ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ ОДНОСВЯЗНОЙ И ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ[1]

Д. М. Волков и *А. А. Назаров* (*Ленинград*)

I. Граничная задача теории функций

1. Пусть имеем единичный круг γ в плоскости Z, описанный вокруг начала. ζ — точка контура. Требуется найти все регулярные внутри γ пары функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, которые имеют граничные значения, удовлетворяющие условию

$$\alpha(\zeta)\varphi^n(\zeta)+\overline{\alpha'(\zeta)\varphi^n(\zeta)}+\beta(\zeta)\varphi^{n-1}(\zeta)+\overline{\beta'(\zeta)\varphi^{n-1}(\zeta)}+\ldots+\delta(\zeta)\varphi(\zeta)+$$
$$+\overline{\delta'(\zeta)\varphi(\zeta)}+c(\zeta)\psi(\zeta)+\overline{c'(\zeta)\psi(\zeta)}=f+iv, \tag{A}$$

где α, α', β, β' δ, δ' c, c' однозначные коэффициенты,[2] вообще говоря, раз рывные функции от ζ, заданные аналитическим выражением (например, алгебраической формулой), которое при продолжении внутрь дает конечное число каких-нибудь особых точек[3] (полюса, разветвления, существенно особые и т. д.), а f и v вещественные, имеющие простые[4] разрывы, функции точки контура.

2. Введем функции

$$\alpha(z),\ \alpha'(z),\qquad c(z),\ c'(z) \tag{1}$$

представляющие аналитическое продолжение внутрь контурных коэффициентов $\alpha(\zeta)$, $\alpha'(\zeta)\ldots c(\zeta)$, $c'(\zeta)$ (они вычисляются по тем же аналитическим формулам, что и на контуре) и рассмотрим выражение

$$\alpha(z)\varphi^n(z)+\alpha'(z)\varphi^n(z)+\ \ldots\ +c(z)\psi(z)+c'(z)\psi(z). \tag{2}$$

Если решение поставленной задачи существует, то написанное выражение представляет собою аналитическую функцию, имеющую особенности в тех же точках и того же характера, что и у коэффициентов (1).

Пусть, например, какой-нибудь коэффициент имеет в a полярность порядка k. Тогда выражение (2) будет иметь в этой точке особенность вида:

$$\frac{A_k}{(z-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(z-a)^{k-1}}+\ \ldots\ +\frac{A_1}{z-a}, \tag{3}$$

где A_k, $A_{k-1}\ldots A_1$, есть неизвестные числа.

---

[1] Часть данной работы, именно общий метод, была опубликована в 40 томе Математического сборника. Приложения, которые там были даны, относятся только к случаю односвязной области. Здесь же основное внимание обращено на случай двусвязной области.

[2] Указанное ограничение на коэффициенты, также как и то, что за область (γ) взят единичный круг, не является существенным в дальнейшем, как увидит читатель, а делается просто для определенности.

[3] Избегая неопределенности, связанной со словами аналитическое выражение, и говоря более строго коэффициенты $\alpha(\zeta)$ $\alpha'(\zeta),\ldots\beta(\zeta)$ $\beta'(\zeta),\ldots c(\zeta)$ $c'(\zeta)$ определены в замкнутом круге и имеют внутри конечное число особых точек, их же предельные значения на контуре однозначны.

[4] Т. е. имеется предел справа и слева и значение функции в точке разрыва совпадает с одним из них.

Если нам путем введения неизвестных параметров удалось построить простую функцию, вполне характеризующую особенность выражения (2), то ее мы будем обозначать через $G(z)$, и ее особенность [(иначе говоря особенность выражения (2)] будем называть особенностью (3).

Итак, если решение задачи существует, (2) представляет собою аналитическую функцию, имеющую особенность внутри γ характера (3) и вещественную часть на контуре, равную f. Значит оно будет регулярным решением дифференциального уравнения.

$$[\alpha(z)+\alpha'(z)]\,\varphi^n(z)+[\beta(z)+\beta'(z)]\,\varphi^{n-1}(z)+\ldots+[c(z)+c'(z)]\,\psi(z)=W(z), \quad (2^*)$$

где W — одна из аналитических функций, имеющих внутри γ особенность (3) и на контуре — вещественную часть, совпадающую с f.

Если удалось построить $G(z)$, характеризующую особенности, такую, что ее вещественная часть нуль на контуре (она всегда существует), то

$$W=G(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f}{\zeta}\,d\zeta.$$

Представим исходное равенство (A) в виде:

$$(\alpha-\alpha')\,\varphi^n+(\beta-\beta')\,\varphi^{n-1}+\ldots+(\delta-\delta')\,\varphi+(c-c')\,\psi+2R\,[\alpha'\varphi^n+\beta'\varphi^{n-1}+$$
$$+\ldots+c'\psi]=f+iv$$

(R перед скобкой обозначает, что берется только вещественная часть).

Усматриваем, что если решение существует, то выражение

$$(\alpha-\alpha')\,\varphi^n+(\beta-\beta')\,\varphi^{n-1}+\ldots+(\delta-\delta')\,\varphi+(c-c')\,\psi \quad (4)$$

представляет собою аналитическую внутри, имеющую в тех же точках, что и у коэффициентов некоторую особенность 3*, функцию с мнимой частью, на контуре равною iv. Обозначим такую функцию через $\chi(z)$. Значит решение, кроме (2), внутри γ удовлетворяет:

$$\big(\alpha(z)-\alpha'(z)\big)\,\varphi^n(z)+\ldots+\big(c(z)-c'(z)\big)\,\psi(z)=\chi(z)$$

при некотором частном выборе $\chi(z)$ выше указанного характера.

Т. е. если решение поставленной задачи существует, то оно является регулярным решением системы

$$\begin{aligned}&(\alpha+\alpha')\,\varphi^n+(\beta+\beta')\,\varphi^{n-1}+\ldots+(c+c')\,\psi=W(z)\\&(\alpha-\alpha')\,\varphi^n+(\beta-\beta')\,\varphi^{n-1}+\ldots+(c-c')\,\psi=\chi(z).\end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно и наоборот, если удалось найти пару регулярных функций, удовлетворяющую системе (5), то тем самым будет на контуре выполнено (A), ибо тождественно

$$\frac{(\alpha+\alpha')\,\varphi^n+\overline{(\alpha+\alpha')\,\varphi^n}+(\beta+\beta')\,\varphi^{n-1}+\overline{(\beta+\beta')\,\varphi^{n-1}}+\ldots+(c+c')\,\psi+\overline{(c+c')\,\psi}}{2}+$$
$$+\frac{(\alpha-\alpha')\,\varphi^n-\overline{(\alpha-\alpha')\,\varphi^n}+\ldots+(c-c')\psi-\overline{(c-c')\psi}}{2}=\alpha\varphi^n+\overline{\alpha'\varphi^n}+\ldots+c\psi+\overline{c'\psi}$$

и если на контуре в силу (5)

$$R\,[(\alpha+\alpha')\,\varphi^n+\ldots(c+c')\,\psi]=$$
$$=\frac{(\alpha+\alpha')\,\varphi^n+\overline{(\alpha+\alpha')\,\varphi^n}+\ldots+(c+c')\,\psi+\overline{(c+c')\psi}}{2}=RW=f$$
$$I\,[(\alpha-\alpha')\,\varphi^n+(\beta-\beta')\,\varphi^{n-1}+\ldots+(c-c')\,\psi]=I\chi=iv,$$

где I — символ мнимой части.

Следовательно первый член левой части равенства (6) обращается в f, а второй в iv, и значит выполняется (A).

Таким образом решение задачи свелось к формальному решению системы (5) и подбору произвольных постоянных, входящих в W и χ и появившихся при интегрировании (5) так, чтобы оба компонента решения φ и ψ были регулярны.

3. В случае, когда коэффициенты (1) оказываются имеющими внутри γ только конечное число полюсов, проще не решать задачу сразу, а подвергнуть условие (A) предварительному преобразованию.

Очевидно, что коэффициент $\alpha(\zeta)$ разбивается:

$$\alpha(\zeta)=\frac{\alpha_1(\zeta)}{P_\alpha(\zeta)};\quad \overline{\alpha'(\zeta)}=\frac{\overline{\alpha_1'(\zeta)}}{\overline{P_{\alpha'}(\zeta)}},$$

где α_1 — граничное значение регулярной внутри γ функции и $P_\alpha(\zeta)$ есть полином, характеризующий полярность внутри γ.

