# УСЛОВИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*Е. Н. Блинова* и *Е. П. Охлопкова* (*Ленинград*)

В известной работе А. А. Фридмана „Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости“ устанавливаются те условия, которым должна удовлетворять кинематическая картина движения идеальной сжимаемой жидкости для того, чтобы этой картине соответствовал и некоторый динамически возможный случай движения. Эти условия динамической возможности выражают тот факт, что при заданной кинематической картине можно удовлетворить уравнениям гидромеханики соответственным подбором плотности и давления.

В работе Б. И. Извекова[1] условия динамической возможности движения были установлены для более сложного случая вязкой жидкости. Эти условия приводят к ряду динамически возможных случаев, которые и классифицируются в упомянутой работе. Причем как в работе А. А. Фридмана, так и в работе Б. И. Извекова за основу классификации движения берется, в существенном, скалярная величина $\mu = V \cdot G$, названная „мерой диссипативности“.

В последующей затем работе И. А. Кибеля[2] применяется некоторый новый метод для вывода условий динамической возможности движения для случая идеальной жидкости. Этот метод позволяет проще получить эти условия и приводит к более естественной классификации возможных случаев движения.

В настоящей работе метод И. А. Кибеля применяется к случаю вязкой жидкости. Классификация возможных случаев движения получается иной, чем в работе Б. И. Извекова. Наша классификация содержит 7 возможных случаев движения вязкой жидкости. Считаем своим долгом выразить глубокую благодарность проф. И. А. Кибелю за ряд ценных указаний в нашей работе.

Движение вязкой жидкости подчиняется уравнениям Navier-Stokes'a:

$$\nabla p = e^{-\varphi} G + S \tag{1}$$

и уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \cdot \nabla \varphi = 0. \tag{2}$$

Здесь $p$ — давление, $\varphi$ — логарифм удельного объема $\omega$, $G$ — введенный А. А. Фридманом вектор — „динамический градиент“, выражающийся

[1] Извеков Б. И. Об условиях динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости. Журнал Моск. матем. о-ва, XXII, I (*1924*).

[2] Кибель И. А. О дифференциальных уравнениях, служащих для определения плотности движущейся сжимаемой жидкости. Математический сборник, т. 39, в 4. (*1932*).

через вектор внешней силы $F$ и через индивидуальную производную от скорости $V$ по времени $t$ в виде:

$$G=F-\frac{dV}{dt},$$

$S$ — вектор, выражающийся через коэффициент вязкости $\eta$, принимаемый постоянным, через оператор Laplace'а от скорости $\nabla^2 V$ и через градиент от дивергенции скорости $\nabla\cdot V=\theta$ следующим образом:

$$S=\eta\left(\nabla^2 V+\frac{1}{3}\nabla\theta\right).$$

Исключим давление $p$ из уравнения (1). Беря вихрь от обеих частей (1) и производя простые преобразования, мы получим:

$$H+\nabla\varphi\times G=e^{\varphi}D \tag{3}$$

где $H=-\nabla\times G$ — „турбулизирующий вектор" Фридмана, $D=\nabla\times S$.

Уравнение (3) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из уравнений гидродинамики можно было определить давление. Коль скоро $V$ и $\varphi$ известны и (3) выполняется, давление определится при помощи квадратур из уравнений (1).

Теперь посмотрим, каким условиям надо подчинить поле скоростей и заданных сил, чтобы возможно было определить и удельный объем.

Умножая обе части (3) скалярно на $G$, мы получим:

$$G\cdot H=e^{\varphi}G\cdot D. \tag{4}$$

Могут представиться два случая: во-первых $G\cdot D\neq 0$ и во-вторых $G\cdot D=0$.

В случае $G\cdot D\neq 0$ удельный объем вполне определяется по заданному полю скоростей и действующих внешних сил из (4):

$$\omega=e^{\varphi}=\frac{G\cdot H}{G\cdot D}=m.$$

Подставляя в уравнения (2) и (3) найденное значение $\omega$, мы получим условия динамической возможности движения класса движений, удовлетворяющих условию $G\cdot D\neq 0$ и названных Б. И. Извековым „закручивающимися движениями". Эти условия суть:

$$H=mD+\frac{1}{m}G\times\nabla m.$$
$$\frac{dm}{dt}=m\theta. \tag{I}$$

Отметим, что третье уравнение системы (1) является следствием двух первых.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $G\cdot D=0$. Из уравнения (4) следует, что и скалярное произведение $G\cdot H$ должно равняться нулю, для того, чтобы удельный объем не обращался в бесконечность. Движения, удовлетворяющие „условию незакручиваемости" Фридмана $G\cdot H=0$, названы Б. И. Извековым „незакручивающимися движениями". Определим условия динамической возможности движения для этого класса движений.

