К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ИЗГИБУ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

П. Ф. Папкович (*Ленинград*)

1. Вопрос о сходимости процесса последовательных интегрирований применительно к расчету балок, лежащих на сплошном упругом основании переменной жесткости, может быть исследован совершенно так же, как то сделано А. Н. Крыловым[1] в отношении балок, для которых жесткость упругого основания k по всей длине балки одинакова.

В самом деле пусть требуется проинтегрировать уравнение: [2]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+c^2\theta(x)\cdot y=F(x). \tag{1}$$

Переписав его правую часть в форме:

$$F(x)=\theta(x)\cdot f(x),$$

допустим, что $f(x)$ разложено в ряд:

$$f(x)=\sum_k A_kX_k \tag{2}$$

по функциям X_k, удовлетворяющим уравнениям:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2X_k}{dx^2}\right]-\frac{\mu_k^4}{l^4}\theta(x)X_k=0. \tag{3}$$

и всем граничным условиям задачи.

Допустив, что y может быть найдено в форме такого же ряда:

$$y=\sum_k B_kX_k,$$

нетрудно из основного уравнения (1) получить:

$$B_k=\frac{A_kl^4}{\mu_k^4+c^2l^4},$$

что дает для y выражение:

$$y=l^4\sum_k\frac{A_kX_k}{\mu_k^4+c^2l^4}, \tag{4}$$

совершенно аналогичное тому, которое для балок, у коих $\theta(x)=\text{const}$, приведено у А. Н. Крылова. Функцию y можно было бы вычислять с помощью равенств (2) и (4), если бы X_k были нам известны.

---

[1] См. А. Н. Крылов. О расчете балок на сплошном упругом основании. Изд. В. А. Н. 1931. § 20, 25, 26, 27.

[2] Предполагается, что в уравнении (1) величина c подобрана так, что минимальное значение функции $\theta(x)$ есть 1.

2. Попробуем теперь разыскать y с помощью процесса последовательных четырехкратных интегрирований, исходя из зависимости:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\sum_k A_k\theta(x)X_k-c^2\theta(x)\cdot y.$$

Для первого приближения отбросим второй член правой части. Пусть y_0 — функция, определяемая дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_0}{dx^2}\right]=\sum_k A_k\theta(x)X_k \tag{5}$$

и всеми граничными условиями задачи.

Для второго приближения примем:

$$y=y_0+y_1,$$

где y_1 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_1}{dx^2}\right]=-c^2\theta(x)y_0 \tag{6}$$

и опять-таки всем граничным условиям.

За третье приближение можно принять:

$$y=y_0+y_1+y_2,$$

где y_2 должно быть найдено из уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_2}{dx^2}\right]=-c^2\theta(x)y_1 \tag{7}$$

и так далее. Вообще будем считать, что между y_{n+1} и y_n существует зависимость:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_{n+1}}{dx^2}\right]=-c^2\theta(x)y_n. \tag{8}$$

Обозначив операцию нахождения y по заданному z с помощью уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\theta(x)\cdot z \tag{9}$$

и всех граничных условий задачи знаком $L(z)$, можем выписать связь между y и z, даваемую равенством (9), в форме равенства:

$$y=L(z)$$

где очевидно:

$$L(z)=\iint\frac{1}{\sigma(x)}\iint\theta(x)\cdot z\cdot dx^4, \tag{10}$$

причем постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий задачи. Равенства (6), (7) и (8) перепишутся при этом так:

$$\left.\begin{aligned}y_0&=L(f(x))\\ y_1&=-c^2L(y_0)\\ y_2&=-c^2L(y_1)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{n+1}&=-c^2L(y_n);\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

из уравнения же (3) можно будет получить:

$$\theta(x)X_k=\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2X_k}{dx^2}\right]\frac{l^4}{\mu_k^4},$$

что после выполнения над общими частями операции, определяемой символом $L(\ )$, дает:

$$L(X_k)=\frac{l^4}{\mu_k^4}X_k. \tag{12}$$

Приняв теперь, что

$$f(x)=\sum_k A_k X_k,$$

можем с помощью равенств (11) и (12) видеть, что:

$$y_0=\sum_k A_k \frac{l^4}{\mu_k^4} X_k$$

$$y_1=-\sum_k A_k \frac{c^2l^8}{\mu_k^8} X_k$$

$$y_2=\sum_k A_k \frac{c^4l^{12}}{\mu_k^{12}} X_k$$

. . . .