Точно так же:

$$\begin{array}{l} \beta(\zeta)=\dfrac{\beta_1(\zeta)}{P_\beta(\zeta)};\quad \overline{\beta'(\zeta)}=\dfrac{\overline{\beta_1'(\zeta)}}{\overline{P_{\beta'}(\zeta)}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta(\zeta)=\dfrac{\delta_1(\zeta)}{P_\delta(\zeta)};\quad \overline{\delta'(\zeta)}=\dfrac{\overline{\delta_1'(\zeta)}}{\overline{P_{\delta'}(\zeta)}} \\ c(\zeta)=\dfrac{C_1(\zeta)}{P_c(\zeta)};\quad \overline{c'(\zeta)}=\dfrac{\overline{c_1'(\zeta)}}{\overline{P_{c'}(\zeta)}} \end{array} \qquad (P)$$

Заметим, что сопряженная, на окружности единичного круга, полиному функция есть некоторый полином от $\frac{1}{\zeta}$, так как

$$\zeta=e^{i\varphi} \text{ и } \overline{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$$

$$\overline{A_o\zeta^n+\ldots+A_n}=\overline{A}_o\frac{1}{\zeta^n}+\ldots+\overline{A}_n.$$

Вставляя из (P) в (A) выражение коэффициентов и освобождаясь от знаменателей, получим равносильное условию (A) контурное условие для φ и ψ:

$$\alpha_2\varphi^n+\alpha_2'\overline{\varphi^n}+\ldots+\delta_2\varphi+\delta_2'\overline{\varphi}+c_2\psi+c_2'\overline{\psi}=f_2+iv_2, \qquad (A^*)$$

где

$$\alpha_2=\alpha_1\zeta\,\overline{P_{\alpha'}(\zeta)}\,P_\beta(\zeta)\,\overline{P_{\beta'}(\zeta)}\ldots P_c\overline{P_{c'}(\zeta)}=$$

$$=\alpha_1(\zeta)\,Q_{\alpha'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)P_\beta(\zeta)\,Q_{\beta'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\ldots P_c(\zeta)\,Q_{c'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$\alpha_2'=\overline{\alpha_1'(\zeta)}\,P_\alpha(\zeta)\,P_\beta(\zeta)\,\overline{P_{\beta'}(\zeta)}\ldots P_c\overline{P_{c'}(\zeta)}=$$

$$=\overline{\alpha_1'(\zeta)}\,P_\alpha(\zeta)\,P_\beta(\zeta)\,Q_{\beta'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\ldots P_c(\zeta)\,Q_{c'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$f_2+iv=(f+iv)\,P_\alpha(\zeta)\,\overline{P_{\alpha'}(\zeta)}\ldots P_\delta(\zeta)\,\overline{P_{\delta'}(\zeta)}\,P_c(\zeta)\,\overline{P_{c'}(\zeta)},$$

$Q_\alpha\ldots Q_c$ суть полиномы от $\frac{1}{\zeta}$.

Очевидно $\alpha_2\,\alpha_2'\ldots c_2\,c_2'$ (1*) известные в замкнутом γ аналитические функции.

Но они имеют единственную особую точку внутри γ, а именно полярность в нуле. Обозначим наибольшую кратность этого полюса через m. Система (5) запишется:

$$\begin{aligned}(\alpha_2+\alpha_2')\varphi^n+\ldots+(c_2+c_2')\psi&=W(z)\\(\alpha_2-\alpha_2')\varphi^n+\ldots+(c_2-c_2')\psi&=\chi(z)\end{aligned}\tag{5*}$$

Для функций W и χ можно дать аналитическое выражение

$$W=\left[\frac{P_m}{z^m}+\frac{P_{m-1}}{z^{m-1}}+\ldots+\frac{P_1}{z}-\overline{P}_m z^m-\ldots-\overline{P}_1 z\right]+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f_2\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f_2}{\zeta}\,d\zeta+ik.\tag{M}$$

где k — произвольное вещественное число и $P_m, \ldots P_1$ — комплексные параметры. Квадратная скобка, очевидно, имеет вещественную часть на контуре, равную нулю, а остальные слагаемые дают, как известно, регулярную функцию с вещественной частью на контуре, равной f_2.

Аналогично:

$$\chi(z)=\left[\frac{q_m}{z^m}+\ldots+\frac{q_1}{z}+\overline{q}_m z_m+\ldots+\overline{q}_1 z\right]+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_\gamma\frac{v_2\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma\frac{v_2}{\zeta}\,d\zeta+l\tag{M*}$$

В заключение необходимо заметить, что с не линейными граничными уравнениями можно поступать аналогично, в чем легко убедиться.

Очевидно что рассуждение первых двух параграфов остается верным и в применении к любой односвязной или многосвязной области, но построение функций W и χ (вследствие сложности интегралов, аналогичных $\frac{1}{\pi i}\cdot\int\frac{fd\zeta}{\zeta'-\zeta}$, здесь будет более затруднительно.

II. Плоская односвязная задача теории упругости

4. Пусть имеем плоскую упругую односвязную область Δ, ограниченную конечным контуром C, которая, вследствие каких-то силовых воздействий на контур, находится в напряженном состоянии равновесия

В случае бесконечной Δ мы будем предполагать внешние силы приложенными не только к контуру, но также будем допускать, что и в бесконечности действует некоторая сила.

Отнесем область Δ к прямоугольной системе координат, выбирая за начало точку, лежащую внутри контура C. Обозначим комплексное число, характеризующее положение точки, через:

$$z=x+iy$$

Требуется найти компоненты

$$X_x, Y_y, X_y$$

характеризующие напряжение в каждой точке, как функции z.

При обычных предположениях[1] Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили было показано, что:

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=F(z)-\frac{i}{2}\overline{z}\,\varphi'_z(z)\tag{1}$$
$$X_x+Y_y=R\varphi(z)$$

где $F(z)$ и $\varphi(z)$ — регулярные функции в области Δ (в случае бесконечности Δ, регулярны включая и бесконечно удаленную точку).

[1] Пренебрегая внешними объемными силовыми воздействиями.

5. Введем выражения напряжений в изотермических координатах (криволинейных) ледующим образом: обозначим чере $f(\zeta)$ функцию, конформно и взаимно однозначно с отображающую внутренность единичного круга γ на область Δ.

Рассмотрим (рис. 1) в области Δ сеть кривых координатных линий, являющихся отображением сетки

$\rho = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$, где $\rho = |\zeta|$, $\varphi = \arg \zeta$

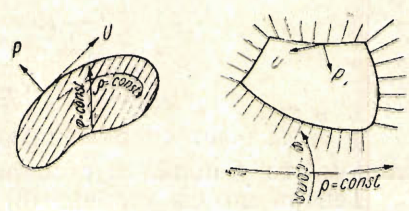

Рис. 1.

Обозначим через P проекцию на нормаль к кривой $\rho = \mathrm{const}$ напряжения, действующего на элементарную площадку, перпендикулярную к этой нормали (что в криволинейных координатах соответствует X_x), причем нормаль направляется в сторону возрастания ρ, и обозначим через Q и U компоненты напряжения, соответствующие в наших криволинейных координатах Y_y и X_y.

Граничные условия выразятся, согласно Колосову, в том, что на контуре Δ должно выполняться

$$\left\{-\frac{i}{2}\bar{z}\varphi' z + F(z)\right\} e^{2i\theta} + \frac{i}{2}(\varphi + \bar{\varphi}) = 2(U + iP) \tag{2}$$

U и P на контуре Δ известные составляющие силы, действующей на элемент контура, которые мыслятся направленными, как показывают чертежи. θ угол поворота нормали к линии $\rho = \mathrm{const}$ (угол оси $\varphi = \mathrm{const}$). Внешние силы, конечно, предполагаем удовлетворяющими условиям статичности задачи, что, как известно, в случае конечной области Δ равносильно тому, что главный вектор

$$\int_X [U(\zeta) + iP(\zeta)]\, ds = 0$$

и главный момент:

$$\int_X \{[U \cos(Ux) + P\cos(Px)]\, y - [U\cos(Uy) + P\cos(Py)]\, x\}\, ds = 0$$

В случае же бесконечной области Δ эти условия не являются необходимыми и контурные усилия U и P должны быть такими, что предельное равенство (2) имеет регулярное решение, подчененное условию однозначности перемещений и условию на бесконечности (X_x, Y_y, X_y, равны заданным величинам). Для нашего случая очевидно $\theta = \mathrm{arctg}\,\zeta + \mathrm{arctg}\, f'(\zeta)$ и значит $e^{2\theta i} = \dfrac{f'(\zeta)\zeta}{\overline{f'(\zeta)\zeta}}$