Умножим для этого обе части уравнения (1) скалярно на $V$; получим:

$$V\cdot\nabla p=e^{-\varphi}\mu+S\cdot V, \tag{5}$$

где $\mu=V\cdot G$ — „мера диссипативности" Фридмана.

Беря градиент от обеих частей уравнения (5), получим:

$$\nabla(V\cdot\nabla p)=e^{-\varphi}\nabla\mu-e^{-\varphi}\mu\nabla\varphi+\nabla(S\cdot V)$$

и дифференцируя по $t$ уравнение (1), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla p=e^{-\varphi}\frac{\partial G}{\partial t}-e^{-\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}G+\frac{\partial S}{\partial t}=\nabla\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Простые преобразования приведут нас теперь к формуле:

$$\nabla\frac{dp}{dt}=\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial t}+V\cdot\nabla p\right)=e^{-\varphi}\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\nabla\mu\right)-e^{-\varphi}(H\times V+$$

$$+\theta G)+D\times V+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla(S\cdot V). \tag{6}$$

Применяя операцию вихря к обеим частям уравнения (6), мы придем к уравнению:

$$\nabla\varphi\times\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\nabla\mu-H\times V-\theta G\right)=-\nabla x(H\times V+$$

$$+\theta G)-\frac{\partial H}{\partial t}+e^{\varphi}\left[\frac{\partial D}{\partial t}+\nabla\times(D\times V)\right],$$

каковое, вводя обозначения:

$$G'=\frac{\partial G}{\partial t}+\nabla\mu-H\times V-\theta G,\quad H'=-\nabla\times G'=\nabla\times(H\times V+\theta G)+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$D'=\frac{\partial D}{\partial t}+\nabla\times(D\times V),$$

перепишем в виде:

$$H'+\nabla\varphi\times G'=e^{\varphi}D'. \tag{7}$$

Последнее уравнение, которое необходимо должно выполняться в силу уравнения гидродинамики, умножим скалярно на $G'$.

$$H'\cdot G'=e^{\varphi}D'\cdot G'. \tag{8}$$

Здесь возможны два случая: $D'\cdot G'\neq 0$ и $D'\cdot G'=0$.

Для движений, удовлетворяющих первому условию ($D'\cdot G'\neq 0$), удельный объем определится по заданному полю скоростей и внешних сил из уравнения (8):

$$e^{\varphi}=\frac{H'\cdot G'}{D'\cdot G'}=m'.$$

Исключая найденное значение удельного объема из (7) и (2), получим условия динамической возможности движения для незакручивающихся движений, удовлетворяющих условию $D'\cdot G'\neq 0$:

$$H'=m'D'+\frac{1}{m'}G'\times\nabla m'.$$

$$\frac{dm'}{dt}=m'\theta. \tag{II}$$

Обратимся теперь ко второму случаю: $D'\cdot G'=0$. Из уравнения (8) следует, что и $H'\cdot G'$ должно равняться нулю. В силу условий $G\cdot H=0$, $G'\cdot H'=0$ должно выполняться соотношение $H'\cdot G=-H\cdot G'$, которое влечет за собой условие: $D'\cdot G=-D\cdot G'$.

При наличии этих двух последних равенств легко получается из (3) и (7) соотношение для $\nabla\varphi$:

$$\nabla\varphi B\cdot B=H'\times(B\times G)+B\cdot HG'+e^{\varphi}[(B\times G)\times D'-B\cdot DG'], \tag{9}$$

где

$$B=G\times G'.$$

Уравнение неразрывности после простых преобразований дает нам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}B=\mu H'+(H\times V+\theta G)\times G'-e^{\varphi}[\mu D'+(D\times V)\times G']$$

или:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}B\cdot B=\mu H'\cdot B+[(H\times V+\theta G)\times G']\cdot B+e^{\varphi}[(V\times D)\times G'-\mu D']\cdot B. \quad (10)$$

Здесь возможны два случая: $B\neq 0$ и $B=0$.

Рассмотрим сначала случай, когда вектор $B$ отличен от нуля.