. . . .

$$y_n=(-1)^n\sum_k A_k \frac{1}{c^2}\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^{n+1} X_k.$$

Рассматриваемый итеративный процесс дает нам таким образом:

$$y=\sum_k A_k\frac{l^4}{\mu_k^4}\left[1-\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}+\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^2-\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^3+\ldots\right]X_k, \tag{13}$$

что можно было бы получить и непосредственно из формулы (4), разложив дробь:

$$\frac{l^4}{\mu_k^4+c^2l^4}$$

в ряд по степеням отношения $\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}$.

3. При c^2 достаточно малом все ряды:

$$1-\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}+\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^2-\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^3+\ldots \tag{14}$$

получаются при всяком k сходящимися, и рассмотренный процесс последовательных интегрирований есть процесс сходящийся.

Если

$$\frac{l^4}{\mu_1^4}\leqslant c^2\leqslant\frac{l^4}{\mu_2^4}<\frac{l^4}{\mu_3^4}<\ldots,$$

то ряд (14) сходится при всяком k кроме $k=1$.

Если

$$\frac{l^4}{\mu_1^4}<\frac{l^4}{\mu_2^4}\leqslant c^2\leqslant\frac{l^4}{\mu_3^4}<\frac{l^4}{\mu_4^4}<\ldots,$$

то ряд (14) сходится только при k большем, чем 2.

Вообще ряд (14) оказывается сходящимся только при тех k, для которых

$$c^2<\frac{l^4}{\mu_k^4}.$$

Поэтому только при достаточно малых значениях c^2 в ряду (13) все коэффициенты при X_k получаются сходящимися. По мере возрастания величины c^2, т. е. жесткости упругого основания, сначала ряд, входящий множителем к X_1, затем ряд, входящий в коэффициент при X_2 и т. д. оказываются рядами расходящимися, и в ряду

$$y_k = \sum_k B_k X_k \tag{15}$$

сначала один, потом два, затем три, четыре и т. д. первых коэффициентов B_k перестают в процессе последовательных интегрирований стремиться к конечным пределам.

В ряду (15) эти первые несколько коэффициентов должны быть разысканы особо, и только совокупность всех остальных членов ряда (15) может быть найдена тем процессом последовательных интегрирований, который был нами рассмотрен выше.

4. Для того чтобы показать, каким образом следует находить коэффициенты ряда (15) в том случае, когда процесс последовательных приближений получается расходящимся, рассмотрим, следуя А. Н. Крылову, разность между точным значением искомой функции y и результатом n-го приближения, то есть величину η_n, определяемую зависимостью:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \eta_n.$$

Сопоставляя полученные выше для функций $y, y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ ряды, нетрудно видеть, что η_n, остаточный член ряда (13), может быть представлен рядом:

$$\eta_n = (c^2 l^4)^{n+1} \sum_k \frac{A_k X_k}{\mu_k^{4n}(\mu_k^4 + c^2 l^4)} (-1)^{n+1}, \tag{16}$$

который неопределенно убывает с увеличением n только в том случае, если

$$\frac{c^2 l^4}{\mu_k^4} < 1$$

при всяком k. В том случае, когда, например,

$$\mu_1^4 < \mu_2^4 < c^2 l^4 < \mu_3^4 < \mu_4^4 < \dots$$

в выражении для η_n с увеличением n неопределенно убывают только все члены начиная с третьего. Коэффициенты при $X_1 = X_2$ в ряду (16) в этом случае неопределенно возрастают.

При этом первый член ряда (16) при увеличении и возрастает быстрее второго и при достаточно большом n все члены ряда (16) становятся малыми по сравнению с первым членом этого ряда, но не все они малы абсолютно. Поэтому хотя величина η_n и может быть приближенно принимаема за

$$(-1)^{n+1} \frac{A_1 X_1}{\mu_1^{4n}(\mu_1^4 + c^2 l^4)} (c^2 l^4)^{n+1},$$

но разность величин η_n и первого члена ряда (16) не всегда мала. В самом деле:

$$\eta_n - \frac{A_1 X_1 (c^2 l^4)^{n+1} (-1)^{n+1}}{\mu^{4n}(\mu_1^4 + c^2 l^4)} = \frac{A_2 X_2 (c^2 l^4)^{n+1} (-1)^{n+1}}{\mu_2^{4n}(\mu_2^4 + c^2 l^4)} + \sum_k \frac{A_k X_k (c^2 l^4)^{n+1} (-1)^{n+1}}{\mu_k^{4n}(\mu_k^4 + c^2 l^4)}$$

и если $c^2 l^4 > \mu_2^4$, то разность

$$\eta_n - \frac{A_1 X_1 (c^2 l^4)^{n+1})}{\mu_1^{4n}(\mu_1^4 + c^2 l^4} (-1)^{n+1}$$

становится при n бесконечно большом бесконечно велика.