Переходя в формуле (2) на круг γ (т. е. z на $f(\zeta)$ и обозначая

$$F[f(\zeta)] = F(\zeta);\quad \varphi[f(\zeta)] = \varphi(\zeta)$$

получим, что задача свелась к разысканию двух функций F и φ, регулярных внутри γ и на окружности удовлетворяющих соотношению:

$$a\varphi'_\xi + 2bU\varphi + F = f + iv$$

где

$$a(\zeta') = -\frac{i}{2}\frac{\overline{f(\zeta')}}{f'(\zeta')} = -\frac{i}{2}\frac{\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{f'(\zeta')}, \tag{3}$$

$$b(\zeta') = \frac{i}{2}\frac{\overline{f'(\zeta')\zeta'}}{f'(\zeta)\zeta'} = \frac{i}{2}\frac{\bar{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta'}}{f'(\zeta')},$$

$$f + iv = 2\left[U(\zeta') + iP(\zeta')\right]\frac{\bar{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta'}}{f'(\zeta')\zeta'},$$

$$U_\varphi = R_\varphi = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}.$$

$\bar{f}$ обозначает сопряженную аналитическую операцию, например, если f полином, то $\bar{f}$ полином с сопряженными коэффициентами.[1]

Теперь можем условие (3) переписать в виде

$$a\varphi' + b\varphi + \overline{\frac{1}{4b}\varphi} + F = f + iv;\quad \left(\frac{1}{4b(\zeta')} = \overline{b(\zeta')}\right). \qquad (4)^{2}$$

Таким образом искомые функции $\varphi(\zeta)$ и $F(\zeta)$ получаются решением задачи, рассмотренной в I.

На самом деле, в нашем случае получается внутри γ система двух уравнений столь простого вида, что F и φ находятся сразу без интегрирования.

Действительно (5) записывается в виде

$$\begin{aligned} a\varphi' + (b + b_1)\varphi + cF &= W \\ a\varphi' + (b - b_1)\varphi + cF &= \chi \end{aligned} \qquad (5)$$

(c может появиться, если контурное уравнение (4) подвергнуть переделке, например, освободиться в первом члене от знаменателя).

Откуда

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{W - \chi}{2b_1}, \\ F &= \frac{W - a\varphi' - (b + b_1)\varphi}{c}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где, если (4) не подвергалось предварительной переделке,

$$a(\zeta) = -\frac{i}{2}\frac{\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{f'(\zeta)},$$

$$b(\zeta) = \frac{i}{2}\frac{\bar{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}}{f'(\zeta)\zeta},$$

$$b_1(\zeta) = \frac{1}{4b(\zeta)}.$$

В правых частях (6) параметры должны быть подобраны так, чтобы обе функции были регулярны.

Замечание 1. Легко видеть из формулы (6) и выражений (M) для W и χ, что в случае, когда Δ представляет бесконечную внешность свободною от воздействия отверстия (только в бесконечности приложена сила) и f рациональна, то и функции φ и F будут рациональными регулярными в γ функциями от ζ. Их неопределенные параметры можно определять экспериментально, отыскивая в нескольких точках значения φ и F.

---

[1] Область Δ мы предполагаем такой, что $\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ и $\bar{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ имеют конечное число какихнибудь особенностей внутри γ.

[2] В случае, когда коэффициенты имеют лишь полюсы в γ, следует (4) подвергнуть предварительной переделке согласно указанию (3).

Замечание 2. Если $2(U+iP)$ заданы некоторым выражением, которое в Δ есть аналитическая функция или сопряженная аналитической, то очевидно W и χ получаются сразу, без интегрирования.

III. Двусвязная область

6. В случае двусвязной области, совершенно аналогично предыдущему опираясь на аналитическое продолжение, мы получаем общее решение задачи, которое, однако, со стороны фактического вычисления не является простым. Поэтому мы лишь кратко наметили ход рассуждения и сформулируем результат.

Имеем область Δ.

Пусть $f(\zeta)$ функция, отображающая кольцо γ плоскости ζ вокруг начала с внешним радиусом 1 и внутренним $\rho<1$ на область Δ.

Переводя предельную задачу для двух неизвестных функций на кольцо γ, получим, что для двух неизвестных функций $\varphi(\zeta)$ и $F(\zeta)$ на внешнем круге должно удовлетворяться равенство

$$a\varphi'+\frac{i}{2}\varphi+\overline{-\frac{i}{2}\varphi}+cF=2(U+iP),$$

где

$$a=-\frac{i}{2}\,\frac{f(\zeta')\zeta'}{\overline{f'(\zeta')\zeta'}}=-\frac{i}{2}\,\frac{f(\zeta')\zeta^2}{\overline{f'}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)},\qquad c=\frac{f'(\zeta')\zeta'^2}{\overline{f'}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}$$

и на внутреннем круге:

$$a_\rho\varphi'+\frac{i}{2}\varphi-\overline{\frac{i}{2}\varphi}+c_\rho F=2(U+iP),$$

где

$$a_\rho=-\frac{i}{2}\,\frac{f(\zeta')\zeta'}{\overline{f'(\zeta')\zeta'}}=-\frac{i\,f(\zeta')\zeta'}{2\overline{f'(\zeta')\zeta'}}=-\frac{i}{2}\,\frac{f(\zeta)\zeta^2}{\overline{f'}\left(\frac{\rho^2}{\zeta}\right)\rho^2}$$

$$c_\rho=\frac{f'(\zeta)\zeta}{\overline{f'(\zeta)\zeta}}=\frac{f'(\zeta)\zeta^2}{\overline{f'}\left(\frac{\rho^2}{\zeta}\right)\rho^2}$$

откуда с одной стороны внутри кольца должно удовлетворяться [1]

$$\left.\begin{aligned} a\varphi'+cF&=W,\\ a\varphi'+i\varphi+cF&=\chi,\end{aligned}\right\}$$

где W есть аналитическая функция в кольце, имеющая особенности того же характера, что и левая часть, и вещественную часть на контуре, равную $2U$. Аналогично χ имеет особенности заданного типа и заданную на внешнем круге мнимую часть, равную $2iP$.

Так что [1]

$$W=\left[\ldots+\frac{p_2}{\zeta^2}+\frac{p_1}{\zeta}-\overline{p}_1\zeta-\overline{p}_2\zeta^2-\ldots\right]+W_0$$

и

$$\chi=\left[\ldots+\frac{q_2}{\zeta^2}+\frac{q_1}{\zeta}+\overline{q}_1\zeta+\overline{q}_2\zeta^2+\ldots\right]+\chi_0$$

---

[1] W аналитическая функция в кольце γ (имеющая конечное число особых точек) с вещественной частью на контуре равной $2U$.

Построим регулярную функцию во внешнем круге с такой же вещественной частью $\psi(z)$, тогда

$$W=(W-\psi)+\psi,$$

$(W-\psi)$ есть функция регулярная в узком кольце с вещественной частью на внешнем контуре равной нулю, и следовательно задается рядом Лорана, стоящим в квадратной скобке.

С другой стороны, исходя из условия на внутреннем круге, заключаем, что внутри кольца должно быть:

$$a_\rho \varphi' + C_\rho F = W_\rho$$
$$a_\rho \varphi' + i\varphi + C_\rho E = \chi_\rho ,$$

где W_ρ и χ_ρ строятся соответственно аналитическими во внешности круга радиуса ρ по заданной вещественной и мнимой части:

$$W_\rho = \left[\ldots + \frac{p_2'}{\zeta^2} + \frac{p_1'}{\zeta} - \bar{p}_1' \zeta - \bar{p}_2' \zeta^2 - \ldots \right] + W_0$$

$$\chi_\rho = \left[\ldots + \frac{q_2'}{\zeta^2} + \frac{q_1'}{\zeta} - \bar{q}_1' \zeta - \bar{q}_1' \zeta^2 - \ldots \right] + \chi_0$$

Тогда имеем:

$$\varphi = (W - \chi)\, i \qquad \varphi_\rho = (W_\rho - \chi_\rho)\, i$$

$$F = \frac{W - a(\varphi')}{c} \qquad F = \frac{W_\rho - a_\rho \varphi'}{c_\rho} .$$

Произвольные параметры, входящие в W, χ, и W_ρ, χ_ρ определяются из условия регулярности и того, что

$$(W - \chi) = (W_\rho - \chi_\rho)$$

$$\frac{W - a\varphi'}{c} = \frac{W - a_\rho \varphi'}{c_\rho} .$$

Пример 1.

7. Найдем закон распределения напряжений, когда на полуокружности действуют усилия

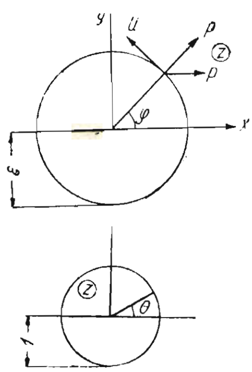

Рис. 3.

$$U = -p \sin\varphi, \quad P = p\cos\varphi,$$

на ∞, $U = P = Q = 0$.