Пользуясь обозначениями:

$$\sigma'=\frac{H'\times(B\times G)+B\cdot HG'}{B\cdot B},\quad \lambda'=\frac{[(H\times V+\theta G)\times G']\cdot B+\mu H'\cdot B}{B\cdot B}$$

и вводя вектор $\alpha$ и скаляр $\beta$:

$$\alpha=\frac{(B\times G)\times D'-B\cdot DG'}{B\cdot B},\quad \beta=\frac{[(V\times D)\times G'-\mu D']\cdot B}{B\cdot B},$$

мы перепишем (9) и (10) уравнения в таком виде:

$$\nabla\varphi=\sigma'+e^{\varphi}\alpha$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\lambda'+e^{\varphi}\beta. \quad (11)$$

Применяя операцию дифференцирования по $t$ к первому уравнению, операцию градиента ко второму уравнению системы (11), мы получим, после простых преобразований:

$$e^{\varphi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'=0. \quad (12)$$

Возможны два случая:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\neq 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta=0. \quad (14)$$

При наличии условия (13) должно выполняться соотношение:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)\times\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'\right)=0.$$

В этом случае удельный объем можно определить из уравнения (12) после умножения его скалярно на $\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta$:

$$e^{\varphi}=\frac{\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'\right)\cdot\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)\cdot\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)}=n.$$

Условия динамической возможности движения класса незакручивающихся движений, происходящих при наличии соотношений:

$$G'\cdot D'=G'\cdot H'=0,\quad B\neq 0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\neq 0,$$

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta\right)\times\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'\right)=0.$$

суть следующие:

$$\sigma'+n\alpha=\frac{1}{n}\nabla n$$

$$\lambda'+n\beta=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t}. \quad (\mathrm{III})$$

В случае выполнения равенства (14), которое влечет за собой условие:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nabla\lambda' = 0$$

мы не можем определить удельный объем из уравнения (12).

Поступим следующим образом: возьмем вихрь от первого уравнения системы (11), после простых преобразований мы получим уравнение:

$$e^{\varphi}(\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)+\nabla\times\sigma'=0. \tag{15}$$

Если имеет место соотношение $\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha\neq 0$ (6), удельный объем вполне определится из последнего уравнения, после умножения его скалярно на $\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha$.

При выполнении условия (6) мы будем иметь:

$$(\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)\times\nabla\times\sigma'=0.$$

Условия динамической возможности движения класса незакручивающихся движений, удовлетворяющих условиям:

$$G'\cdot D'=G'\cdot H'=0,\quad B\neq 0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta=0,\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'=0$$

$$\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha\neq 0\quad (\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)\times(\nabla\times\sigma')=0$$

будут следующие:

$$\sigma'+n'\alpha=\frac{1}{n'}\nabla n' \tag{IV}$$

$$\lambda'+n'\beta=\frac{1}{n'}\frac{\partial n'}{\partial t},$$

где

$$n'=e^{\varphi}=-\frac{(\nabla\times\sigma')\cdot(\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)}{(\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)\cdot(\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha)}.$$

В случае $\nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha=0$, что влечет за собой и $\nabla\times\sigma'=0$, мы не можем определить удельный объем из (15). Поэтому обратимся непосредственно к системе (II). Легко показать, что эта система будет полной Якобиевой системой, при выполнении условий:

$$\nabla\times\sigma'=0,\qquad \nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha=0,\qquad \frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'=0,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'-\nabla\beta=0.$$

Таким образом условия динамической возможности движения в этом случае будут:

$$H'\cdot G'=D'\cdot G'=0,\quad B\neq 0,\quad \nabla\times\sigma'=0\quad \nabla\times\alpha+\sigma'\times\alpha=0,\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'=0,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha\lambda'-\beta\sigma'=\nabla\beta=0. \tag{V}$$

Причем удельный объем определится из полной Якобиевой системы (II).

Перейдем теперь к случаю, когда вектор

$$B=G\times G'=0, \tag{16}$$

причем положим, что динамический градиент $G\neq 0$. Из (16) следует существование такого скаляра $k$, что

$$G'=kG.$$

В этом случае удельный объем определится из системы уравнений:

$$\nabla\varphi \times G = e^{\varphi} D - H$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V \cdot \nabla\varphi = 0. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что эта система является полной Якобиевой системой в силу условий:

$$G \cdot H = G \cdot D = 0, \quad B = G \times G' = 0 \text{ или } G' = kG \text{ и } D' = kD,$$

причем скаляр $k$ необходимо должен удовлетворять условию $\nabla k \times G = 0$, что непосредственно следует из (7).