Приняв поэтому при c^2 большом величину η_n просто за

$$(-1)^{n+1}\frac{A_1X_1(c^2l^4)^{n+1}}{\mu_1^{4n}(\mu_1^4+c^2l^4)},$$

мы можем в вычислении y сделать иногда ошибку совершенно недопустимую.

Принимать за η_n первый член ряда (16) можно таким образом только тогда, если

$$c^2l^4<\mu_2^4<\mu_3^4<\mu_4^4<\ldots$$

Если при c^2l^4, лежащем в пределах

$$\mu_2^4<c^2l^4<\mu_3^4,$$

мы в ряду (16) отбросим все члены ряда кроме первого, то сумма

$$y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n+\eta_n$$

будет отличаться от точного значения величины y приблизительно на

$$\frac{(c^2l^4)^{n+1}A_2X_2}{\mu_2^4(\mu_2^4+c^2l^4)}(-1)^{n+1},$$

что при n достаточно большом может быть сколь угодно велико.

5. Теперь спрашивается, с помощью какого же процесса можно найти оба первых члена ряда (15), если c^2l^4 лежит в пределах

$$\mu_2^4<c^2l^4<\mu_3^4$$

и как вообще следует пользоваться методой последовательных приближений в этом случае. Ответить на этот вопрос можно так: поступать в этих случаях следует приблизительно так, как приходится поступать при разыскании функций X_k с помощью методы последовательных приближений, а именно: заметив, что величина y_n с увеличением n непрерывно растет, мы продолжаем ее находить с помощью методы последовательных интегрирований до тех пор, пока не окажется, что отношение функций y_n и y_{n+1} от x не зависит.

Это может случиться только тогда, когда в ряду

$$y_n=(-1)^n\sum_k\frac{1}{c^2}\left(\frac{c^2l^4}{\mu_k^4}\right)^n X_kA_k$$

первый член ряда станет бесконечно велик по сравнению со всеми прочими.

Приняв тогда приближенно

$$y_n=(-1)^n\frac{1}{c^2}\left(\frac{c^2l^4}{\mu_1^4}\right)^n X_1A_1$$

и

$$y_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{1}{c^2}\left(\frac{c^2l^4}{\mu_1^4}\right)^{n+1} X_1A_1,$$

мы можем получить:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=-\frac{c^2l^4}{\mu_1^4}=-K_1. \tag{17}$$

Определив с помощью этого соотношения величину K_1, мы можем найти A_1X_1 по формуле:

$$A_1X_1=(-1)^n\frac{c^2y_n}{K_1^n}. \tag{18}$$

Первый член ряда (2) и соответствующее ему значение величины μ_1 будут таким образом найдены, и мы можем за первый член ряда (16) непосредственно принять:

$$\frac{A_1 X_1 l^4}{\mu_1^4 + c^2 l^4} = -\frac{c^2 l^4}{\mu_1^4 + c^2 l^4} y_n.$$

6. Для получения второго члена ряда (2) поступаем так:

а) сначала очищаем функцию $f(x)$ от присутствия в ней первого члена ряда (2); для этого вводим в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = f(x) - A_1 X_1 = \sum_{k=2}^{k=\infty} A_k X_k;$$

б) вместо функции y вводим в рассмотрение функцию

$$z = y - \frac{A_1 X_1 l^4}{\mu_1^4 + c^2 l^4}.$$

Ясно, что между z и $\varphi(x)$ должна существовать зависимость:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2 z}{dx^2}\right] + c^2\,\theta(x)\cdot z = \theta(x)\,\varphi(x).$$

Разыскиваем после этого функцию z с помощью методы последовательных интегрирований, как было указано выше.

Получаем

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \zeta_n$$

где по сказанному выше должно быть

$$z_0 = \sum_{k=2}^{k-a} A_k \frac{l^4}{\mu_k^4} X_k$$

$$z_1 = -\sum_{k=2}^{k=\infty} A_k \frac{c^2 l^8}{\mu_k^8} X_k$$

$$z_2 = +\sum_{k=2}^{k=\infty} A_k \frac{c^4 l^{12}}{\mu_k^{12}} X_k$$

. . . .