Отображающая функция внешности круга радиуса ε, на единичный круг будет

$$Z = f(\zeta) = \frac{\varepsilon}{\zeta} ,$$

(где ε радиус отверстия).

Контурное уравнение на окружности $|\zeta| = 1$ запишется в виде:

$$\frac{i}{2}\zeta\varphi' + \frac{i}{2}\varphi + -\frac{i}{2}\bar{\varphi} + \frac{E}{\zeta^2} = 2p(\sin\theta + i\cos\theta).$$

(В контурном уравнении учитываем, что $-\theta = \varphi$).

Вещественная часть функций W должна обращаться на левой полуокружности в нуль и на правой в $2p\sin\theta$, имея при этом полярность в нуле второго порядка, откуда:

$$W = \left[\frac{P_2}{\zeta} + \frac{P_1}{\zeta} - \bar{P}_2 \zeta^2 - \bar{P}_1 \zeta \right] + \frac{2P}{\pi i} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta' + i\alpha - \frac{2P}{2\pi i} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\zeta'}{\zeta'} ,$$

аналогично:

$$\chi = \left[\frac{q_2}{\zeta^2} + \frac{q_1}{\zeta} + \bar{q}_2 \zeta^2 + \bar{q}_1 \zeta \right] + \frac{2p}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta' + \beta - \frac{2p}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\zeta'}{\zeta'} .$$

Тогда

$$\varphi = \frac{W-\chi}{2b_1} = i\left[\frac{p_2 - q_2}{\zeta^2} + \frac{p_1 - q_1}{\zeta} - (p_2 + q_2)\zeta^2 - (p_1 + q_1)\zeta + \frac{2p}{\pi i}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' - \right.$$

$$\left. - \frac{2p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' + i\alpha' - \beta'\right],$$

где

$$\alpha' = \alpha + \frac{2p}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \alpha' \quad \beta' = \beta + \frac{2p}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \beta.$$

Из условия регулярности φ заключаем, что:

$$p_2 = q_2, \quad p_1 = q_1$$

$$\frac{2p}{\pi i}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' = \frac{2p}{\pi i}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i(\zeta' - \zeta)}\,d\zeta' = -\frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta' - \frac{1}{\zeta'}}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' =$$

$$= -\frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta'}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' + \frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\zeta'}{\zeta'(\zeta' - \zeta)} = -\frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\zeta' - \frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta' d\zeta'}{\zeta' - \zeta} +$$

$$+ \frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{\zeta}}{\zeta'}\,d\zeta' + \frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' = \frac{2p}{\pi i} + \frac{p}{\pi\zeta}\lg\frac{i-\zeta}{(-i-\zeta)} -$$

$$-\frac{pi}{\zeta} - p\zeta\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}$$

$$\frac{2p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' = \frac{p}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta' + \frac{1}{\zeta'}}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' = -\frac{2p}{\pi i} + \frac{p}{\zeta\cdot\pi}\lg\frac{i-\zeta}{(-i-\zeta)} -$$

$$-\frac{pi}{\zeta} + \frac{\zeta p}{\pi}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}.$$

Подставляя полученные значения интегралов в выражении для φ, получим:

$$\varphi=i\Big[-2\bar p_2\zeta^2-2\bar p_1\zeta+\frac{2p}{\pi i}+\frac{p}{\pi\zeta}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}-\frac{pi}{\zeta}-p\zeta\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}+$$
$$+\frac{2p}{\pi i}-\frac{\zeta p}{\pi}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}+\frac{pi}{\zeta}-\frac{p}{\pi\zeta}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}+i\alpha'-\beta'\Big]=$$
$$=i\Big[-2\bar p_2\zeta^2-2\bar p_1\zeta+\frac{4p}{\pi i}-2p\zeta\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}+i\alpha'-\beta'\Big],$$

так как α' и β' вещественные числа, а φ — определяет напряженное состояние с точностью до мнимой постоянной, поэтому β' можно положить равной нулю.

Из условия $R(\varphi(\zeta))_{\zeta=0}=0$ заключаем, что:

$$i\alpha'+\frac{4p}{\pi i}=0 \quad \text{или} \quad i\alpha+\frac{ip}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\frac{4p}{\pi i}=0,$$

$$i\alpha+\frac{2ip}{\pi}-\frac{4pi}{\pi}=0, \qquad \alpha=\frac{2p}{\pi},$$

$$F(\zeta)=\frac{W-\frac{i}{2}\zeta\varphi'}{C}=\zeta^2\Big[\frac{p_2}{\zeta^2}+\frac{p_1}{\zeta}-\bar p_2\zeta^2-\bar p_1\zeta+\frac{2p}{\pi i}+\frac{p}{\pi}\frac{1}{\zeta}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}-$$
$$-\frac{pi}{\zeta}+\frac{2pi}{\pi}-\frac{1}{2}\Big(4\bar p_2\zeta+2\bar p_1+2p\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}+\frac{4pi\zeta}{\zeta^2+1}\Big)\Big].$$

Из условия $F(\zeta)_{\zeta=0}=0$ находим $p_2=0$.

Тогда $F(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\zeta)=i\Big[-2\bar p_1\zeta-2p\zeta\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}\Big]$$

$$F(\zeta)=\Big[p_1\zeta-\bar p_1\zeta^3+\frac{p\zeta}{\pi}\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}-ip\zeta-\bar p_1\zeta^2-p\cdot\zeta^2\lg\frac{i-\zeta}{-i-\zeta}-\frac{2p_i\zeta^2}{\zeta^2-1}\Big].$$

Преобразуя φ и F к переменной z заменой $\zeta=\frac{\varepsilon}{z}$ получим:

$$\varphi(z)=2i\left[-\bar p_1\frac{\varepsilon}{z}-p\frac{\varepsilon}{z}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}}\right]$$

$$F(z)=\Bigg[p_1\frac{\varepsilon}{z}-\bar p_1\frac{\varepsilon^3}{z^3}+\frac{p\varepsilon}{z\pi}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}}-pi\frac{\varepsilon}{z}-p_1\frac{\varepsilon^2}{z^2}-$$
$$-p\frac{\varepsilon^2}{z^2}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}}-\frac{2p_i\varepsilon^2}{z^2\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}+1\right)}\Bigg].$$

Произвольный пока параметр p_1 определим из однозначности перемещений, как известно:

$$2\mu(u-iv)=-\frac{z}{4}\overline{\varphi(z)}-\frac{i}{2}\int F(z)\,dz+\frac{1}{4}\varkappa\int\overline{\varphi(\bar z)}\,d\bar z,$$

где

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

Приращение последнего выражения вдоль по замкнутому контуру должно равняться нулю. Первый член правой части последнего равенства есть однозначная функция, так как $\varphi(z)$ регулярна, и приращение могут дать члены в подъинтегральных выражениях содержащие $\frac{1}{z}$, которые в результате интегрирования будут:

$$-\frac{i}{2}\varepsilon p_1 \lg z - \frac{p}{2}\varepsilon \lg z - \frac{i}{2}\varkappa\varepsilon p_1 \lg z + \text{однозначная функция.}$$

Для выполнения вышеуказанного условия необходимо, чтобы:

$$-\frac{i}{2}p_1 - \frac{p}{2} - \frac{i}{2}\varkappa p_1 = 0.$$

Обозначая $p_1 = p_1' + ip_1''$, имеем:

$$-ip_1' + p_1'' - p - i\varkappa p_1' + \varkappa p_1'' = 0,$$

откуда

$$(1+\varkappa)p_1' = 0, \quad p_1' = 0$$

$$p_1''(1+\varkappa) = p, \quad p_1'' = \frac{p}{1+\varkappa}.$$

Окончательный вид для $F(r)$ и $\varphi(z)$ будет:

$$\varphi(z) = 2i\left[\frac{ip\varepsilon}{(1+\varkappa)z} - \frac{p\varepsilon}{z}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}}\right]$$

$$F(z) = \left[\frac{ip\varepsilon}{z(1+\varkappa)} + \frac{ip\varepsilon^3}{z^3(1+\varkappa)} + \frac{p\varepsilon}{z\pi}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}} - pi\frac{\varepsilon}{z} + \right.$$

$$\left. + \frac{ip\varepsilon^3}{z^2(1+\varkappa)} - p\frac{\varepsilon^2}{z^2}\lg\frac{i-\frac{\varepsilon}{z}}{-i-\frac{\varepsilon}{z}} - \frac{4pi\varepsilon^3}{z^3\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}+1\right)}\right].$$

Устремляя радиус круга ε к нулю при условии, что:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} pds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p\varepsilon d\theta = p\varepsilon\pi = P, \qquad p = \frac{P}{\varepsilon\pi},$$

в пределе будем иметь случай действия сосредоточенной силы в плоскости. Функции $F(z)$ и $\varphi(z)$ для этого случая напряженного состояния, что не трудно видеть, будут в форме:

$$\varphi(z) = -\frac{2P}{\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}$$

$$F(z) = -\frac{i\varkappa}{\pi(1+\varkappa)}\frac{P}{z}.$$

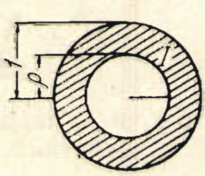

Рис. 3.