Таким образом условиями необходимыми и достаточными для динамической возможности движения, когда вектор $B = 0$, но $G \neq 0$, являются условия:

$$G \cdot H = G \cdot D = 0, \quad G' = kG, \quad D' = kD, \quad \nabla k \times G = 0. \tag{VI}$$

При этом удельный объем определяется из полной Якобиевой системы (17).

Остается рассмотреть последний случай, когда динамический градиент обращается в нуль.

В этом случае из основного уравнения (3) получается, что и вектор $D$ равен нулю. Удельный объем определится из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V \cdot \nabla\varphi = 0.$$

Следовательно единственными условиями, накладываемыми на скорость, в этом последнем случае будут:

$$G = 0, \quad D = 0. \tag{VII}$$

В качестве приложения изложенного метода, рассмотрим чисто зональное нестационарное движение безграничной жидкости. При этом будем считать, что скорость зависит только от времени $t$ и от расстояния $r$ до вертикальной оси $z$, и не зависит от высоты $z$.

Кроме того будем считать, что объемные силы отсутствуют. Для простоты вычисления будем вести в цилиндрических координатах. Ось $z$ направим вертикально вверх. Примем, что компоненты скорости $V$ на оси цилиндрической системы выражаются так:

$$v_r = 0, \quad v_\vartheta = n(r)\,\zeta(t), \quad v_z = 0,$$

где $n$ — функция одного $r$ и $\zeta$ — функция одного $t$.

Составляющие основных векторов по осям в нашем движении будут:

$$G_r = \frac{n^2\zeta^2}{r}, \quad G_\vartheta = -n\frac{d\zeta}{dt}, \quad G_z = 0, \quad H_r = H_\vartheta = 0, \quad H_z = \frac{d\zeta}{dt}\,\frac{1}{r}\,\frac{dnr}{dr},$$
$$S_r = S_z = 0, \quad S_\vartheta = \eta\zeta\frac{d}{dr}\,\frac{1}{r}\,\frac{dnr}{dr}, \quad D_r = D_\vartheta = 0,$$
$$D_z = \frac{\eta\zeta}{r}\,\frac{d}{dr}\,r\frac{d}{dr}\,\frac{1}{r}\,\frac{dnr}{dr}.$$

Условия $G \cdot H = 0$ и $G \cdot D = 0$ выполняются сами собой, так что закручивающиеся движения рассматриваемого вида не имеют места.

Далее, составляя вектора $G'$, $H'$ и $D'$:

$$G_r' = \frac{3n^2\zeta}{r}\,\frac{d\zeta}{dt} - n\zeta\frac{dn}{dr}\,\frac{d\zeta}{dt}, \quad G_\vartheta' = -n\frac{d^2\zeta}{dt^2}, \quad G_z' = 0, \quad H_r' = H_\vartheta' = 0,$$
$$H_z' = \frac{1}{r}\,\frac{dnr}{dr}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}, \quad D_r' = D_\vartheta' = 0, \quad D_z' = \frac{\eta}{r}\,\frac{d}{dr}\,r\frac{d}{dr}\,\frac{1}{r}\,\frac{dnr}{dr}\,\frac{d\zeta}{dt},$$

мы видим, что и условия $G'\cdot H'=0$, $G'\cdot D'=0$ также выполняются сами собой. Следовательно, и движения II категории не имеют места.

Перейдем теперь к III и IV категориям. Составим для этого вектор $B$.

$$B_r=B_\vartheta=0\quad B_z=-\frac{n^3\zeta}{r}\frac{d^2\zeta}{dt}+\frac{3n^3\zeta}{r}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2-n^2\zeta\frac{dn}{dr}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\neq 0.$$

Составляя далее вектор $\sigma'$ и скаляр $\lambda'$:

$$\sigma_r'=\frac{1}{nr}\frac{dnr}{dr},\qquad \sigma_\vartheta'=\sigma_z'=0,\qquad \lambda'=0$$

мы убеждаемся, что выполняются условия:

$$\nabla\times\sigma'=0\quad \text{и}\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\nabla\lambda'=0.$$

Следовательно наше движение не может принадлежать ни к III ни к IV категории.

Обратимся к V категории движения.