. . . .

$$z_n = (-1)^n \sum_{k=2}^{k=\infty} A_k \left(\frac{c^2 l^4}{\mu_k^4}\right)^{n+1} \frac{1}{c^2} X_k$$

и

$$\zeta_n = (c^2 l^4)^{n+1} \sum_{k=2}^{k=\infty} \frac{A_k X_k (-1)^{n+1}}{\mu_k^{4n}(\mu_k^4 + c^2 l^4)}.$$

При c^2, лежащем в пределах

$$\mu_2^4 < c^2 l^4 < \mu_3^4,$$

с увеличением n величина z_n неопределенно возрастает. Так как первый член ряда в ее выражении растет, все же остальные убывают, то при достаточно большом n:

$$z_n \approx (-1)^n A_2 \left(\frac{c^2 l^4}{\mu_2^4}\right)^n \frac{1}{c^2} X_2$$

$$z_{n+1} \approx (-1)^{n+1} A_2 \left(\frac{c^2 l^4}{\mu_2}\right)^{n+1} \frac{1}{c^2} X_2$$

и следовательно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z_{n+1}}{z_n} = -\frac{c^2 l^4}{\mu_2^4} = -K_2, \\ &\text{а} \\ &A_2 X_2 \approx c^2 \frac{z_n}{K_2^n}(-1)^n. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Зная второй член ряда, в который разлагается функция $f(x)$, находим второй член ряда (16). Он есть очевидно

$$\frac{A_2 X_2 l^4}{\mu_2^4 + c^2 l^4} = -\frac{c^2 l^4}{\mu_2^4 + c^2 l^4} z_n.$$

Остальные члены ряда (15) найдутся непосредственным последовательным интегрированием уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2 t}{dx^2}\right] + c^2 \theta(z) \cdot t = \theta(x) \cdot \chi(x), \qquad (20)$$

где

$$\chi(x) = \varphi(x) - A_2 X_2,$$

а

$$t = z - \frac{A_2 X_2}{\mu_2^4 + c^2 l^4} \cdot l^4$$

Если $c^2 l^4 < \mu_3^4$, то процесс последовательных интегрирований уравнения (20) есть процесс сходящийся и дает для t конечное значение.

Искомая функция y после этого может быть найдена с помощью выражения

$$y = \frac{A_1 X_1 l^4}{\mu_1^4 + c^2 l^4} + \frac{A_2 X_2 l^4}{\mu_2^4 + c^2 l_4} + t,$$

где $A_1 X_1$ и $A_2 X_2$ определяются равенствами (18) и (19).

7. Разыскание величины y этим путем хотя и возможно при всяком c, но вообще весьма мешкотно. При выполнении выкладок следует следить за тем, чтобы неизбежные в процессе последовательных интегрирований погрешности не ввели в ряды для y_n члена, пропорционального X_1, в ряды же для X_k — чтобы не получилось членов, пропорциональных X_2 и т. д. Поэтому результат каждого последовательного интегрирования следует очищать от присутствия в нем этих членов. Это всегда возможно выполнить, если вспомнить, что функции X_k должны удовлетворять зависимости:

$$\int_0^l \theta(x) X_k X_n dx = 0$$

при всяком k и n, друг другу неравных, то есть если воспользоваться взаимной ортогональностью функций X_k.

Резюме

В настоящей заметке показано, что

1. Метода последовательных интегрирований применима к нахождению упругой линии балок, лежащих на сплошном упругом основании не только постоянной, но и переменной жесткости.

2. В случае, если в основном уравнении (1) постоянная c достаточно велика, так что $c^2 l^4$ превышает не только основное, но скажем еще и второе из характеристических чисел μ_n^4, процесс последовательных приближений не может быть использован для нахождения упругой линии балки в том самом виде, как и в случае, когда

$$\mu_1^4 < c^2 l^4 < \mu_2^4,$$

и указаны те видоизменения, которые должны быть внесены в процесс разыскания искомой упругой линии с помощью метода последовательных приближений в этих случаях.

ÜBER DIE ANWENDUNG DER METHODE DER SUKZESSIVEN APPROXIMATIONEN ZUR ERMITTELUNG DER ELASTISCHEN LINIE EINES AUF ELASTISCHER UNTERLAGE LIEGENDEN BALKENS

Von *P. F. Papkowitsch* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf das Problem des auf elastischer Unterlage liegenden Balkens wird in dem Buche von A. N. Krylow „Berechnung der auf elastischer Unterlage liegenden Balken" (Leningrad 1930 russ.) eingehend erörtert. Dabei wird in dem Krylow'schen Buche lediglich auf den Fall einer elastischen Unterlage von konstanter Steifigkeit Bezug genommen. In vorliegendem Aufsatze wird dasselbe Verfahren auf den allgemeineren Fall eines auf elastischer Unterlage von veränderlicher Steifigkeit liegenden Balkens ausgedehnt. Auch der Fall, wenn, infolge der zu grossen Steifigkeit der Unterlage, der gewöhnliche Iterationsprozess sich als divergent ergibt, ist hier ausführlich besprochen.