Пример 2.

8. Решим задачу о распределении напряжений в двухсвязной области, отображение которой из кольца внешнего радиуса 1 и внутреннего $\rho < 1$ совершается функцией $z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$. Не трудно видеть, что отображаемая этой функцией область, если мы будем менять постоянные параметры a, b, c, d, может быть: областью эксцентричного кольца, полуплоскости с отверстием, плоскости с двумя отверстиями.

Мы рассмотрим частный случай полуплоскость с круговым отверстием, тогда $Z = -\alpha \frac{i\zeta - 1}{\zeta - i}$ (где $\alpha = \sqrt{h^2 - r^2}$) причем в нашем случае внешний обод кольца переходит в вещественную ось полуплоскоти, и так, что точка $Z = \infty$ соответствует точке $\zeta = i$ (рис. 3).

Контурное уравнение на внешнем ободе кольца будет:

$$\frac{i}{4}\,\frac{i+\zeta'}{1+i\zeta'}(\zeta'-i)^2\varphi_1' + \overline{\frac{i}{2}\left(\frac{1+i\zeta'}{\zeta'-1}\right)^2\varphi_1} + \frac{i}{2}\left(\frac{\zeta'-i}{1+i\zeta'}\right)^2\varphi_1 + $$
$$+ F_1 = 2(U_1 + iP_1)\left(\frac{\zeta'-i}{1+i\zeta'}\right)^2,$$

и на внутреннем:

$$\frac{i}{4}\,\frac{i\rho^2+\zeta'}{\rho^2+i\zeta'}(\zeta'-i)^2\varphi_\rho' + \frac{i}{2}\,\frac{(\zeta'-i)^2\rho^2}{(\rho^2+i\zeta)^2}\varphi_\rho + \overline{-\frac{i}{2}\,\frac{(\zeta^2+i\zeta')^2}{(\zeta'-i)^2}\varphi_\rho} +$$
$$+ F_\rho = 2(U_\rho + iP_\rho)\left(\frac{\zeta'-i}{\rho^2+i\zeta'}\rho\right)^2.$$

Если первое из них разделить на $\left(\frac{\zeta-i}{1+i\zeta}\right)^2$ и второе на $\left(\frac{\zeta'-i}{\zeta^2+i\zeta'}\rho\right)^2$, то получим:

$$\frac{i}{4}(i+\zeta)(1+i\zeta')\varphi_1' + \frac{i}{2}\varphi_1 + \overline{-\frac{i}{2}\varphi_1} + \left(\frac{1+i\zeta'}{\zeta'-i}\right)^2 F_1 = 2(U_1 + iP),$$

и

$$\frac{i}{4\rho^2}(i\rho^2+\zeta')(\rho^2+i\zeta')\varphi_\rho' + \frac{i}{2}\varphi_\rho + \overline{-\frac{i}{2}\varphi_\rho} + \left(\frac{\rho^2+i\zeta'}{\zeta'-i}\,\frac{1}{\rho}\right)^2 = 2(U_\rho + iP_\rho).$$

Пусть имеем

$$f_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n\zeta^n \quad \text{и} \quad f_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n$$

регулярные в кольце. Положим далее, что на полном контуре кольца внешние условия

$$2(U + iP) = f_1 + \overline{f_2},\text{ [1]} \tag{1}$$

тогда легко показать, что в этой форме задаются совершенно произвольные контурные усилия. Действительно, если положим:

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\theta - b_n\sin n\theta, \qquad P_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'\cos n\theta - b_n'\sin n\theta.$$

$$U_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta, \qquad P_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A_n'\cos n\theta + B_n'\sin n\theta,$$

то f_1 и f_2 найдутся в виде контурных интегралов.

Действительно, если положить

$$f_1 + f_2 = \sum_{-\infty}^{\infty}(c_n + id_n)\zeta^n,$$

[1] Заметим, что на $f_1 + f_2$ должно быть наложено условие $f_1(i) + f_2(i) = 0$, что соответствует условию $2(U_1 + iP_1)$, внешние усилия на границе полуплоскости в ∞ удаленных ее точках равны нулю.

тогда

$$U_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cos n\theta - d_n \sin n\theta$$

$$U_\rho = \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n \rho^n \cos n\theta - d_n \rho^n \sin n\theta$$

или

$$U_1 = \sum_{0}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos n\theta - (d_n - d_{-n}) \sin n\theta$$

$$U_\rho = \sum_{0}^{\infty} (c_n \rho^n + \frac{c_{-n}}{\rho^n}) \cos_n \theta - (d_n \rho^n - \frac{d_{-n}}{\rho^n}) \sin n\theta.$$

Сравнивая полученные ряды с заданными выше, получим следующие уравнения для определения c_n, d_n, c_{-n}, d_{-n}

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= a_n & d_n - d_{-n} &= b_n \\ c_n \rho^n + \frac{c_{-n}}{\rho^n} &= A_n & d_n \rho^n - \frac{d_{-n}}{\rho^n} &= B_n \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Аналогично полагая $f_1 - f_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n' + {}_i d_n') \zeta^n$ и пользуясь условием $P = I(f_1 - f_2)$, получим систему уравнений для определения c'_n, d_n', c'_{-n}, d_{-n}:

$$\begin{aligned} c_n' + c'_{-n} &= a_n' & d_n' - d_{-n}' &= b_n' \\ c_n' \rho^n + \frac{c'_{-n}}{\rho^n} &= A_n' & d_n' \rho^n - \frac{d'_{-n}}{\rho^n} &= B_n' \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Остается решить системы уравнений (I) и (II) и этим наше утверждение доказывается.

Имея в виду сделанное замечание и результаты из общей теории (см. о двусвязной области стр. 215), имеем:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= f_1 + f_2 + ik_1 + \left[\ldots + \frac{p_n}{\zeta^n} + \ldots - \overline{p_n}\zeta^n - \ldots \right] \\ \chi_1 &= f_1 - f_2 + l_1 + \left[\ldots + \frac{p_n'}{\zeta^n} + \ldots + \overline{p_n'}\zeta^n + \ldots \right] \\ W_\rho &= f_1 + f_2 + ik_2 + \left[\ldots + \frac{q_n \rho^{2n}}{\zeta^n} + \ldots - \overline{q_n}\zeta^n - \ldots \right] \\ \chi_\rho &= f_1 - f_2 + l_2 + \left[\ldots + \frac{q_n' \rho^{2n}}{\zeta^n} + \ldots + \overline{q_n'}\zeta^n + \ldots \right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из выражения (2) легко находим φ_1 и φ_1 именно:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \left(\frac{W_1 - \chi_1}{1}\right) i \qquad \varphi_\rho = (W_\rho - \chi_\rho)\, i \\ &\varphi_1 = \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n + ik_1 - l_1 - \ldots + \frac{p_n - p_n'}{\zeta^n} + \ldots - (p_n + p'_n)\zeta^n - \ldots \right] i \\ &\psi_\rho = \left[2 \sum_{-\infty}^{\infty} a_1 \zeta^n + ik_2 - l_2 - \ldots + \frac{q_n - q_n'}{\zeta^n} \rho^{2n} + \ldots - (q_n + q_n')\zeta^n - \ldots \right] i \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Так как φ_1 и φ_ρ в определении плосконапряженного состояния нужны с точностью до мнимого постоянного члена в них, то можно всегда положить

$$l_1 = l_2 = 2R\,(a_0)$$

Из условия что: $\varphi_1 = \varphi_\rho$, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, найдем связь между $p_n\ p_n'$ и $q_n\ q_n'$ в следующей форме:

$$p_n - p_n' = (q_n - q_n')\,\rho^{2n}, \qquad p_n + p_n' = q_n' + q_n \qquad 2\,J(a_0) + k_1 = 2\,(J(a_0) + k_2,$$
$$k_1 = k_2 = k,$$