В этом случае для определения функции $\varphi=\ln\omega$ будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial r}&=\alpha_r e^\varphi+\sigma'_r\\ 0&=\alpha_\vartheta e^\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}&=\beta e^\varphi.\end{aligned}\tag{18}$$

Так как $e^\varphi\neq 0$, необходимо положить, что $\alpha_\vartheta=0$, т. е.

$$\alpha_\vartheta=\frac{n}{B_z}\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dnr}{dr}\left[\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]=0.$$

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Положим сначала, что

$$\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=0.$$

Откуда $\zeta=c_2e^{c_1t}$, где $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные. В этом случае скаляр $\beta=0$, все условия V категории выполняются сами собой. Кроме того $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, т. е. распределение плотности не зависит от времени $t$.

Уравнение $\frac{d\varphi}{dr}=\alpha_re^\varphi+\sigma_r'$ вместе со вторым уравнением Navier-Stokes'а (давление мы считаем не зависящим от $\vartheta$) дает нам распределение плотностей в нашем движении:

$$\rho=\frac{\eta}{c_1n}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dnr}{dr}.$$

Функция $n$ остается произвольной.

Давление получаем квадратурой из уравнений (1).

$$p=\frac{\eta}{c_1}\zeta^2\int nr\frac{d^2nr}{d\xi^2}d\xi+p_0(t),$$

где $\xi=\frac{r^2}{2}$, и $p_0(t)$ — произвольная функция времени $t$.

Случай 2. В этом случае необходимо положить:

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dnr}{dr}=c_1,$$

откуда:

$$nr=\frac{c_1}{2}r^2\ln r+\frac{c_2-c_1}{2}r^2+c_3.$$

Далее, сравнивая значение $\rho$, полученное из уравнения 1-го системы (18), со значением $\rho$, полученным из 2-го уравнения движения, мы получаем выражение для функции $\zeta$:

$$\zeta = c_3 e^{c_4 c_1 \eta t}.$$

Распределение плотностей в нашем движении будет следующее:

$$\rho = \frac{1}{c_4 n r},$$

а распределение давления:

$$p = \frac{\zeta^2}{c_4} \int \frac{nr}{r^3}\, dr + p_0(t).$$

Решение содержит пять произвольных постоянных.

Обратимся теперь к VI категории. В этом случае необходимо положить:

$$B_z = -\frac{n^3\zeta}{r}\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{3n^3\zeta}{r}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - n^2\zeta\frac{dn}{dr}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = 0.$$

Из этого условия, принимая во внимание уравнение неразрывности, т. е. что $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, получаем выражения для функций $n$ и $\zeta$:

$$n = c_2 r^2, \qquad \zeta = c_4 e^{c_3 t}.$$

Распределение плотностей в этой категории определится первым уравнением системы (17) и вторым уравнением гидродинамики:

$$\rho = \frac{3\eta}{c_3 r^2}.$$

Давление определяем квадратурой:

$$p = \frac{3\eta c_2^2}{2c_3}\zeta^2 r^2 + p_0(t).$$

Решение содержит три произвольных постоянных.

Наконец безградиентное движение данного вида существовать не может.

## CONDITIONS DE LA POSSIBILITÉ DYNAMIQUE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX ET COMPRESSIBLE

*E. Blinova* et *E. Okhlopkova* (*Léningrad*)

### Résumé

Le présent article est un exposé d'une nouvelle méthode pour trouver les conditions de la possibilité dynamique du mouvement d'un fluide visqueux et compressible (c. à. d. des conditions qu'il est nécessaire de superposer sur le champ des vitesses pour que l'on puisse ensuite déterminer la pression et la densité selon les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité). Tous les mouvements sont classés en 7 cathégories selon le type des équations a l'aide desquelles on trouve la densité, la pression étant éliminée des équations de Navier-Stokes. Le point de départ de cette étude est la construction des équations analogues aux équations de Navier-Stokes (I) ($p$ — pression, $\varphi$ — le logarithme du volume spécifique $\omega$, $G = F - \frac{dV}{dt}$, $F$ — force, $V$ — vitesse,

$S = \eta(\nabla^2 V + \frac{1}{3} \Delta\theta)$, $\eta$ — le coefficient de la viscosité, $\theta = \nabla \cdot V$), mais dans les quelles au lieu de la pression $p$ entre $\frac{dp}{dt}$; au lieu de $G$ un nouveau vecteur $G' = \frac{dG}{\partial t} + \nabla\mu - H \times V - \theta G$ et au lieu de $S$ un vecteur $S'$ tel que $\nabla \times S' = D' = \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \times (D \times V)$. Le groupement ultérieur des mouvements en classes doit être effectué (dans l'essentiel) selon que le vecteur $B = G \times G'$ s'annulle ou non. L'étude est illustrée par un exemple.