уравнение (2), и следовательно, все уравнения гидродинамики будут удовлетворены.

Как известно, уравнение неразрывности в Лагранжевых переменных требует, чтобы для всякой частицы выражение

$$\rho\frac{D(x,z)}{D(a,c)} \tag{7}$$

не зависело от времени. В нашем случае для каждой частицы ρ постоянно; далее из формул (6) следует (r и α могут зависеть только от c), что:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 - rk\sin(\sigma t + ka + \alpha), \quad \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{dr}{dc}\cos(\sigma t + ka + \alpha) - r\frac{d\alpha}{dc}\sin(\sigma t + ka + \alpha)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = rk\cos(\sigma t + ka + \alpha), \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{dr}{dc}\sin(\sigma t + ka + \alpha) + r\frac{d\alpha}{dc}\cos(\sigma t + ka + \alpha)$$

$$\frac{D(x,z)}{D(a,c)} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} = 1 - rk\frac{dr}{dc} + \left(\frac{dr}{dc} - kr\right)\sin(\sigma t + ka + \alpha) +$$
$$+ r\frac{d\alpha}{dc}\cos(\sigma t + ka + \alpha).$$

Чтобы выражение (7) не зависело от t, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dr}{dc} - kr = 0, \quad \frac{d\alpha}{dc} = 0. \tag{8}$$

и тогда

$$\frac{D(x,z)}{D(a,c)} = 1 - k^2r^2. \tag{9}$$

Первое из уравнений (8) после интегрирования приводит к формуле

$$r = Re^{kc}, \tag{10}$$

второе же показывает, что α не зависит от c, и, следовательно, является постоянной величиной, которую, не нарушая общности, можно положить равной нулю. Итак для координат x и z имеем окончательные формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= a + Re^{kc}\cos(\sigma t + ka) + \frac{gt}{\sigma} \\ z &= c + Re^{kc}\sin(\sigma t + ka), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$\sigma^2 = gk \tag{12}$$

и R не может превосходить величины $\frac{1}{k}$ (иначе получаются для линий тока физически невозможные трохоиды с петлями).

6. Нетрудно наконец определить давление p, которое является постоянным на каждой линии тока и, следовательно, зависит только от c. В самом деле мы видели в самом начале исследования, что $\frac{1}{\rho}$ grad p по

величине равно σv. Рассмотрим на линии тока AB в момент $t=\frac{\pi}{2\sigma}$ точку D, для которой $a=0$. Эта точка очевидно будет вершиной трохоиды и потому

$$|\operatorname{grad} p|=-\frac{\partial p}{\partial z}.$$

С другой стороны, скорость в точке D горизонтальна и очевидно равна

$$v_D=\frac{g}{\sigma}-R\sigma e^{kc};$$

кроме того из (11) следует, что в точке D

$$z=c+Re^{kc},\qquad \frac{\partial z}{\partial c}=1+Rke^{kc},$$

поэтому в точке D имеем

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}=\sigma v\frac{\partial z}{\partial c}=g-kR^2\sigma^2e^{2kc};$$

после интегрирования отсюда следует

$$p=p_0-g\int\rho\,dc+kR^2\sigma^2\int e^{2kc}\rho\,dc. \tag{13}$$

Таким образом единственно возможным плоским стационарным движением сжимаемой жидкости, которое происходит под действием силы тяжести, в котором изобары совпадают с линиями тока и в котором для каждой отдельной частицы плотность есть функция давления (в частности постоянная величина), является движение, определяемое формулами (11), (12) и (13), причем ρ есть произвольная функция C.

Сообщая всем частицам жидкости добавочную скорость $-\frac{g}{\sigma}$, направленную параллельно отрицательной оси OX, мы приведем уравнения движения какой-либо частицы (11) к виду

$$\begin{aligned} x&=a+Re^{kc}\cos(\sigma t+ka)\\ z&=c+Re^{kc}\sin(\sigma t+ka)\end{aligned} \tag{14}$$

определяющему волны Герстнера в обычной форме (каждая частица движется по кругу с центром в точке (a, c), с угловой скоростью σ).

SUR LES ONDES PERMANENTES DANS UN FLUIDE COMPRESSIBLE

par *N. Kotchine* *(Léningrad)*

Résumé

Démonstration par un procedé élémentaire du théorème suivant: parmi tous les mouvements plans stationnaires les ondes de Gerstner sont le seul mouvement possible d'un fluide compressible pésant, dans lequel la pression est constante sur chaque ligne de courant et dans lequel la densité de chaque particule est une fonction de la pression (par exemple mouvement adiabatique, ou mouvement d'un liquide héterogène). M. I. Kiebel a obtenu ce théorème comme cas particulier dans ses recherches plus générales (ce Recueil, 1, (1933), p. 51.)