для всех $n = 1, 2, 3 \ldots$

откуда

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2}\left[(q_n - q_n')\,\rho^{2n} + q_n + q_n'\right] \\ p_n' &= \frac{1}{2}\left[(q_n + q_n' - (q_n - q_n')\,\rho^{2n}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для определения q_n и q_n' воспользуемся условием, что $F_1 = F_\rho$. Действительно по определению F_1 и F_ρ (см. главу из общей теории о двухсвязной области) в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$F_1 = \Big\{ \ldots \frac{p_n}{\zeta^n} + \ldots - \overline{p_n}\zeta^n - \ldots + ik + f_1 + f_2 -$$
$$- \frac{(1 + i\zeta)(i + \zeta)}{4}\left[\ldots + \frac{n\,(p_n - p_n')}{\zeta^{n+1}} + \ldots + n\,\overline{(p_n + p_n')}\,\zeta^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \ldots - 2f_2'\right]\Big\}\,\frac{(\zeta - i)^2}{(1 + i\zeta)^2}\,.$$

$$F_\rho = \Big\{ \ldots + \frac{q_n\rho^{2n}}{\zeta^n} + \ldots - \overline{q_n}\zeta^n - \ldots + ik + f_1 + f_2 -$$
$$- \frac{(\rho^2 + i\zeta)(i\zeta^2\rho^2 + \zeta)}{4\rho^2}\left[\ldots + \frac{n\,(q_n - q_n')\,\rho^{2n}}{\zeta^{n+1}} + \ldots + n\,\overline{(q_n + q_n')}\,\zeta^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \ldots - 2f_2'\right]\Big\}\left(\frac{i - \zeta}{\rho^2 + i\zeta}\right)^2 \rho^2.$$

Из условия $F_1 = F_\rho$, после незначительных преобразований, получим равенство:

$$\frac{\rho^4 + 2i\rho^2\zeta - \zeta^2}{\rho^2}\left[\ldots + \frac{p_n}{\zeta^n} + \ldots - \overline{p_n}\zeta^n - \ldots + ik + f_1 + f_2\right] -$$
$$- \frac{i\,(\rho^4 + 2i\rho^2\zeta + (\rho^4 - 1)\,\zeta^2 + 2i\rho^2\zeta^3 - \zeta^4)}{4\rho^2}\left[\ldots + \frac{n\,(p_n - p_n')}{\zeta^{n+1}} + \right.$$
$$\left. + \ldots + n\,\overline{(p_n + p_n')}\,\zeta^{n-1} + \ldots - 2f_2'\right] = \frac{\rho^2\,(1 + 2i\zeta - \zeta^2)}{\rho^2}\left[\ldots + \frac{q^n\rho^{2n}}{\zeta^n} + \right.$$
$$\left. + \ldots - \overline{q_n}\zeta^n - \ldots + ik + f_1 + f_2\right] - \frac{i\,(\rho^4 + 2i\rho^4\zeta - (\rho^4 - 1)\,\zeta^2 + 2i\rho^2\zeta^3 - \zeta^4)}{4\rho^2}\,.$$
$$\cdot\left[\ldots + \frac{n\,(q_n - q_n')\,\rho^{2n}}{\zeta^{n+1}} + \ldots + n\,(q_n + p_n')\,\zeta^{n-1} + \ldots - 2f_2'\right].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ и имея в виду выражение p_n и p_n' через q_n и q_n' по формулам (4), получим систему уравнений для q_n, q_n' в следующем виде:

. . . .

$$\frac{\rho^4}{2}\left[q_n - q_n')\,\rho^{2n} + q_n + q_n'\right] - \rho^{2(n+1)}\,q_n + i\rho^2\left[q_{n+1} + q'_{n+1} + \right.$$
$$\left. + (q_{n+1} - q_{n+1})\,\rho^{2(n+1)}\right] - 2i\rho^2 q_{n+1}\rho^{2(n+1)} - \frac{1}{2}\left[(q_{n+2} - q'_{n+2})\,\rho^{2(n+2)} + \right.$$
$$\left. + q_{n+2} + q'_{n+2}\right] + q_{n+2}\,\rho^{2(n+3)} + \rho^2\,(\rho^2 - 1)\,(a_n + b_n) + (\rho^2 - 1)\,(a_{-(n+2)} +$$

$$+b_{-(n+2)})-\frac{i}{4}[2i\rho^2(1-\rho^2)n(q_n-q_n')\rho^2_n+2(\rho^4-1)(q_{n+1}-$$
$$-q'_{n+1})(n+1)\rho^{2(n+1)}+2i(\rho^2-1)^{(n+2)}(q_{n+2}-q'_{n+2})\rho^{2(n+1)}+-2^4 i\rho^2(1-\rho^2)na_{-n}+$$
$$+-2^4(\rho^4-1)a_{-(n+1)'}(n+1-4i(\rho^2-1)^{(n+2)}a_{-(n+2)}]=0.$$

. . . .

$$\frac{\rho^4}{2}[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']-\rho^4 q_1+i\rho^2[q_2+q_2'+(q_2-q_2')\rho^4]-$$
$$-2i\rho^6 q_2-\frac{1}{2}[(q_3-q_3')\rho^6+q_3+q_3']+q_3\rho^8+\rho^2(\rho^2-1)(a_{-1}+$$
$$+b_{-1})+(\rho^2-1)(a_{-3}+b_{-3})-\frac{i}{4}[2i\rho^2(1-\rho^2)(q_1-q_1')\rho^2+$$
$$+2(\rho^4-1)(q_2-q_2')2\rho^4 2i(\rho^2-1)^{(1+2)}(q_{1+2}-q_{1+2})\rho^{2+1}-4^2 i\rho(1-\rho^2)a_{-1}-$$
$$-4\cdot 2\cdot(\rho^4-1)a_{-2}-4i(\rho^2-1)3\,{}'_{-3}]=0.$$
$$\rho^2(\rho^2-1)(ik+a_0+b_0)+i\rho^2[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']-$$
$$-2i\rho^2\cdot q_1\cdot\rho^2-\frac{1}{2}[(q_2-q_2')\rho^4+q_2+q_2']+\rho^6 q_2+(\rho_2-1)(a_{-2}+$$
$$+b_{-2})-\frac{i}{4}[2(\rho^4-1)(q_1-q_1')\rho^2 2i(\rho^2-1)(q_2-q_2')2\rho^4-4(\rho^4-1)a_{-1}-$$
$$-4i(\rho^2-1)a_{-2}]=0. \qquad (5)$$
$$\rho^2(\rho^2-1)(a_1+b_1)-\frac{\rho^4}{2}[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']+\rho^2 q_1-$$
$$-\frac{1}{2}[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']+\rho^2 q-1+(\rho^2-1)(a_{-1}+b_{-1})-$$
$$\frac{i}{4}[(2i\rho^2(1-\rho^2)(q_1+q_1')+2i(\rho^2-1)(q_1-q_1')\rho^2-4i\rho^2(1-\rho^2)a_1-$$
$$-4i(\rho^2-1)a_{-1}]=0.$$

. . . .

$$-\frac{\rho^4}{2}[(q^n-q^{n'})\rho^{2n}+q_n+q_n']+\rho^2\overline{q}_n-i\rho^2[(q_{n-1}-q'_{n-1})\rho^{2(n-1)}+$$
$$+q_{n-1}+q_{n-1}']+2i\rho^2\overline{q}_{n-1}+\frac{1}{2}[(q_{n-2}-q'_{n-2})\rho^{2(n-2)}+q_{n-2}+$$
$$+q'_{n-2}]-\rho^2\overline{q}_{n-2}+\rho^2(\rho^2-1)(a_n+b_n)+(\rho^2-1)(q_{n-2}+b_{n-2})-$$
$$-\frac{i}{4}[(2i\rho^2(1-\rho^2)n(q_n+q_n')+2(\rho^4-1)(q_{n-1}+q'_{n-1})(n-1)+$$
$$+2i(\rho^2-1)(n-2)(q_{n-2}+q'_{n-2})-4i(\rho^2-1)(n-2)a_{n-2}-4i\rho^2 n(1-\rho^2)a_n-$$
$$-4(\rho^4-1)(n-1)a_{n-1}]=0.$$

Полученную систему решим следующим образом; определим первоначально из уравнений:

$$i\rho^2[(q_1-q_1^2)\rho^2+q_1+q_1']-2i\rho^4 q_1-\frac{1}{2}[(q_2-q_2')\rho^4+q_2+q_2']+$$
$$+\rho^6 q_2-\frac{i}{4}[2(\rho^4-1)\rho^2(q_1-q_1')+4i(\rho^2-1)\rho^4(q_2-q_2')]+r_0=0 \qquad \text{(I)}$$
$$-\frac{\rho^4}{2}[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']+\rho^2 q_1-\frac{1}{2}[(q_1-q'_1)\rho^2+q_1+q_1']+$$
$$+\rho^2 q_1-\frac{i}{4}[2i\rho^2(1-\rho^2)(q_1+q_1')+2i\rho^2(\rho^2-1)(q_1-q_1')]+r_1=0 \qquad \text{(II)}$$
$$-\frac{\rho^4}{2}[(q_2-q_2')\rho^4+q_2+q_2']+\rho^2 q_2+i\rho^2[(q_1-q_1')\rho^2+q_1+q_1']-2i\rho^2 q_1+$$
$$+\frac{i}{4}[-4i\rho^2(1-\rho^2)(q_2+q_2')+2(\rho^4-1)(q_1+q_1')]+r_2=0 \qquad \text{(III)}$$

q_2, q_2' и q_1' через q_1, k и другие постоянные, которые известны. (Необходимо заметить, что последние уравнения получены в результате сравнений коэффициентов при ζ_1^0, ζ^1 и ζ^2, причем здесь r_0 и r_1 и r_2, выражения, не зависящие от неизвестных параметров. Последние легко получить из выше указанной системы). Для этого представим уравнение (II) в виде:

$$\alpha_1 \overline{q_1} + \alpha_2 \overline{q_1'} + \alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_1' + r_1 = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \rho^2\left(\frac{3}{2} - \rho^2 - \frac{\rho^1}{2}\right) \qquad \alpha_2 = \rho^2\left(\frac{1}{2} - \rho^2 + \frac{\rho^4}{2}\right),$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho^4 - 1}{2} \qquad \alpha_4 = \left(\rho_2 - \frac{\rho^4}{2} - \frac{1}{2}\right);$$

из последнего уравнения найдем:

$$R(q_1') = -\frac{1}{\alpha_4 + \alpha_2} R(r_1 + \alpha_1 \overline{q_1} + \alpha_3 q_1) \quad I(q_1') = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_4} I(r_1 + \alpha_3 q_1 + \alpha_1 \overline{q_1}) \quad \text{(A)}$$

(здесь R символ вещественной части и I мнимой).

Далее представляем уравнения I и III в виде:

$$\beta_1 q_1 + \beta_1' q_1' + \beta_2 q_2 + \beta_2' q_2' + r_0 = 0,$$

$$\gamma_1 q_1 + \gamma_1' q_1' + \gamma_2 q_2 + \gamma_2' q_2' + r_2 = 0.$$

Здесь

$$\beta_1 = i\rho^2\left(\frac{3}{2} - \rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right),\ \beta_1' = i\rho^2\left(\frac{\rho^4}{2} - \rho^2 + \frac{1}{2}\right),\ \beta_2 = \left(\rho^6 - \frac{3}{2}\rho^4 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\beta_2' = \left(-\rho^6 + \frac{3}{2}\rho^4 - \frac{1}{2}\right).$$

$$\gamma_1 = i\left(\frac{3}{2}\rho^4 - \rho^2 - \frac{1}{2}\right),\quad \gamma_1' = \left(-\frac{\rho^4}{2} - \rho^2 - \frac{1}{2}\right)i,\quad \gamma_2 = \rho^2\left(-\frac{\rho^6}{2} - \frac{3}{2}\rho^2 + 2\right),$$

$$\gamma_2' = \rho^2\left(\frac{\rho^6}{1} - \frac{3}{2}\rho^2 + 1\right).$$

Решая последние относительно q_2, q_2', найдем:

$$\left.\begin{aligned} q_2' &= \frac{\gamma_2(\beta_1 q_1 + \beta_1' q_1' + r_0) - \beta_2(\gamma_1 q_1 + \gamma_1' q_1' + r_2)}{(\gamma_2' \beta_2 - \beta_2' \gamma_2)} \\ q_2 &= -\frac{\gamma_2'(\beta_1 q_1 + \beta_1' q_1' + r_0) - \beta_2'(\gamma_1 q_1 + \gamma_1' q_1' + r_2)}{(\gamma_2' \beta_2 - \gamma_2 \beta_2')} \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

Все следующие неизвестные, начиная с q_3, q_3' и т. д. найдем в выражениях через q_1 и k, пользуясь рекурентными формулами, которые мы сейчас же выведем. Для чего решим относительно q_{n+2} и q_{n+2}' n-ое ур-ние сверху и $(n+2)$-ое снизу системы полученной выше т. е. уравнения:

$$\frac{\rho^4}{2}\left[(q_n - q_n')\rho^{2n} + q_n + q_n'\right] - \rho^{2(n+1)} q_n + i\rho^2\left[(q_{n+1} - q_{n+1}')\rho^{2(n+1)} + q_{n+1} + \right.$$

$$\left. + q_{n+1}'\right] - 2i\rho^{2(n+2)} q_{n+1} - \frac{1}{2}\left[(q_{n+2} - q_{n+2}')\rho^{2(n+2)} + q_{n+2} + q_{n+2}'\right] +$$

$$+ q_{n+2}\rho^{2(n+2)} - \frac{i}{4}\left[2i\rho^2(1-\rho^2)n(q_n - q_n')\rho^{2n} + 2(\rho^4 - 1)(q_{n+1} - q_{n+1}')(n+1)\rho^{2(n+1)} + \right.$$

$$\left. + 2i(\rho^2 - 1)(n+2)(q_{n+2} - q_{n+2}')\rho^{2(n+2)}\right] + r_{-n} = 0$$

$$-\frac{\rho^4}{2}\left[(q_{n+2} - q_{n+2}')\rho^{2(n+2)} + q_{n+2} + q_{n+2}'\right] + \rho^2 q_{n+2} + i\rho^2\left[(q_{n+1} - q_{n+1}')\rho^{2(n+1)} + q_{n+1} + \right.$$

$$\left. + q_{n+1}'\right] - 2i\rho^2 q_{n+1} + \frac{1}{2}\left[(q_n - q_n')\rho^{2n} + q_n + q_n'\right] - \rho^2 q_n + \frac{i}{4}\left[2i\rho^2(\rho^2 - 1)(n + \right.$$

$$\left. + 2)(q_{n+2} + q_{n+2}') + 2(\rho^4 - 1)(q_{n+1} + q_{n+1}')(n+1) - 2i(\rho^2 - 1)n(q_n + q_n')\right] +$$

$$+ r_{n+2} = 0$$

(здесь r_n и r_{n+2} члены выше приведенных уравнений, независящие от неизвестных параметров; их легко получить из основной системы).

Вводя обозначение:

$$E_n = \frac{\rho^4}{2}[1 + (n-2)\rho^{2(n-1)} + (1-n)\rho^{2n}] \qquad E_n' = \frac{\rho^4}{2}[1 - n\rho^{2(n-1)} + (n-1)\rho^{2n}]$$

$$E_{n+1} = \frac{i\rho^2}{2}[2 + (n+1)\rho^{2n} - 2\rho^{2(n+1)} - (n+1)\rho^{2(n+2)}]$$

$$E_{n+1}' = \frac{i\rho^2}{2}[2 - (n+1)\rho^{2n} + 2\rho^{2(n+1)} + (n+1)\rho^{2(n+2)}]$$

$$E_{n+2} = \frac{1}{2}[(n+4)\rho^{2(n+3)} - (n+3)\rho^{2(n+2)}]$$

$$E_{n+2}' = [-1 + (n+3)\rho^{2(n+2)} - (n+2)\rho^{2(n+3)}]$$

$$\delta_n = \frac{1}{2}[\rho^{2n} + (n-2)\rho^2 + (1-n)], \qquad \delta_n' = \frac{1}{2}[\rho^{2n} + n\rho^2 - (n+1)],$$

$$\delta_{n+1} = \frac{i}{2}[2\rho^{2(n+2)} + \rho^4(n+1) - 2\rho^2 - (n+1],$$

$$\delta_{n+1}' = \frac{i}{2}[-2\rho^{2(n+1)} + (n+1)\rho^4 + 2\rho^4 - (n+1)],$$

$$\delta_{n+2} = \frac{\rho^2}{2}[(n+4) - (n+3)\rho^2 - \rho^{2(n+3)}], \quad \delta_{n+2}' = \frac{\rho^2}{2}[(n+2) - (n+3)\rho^2 + \rho^{2(n+3)}],$$

можем представить эти уравнения в виде:

$$q_nE_n + q_n'E_n' + q_{n+1}E_{n+1} + q_{n+1}'E_{n+1}' + q_{n+2}E_{n+2} + q_{n+2}'E_{n+2}' + r_{-n} = 0$$
$$q_n\delta_n + q_n'\delta_n' + q_{n+1}\delta_{n+1} + q_{n+1}'q_{n+1}' + q_{n+2}\delta_{n+2} + q_{n+2}'\delta_{n+2}' + r_{n+2} = 0$$

из которых и получим:

$$\left.\begin{aligned} &q_{n+2} = \\ &= \frac{(r_{-n}+q_{n+1}'E_{n+1}'+q_{n+1}E_{n+1}+q_n'E_n'+q_nE_n)\delta_{n+2} - E_{n+2}'(r_{n+2}+q_{n+1}'\delta_{n+1}'+q_{n+1}\delta_{n+1}+q_n'\delta_n'+q_n\delta_n)}{(\delta_{n+2}E_{n+2}' - E_{n+2}\delta_{n+2}')} \\ &q_{n+2}' = \\ &= -\frac{\delta_{n+2}(r_{-n}+q_{n+1}'E_{n+1}'+q_{n+1}E_{n+1}+q_n'E_n'+q_nE_n) - E_{n+2}(r_{n+2}+q_{n+1}'\delta_{n+1}'+q_{n+1}\delta_{n+1}+q_n'\delta_n'+q_n\delta_n)}{(\delta_{n+2}E_{n+2}' - E_{n+2}\delta_{n+2}')} \end{aligned}\right\}(C)$$

Таким образом по формулам (A), (B) и (C) мы можем определить все неизвестные параметры через q_1 и k. Для определения q_1 и k воспользуемся прежде всего условием на бесконечности, для ч го, имея в виду соотношение $P + Q = R(\varphi(\zeta))$ и условие что на бесконечности составляющие напряжение равны нулю, получим:

$$R(\varphi(i)) = 0$$

или

$$I\left\{\left[2\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(i)^n + ik - 2k(a_0) \ldots + \frac{q_n - q_n'}{(i)^n}\rho^{2n} + \ldots - \overline{(q_n + q_n')(i)^n - \ldots}\right]\right\} = 0$$

откуда:

$$k = -I\left\{\left[2\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(i)^n \ldots + \frac{q_n - q_n'}{(i)^n}\rho^{2n} + \ldots - \overline{(q_n + q_n')(i)^n - \ldots}\right]\right\}$$

Для определенности решения задачи мы должны наложить условие однозначности перемещений. [1] Чтобы удовлетворить этому последнему требованию задачи необходимо, чтобы:

$$2\mu(u - iv) = \left[-\frac{\bar{z}}{2}\varphi(z) - \frac{i}{2}\int F(z)\,dz + \frac{\varkappa}{4}\int \overline{\varphi(z)}\,dz\right. \qquad \text{(b)}$$

---

[1] Заметим, что на бесконечности перемещения будут бесконечно большими. Последнего можно избежать, наложив условие равенства нулю главного вектора действующих на контур области усилий и равенство нулю на бесконечности вращения.

при отходе вдоль по любому замкнутому контуру, взятому в области, давало прирост, равный нулю. В нашем случае первый член выражения (b) регулярная функция, уложенная на z, а потому ее прирост равен нулю. Приращение очевидно дадут логарифмические члены выражения (b) или члены, содержащие под знаком интеграла степень минус первую ζ. Стало-быть, чтобы обеспечить однозначность перемещений в решении нашей задачи, необходимо коэффициент при $\frac{1}{\zeta}$ подъинтегрального выражения (b) приравнять нулю. (Следует заметить, что у второго интеграла подъинтегральное выражение будет содержать не $\frac{1}{\zeta}$, а $\frac{1}{\zeta}$, следовательно приращение равно минус коэффициенту при $\frac{1}{\zeta}$. Таким образом коэффициент при $\frac{1}{\zeta}$ нужно прилагать к коэффициенту при $\frac{1}{\zeta}$ с обратным знаком, и тогда лишь результат сложения их приравнивать нулю). Подставляя в выражение (b) значения функций $F_\rho(\zeta)$ и $\varphi_\rho(\zeta)$, перепишем первый интеграл в виде:

$$i\alpha\int\Big\{\Big[\ldots+\frac{q_n\rho^{2n}}{\zeta^n}+\ldots-q_n\zeta^n-\ldots+ik+f_1+f_2\Big]\frac{\rho^2}{(\rho^2+i\zeta)}-$$
$$-\frac{(i\rho^2+\zeta)}{4(\rho^2+i\zeta}\Big[\ldots+\frac{n(q_n-q')\rho^{2n}}{\zeta^{n+1}}+\ldots+n(\overline{q_n+q_n'})\zeta^{n-1}+\ldots-2f_2'\Big]\Big\}d\zeta=$$
$$=i\alpha\int\Big\{-\Big[\ldots+\frac{q_n\rho^{2n}}{\zeta^n}+\ldots-\bar{q}_n\zeta^n-\ldots+ik+f_1+f_2\Big]\cdot\frac{\rho^2}{\zeta^2 i}\sum_0^\infty(n+1)(-1)^n\left(\frac{\rho}{i\zeta}\right)^n+$$
$$+\frac{i(i\rho^2+\zeta)}{4\zeta}\Big[\ldots+\frac{n(q_n-q_n')\rho^{2n}}{\zeta^{n+1}}+\ldots+n(\overline{q_n+q_n'})\zeta^{n-1}+\ldots-2f_2'\Big]\times$$
$$\times\sum_0^\infty(-1)^n\left(\frac{\rho^2}{i\zeta}\right)^n\Big\}d\zeta.$$

Не трудно убедиться, что коэффициент подъинтегрального выражения при $\frac{1}{\zeta}$ здесь равен:

$$\rho^2 i\alpha\Big[\sum_1^\infty\bar{q}_n(n_1)(-1)^{n-1}\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^{n-1}+\sum_1^\infty n\cdot(n-1)^{n-1}\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^{n-1}(a_n+b_n)\Big]-$$
$$-\frac{i\rho^2\alpha}{4}\sum_0^\infty(n+1)(\overline{q_{n+1}+q_{n1}'})(-1)^n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n+\frac{i\rho^2\alpha}{4}\sum_0^\infty(n+1)a_{n+1}(-1)^n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n-$$
$$-\frac{\alpha}{4}\sum_1^\infty n(-1)^n(\overline{q_n+q_n'})\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n+\frac{\alpha}{2}\sum_1^\infty n(-1)^n a_n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n$$

Таким же путем легко убедиться, что коэффициент при $\frac{1}{\zeta}$ у второго подъинтегрального выражения будет:

$$\alpha\varkappa\sum_0^\infty(n+1)(-1)^n\left(\frac{1}{i}\right)^n\bar{a}_{-(n+1)}+\frac{\alpha\varkappa}{2}\sum_0^\infty(n+1)(-1)^n\left(\frac{1}{i}\right)^n(\overline{q_{n+1}-q_{n+1}'})\rho^{2(n+1)}$$

Теперь легко убедиться на основании всего выше сказанного, что условие однозначности смещений запишется в виде:

$$i\rho^2\left[\sum_1^\infty q_n(n)(-1)^{n-1}\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^{n-1}+\sum_1^\infty n(-1)^{n-1}\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^{n-1}(a_n+b_n)\right]-$$

$$-\frac{i\rho^2}{4}\sum_0^\infty(n+1)(\overline{q_{n+1}+q_{n+1}'})(-1)^n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n+\frac{i\rho^2}{4}\sum_0^\infty(n+1)\,a_{n+1}(-1)^n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n-$$

$$-\frac{\alpha}{4}\sum_1^\infty n(-1)^n(\overline{q_n+q_n'})\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n+\frac{\alpha}{2}\sum_1^\infty(n(-1)^n a_n\left(\frac{\rho^2}{i}\right)^n-$$

$$-\varkappa\sum_0^\infty(n+1)(-1)^n\left(\frac{1}{i}\right)^n\overline{a}_{-(n+1)}+\frac{\varkappa}{2}\sum_0^\infty(n+1)(-1)^n\left(\frac{1}{i}\right)^n(\overline{q_{n+1}+q_{n+1}'})\rho^{(2n+1)}=0.$$

Последнее соотношение послужит нам для определения q_1; таким образом в самой общей постановке задача получила решение:

ÜBER EIN RANDWERTPROBLEM DER FUNKTIONENTHEORIE UND SEINE ANWENDUNG AUF DAS EBENE PROBLEM DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Von *D. M. Wolkow* und *A. A. Nasarow* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Es wird folgendes Randwertproblem behandelt: gesucht werden alle im Inneren des Einheitskreises regulären Funktionen φ und ψ, die auf dem Rande der Bedingung (A) genügen, wo $\alpha(z)$, $\beta(z)$,... im inneren des Einheitskreises gegebene mit einer endlichen Anzahl von singulären Punkten behaftete Funktionen und f, v reelle Funktionen des Randes sind.

Indem die Verfasser die erhaltenen Ergebnisse zur Lösung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie in Anwendung bringen, kommen sie zu einer Erweiterung der Kolossow-Muschelischwili'schen Methode für den Fall einer irrutionalen abbildenden Funktion $f(\zeta)$ und zwar unter der Voraussetzung, dass $f(\zeta)$ in der ζ-Ebene nur eine endliche Anzahl von irgend welchen singulären Punkten hat.
