КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ БРУСА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ДВУХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ КОНФОКАЛЬНЫМИ ЭЛЛИПСАМИ [1]

И. Н. Векуа и *А. К. Рухадзе* (*Тифлис*)

§ 1. Введение

В своей статье „К задаче кручения и изгиба упругих брусьев“ (Изв. Ак. наук СССР, 1932, № 7, р. 907), Н. И. Мусхелишвили поставил задачу кручения и изгиба брусьев, составленных из различных упругих материалов, с любыми поперечными сечениями.

В названной работе Н. И. Мусхелишвили дает полное теоретическое решение этой задачи, сводя ее к линейному интегральному уравнению Fredholm'а второго рода.

Для некоторых видов поперечных сечений можно решить эту задачу, не прибегая к интегральным уравнениям, при помощи теории функции комплексного переменного, конформно отображая, если это возможно, поперечное сечение составного бруса, так чтобы, в отображении, областям, занятым различными материалами, соответствовали области, ограниченные концентрическими кругами, и разлагая искомые аналитические функции в ряды Laurent'а. К числу таких случаев принадлежит рассматриваемый в этой статье. [2]

§ 2. Задача кручения

Рассмотрим упругий полый цилиндр, поперечное сечение которого ограничено двумя конфокальными эллипсами и полость которого заполнена другим упругим материалом. Предполагаем, что различные упругие материалы однородны, изотропны и спаяны между собой.

Примем одно из оснований цилиндра за плоскость xOy, начало координат поместим в центре эллипсов и направим ось Oz параллельно образующим.

Оси Ox и Oy направим по главным осям эллипсов. Положим, как это делает Saint-Venant в случае однородного бруса, что

$$u = -\tau yz, \qquad v = \tau xz, \qquad w = \tau\varphi(x, y), \tag{1}$$

где u, v, w — составляющие вектора смещения, τ — постоянная, а $\varphi(x, y)$ — функция непрерывная во всем сечении S бруса.

Обозначая внешний и внутренний эллипсы соответственно через C_2 и C_1, через S_2 — область, заключенную между C_2 и C_1, через S_1 — область, ограниченную эллипсом C_1, а через μ_1 и μ_2 модули сдвига соответственно в S_1 и S_2, мы получим, что все составляющие тензора напряжения будут равны нулю, кроме X_z и Y_z и, что

$$X_z = \tau\mu_j\left(\frac{d\varphi}{dx} - y\right), \quad Y_z = \tau\mu_j\left(\frac{d\varphi}{dy} + x\right), \quad (\text{в } S_j,\ j = 1,2). \tag{2}$$

[1] Настоящая работа выполнена в Физ.-мат. институте Академии наук СССР.

[2] Таким же способом нами решена задача кручения кругового цилиндра, армированного другим продольным круговым стержнем; см. Известия Ак. наук СССР, 1933, № 3.

Из уравнений упругого равновесия вытекает, что $\varphi(x, y)$ — гармоническая функция в каждой из областей S_1 и S_2, которая должна удовлетворять определенным граничным условиям на эллипсах C_1 и C_2.

Если вместо $\varphi(x, y)$ мы будем искать сопряженную с ней гармоническую функцию $\psi(x, y)$, то есть такую, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

то нетрудно видеть, что контурные условия принимают следующий вид:

$$\psi_2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\text{const}, \qquad (\text{на } C_2), \tag{3}$$

$$\frac{d\psi_2}{dn}=\frac{d\psi_1}{dn}, \qquad (\text{на } C_1), \tag{4}$$

$$\mu_2\psi_2-\mu_1\psi_1=\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)(x^2+y^2)+\text{const}, \qquad (\text{на } C_1), \tag{5}$$

где ψ_2 и ψ_1 — значения ψ соответственно в областях S_2 и S_1, а n — нормаль к эллипсу C_1. Условие (5) показывает, что функция ψ терпит разрыв при переходе через контур C_1.

§ 3. Конформное отображение областей S_1 и S_2 на круговые области

Пусть $Z=x+iy$ комплексная переменная на плоскости поперечного сечения бруса. Положим:

$$Z=\omega(\zeta)=\frac{n}{2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right), \qquad (n>0,\ m>0), \tag{6}$$

где $\zeta=\xi+i\eta=\rho e^{i\vartheta}$ — новая комплексная переменная.

Каждой точке на плоскости Z соответствуют две точки, сопряженные по отношению к окружности γ_o, радиуса m, на плоскости ζ.

Нетрудно видеть, что каждому эллипсу на плоскости Z соответствуют две концентрические окружности, расположенные одна вне окружности γ_o, а другая внутри γ_o. Для однозначности отображения мы рассмотрим окружности, расположенные вне γ_o. Окружность γ_o соответствует отрезку, соединяющему фокусы эллипсов C_1 и C_2.

Пусть a_2, b_2 и a_1, b_1 суть большие и малые полуоси соответственно эллипсов C_2 и C_1, причем

$$a_2>a_1, \qquad a_2^2-b_2^2=a_1^2-b_1^2=c^2,$$

где $2c$ фокусное расстояние.

Полагая

$$n=a_1+b_1, \qquad m=\frac{c}{a_1+b_1}<1, \tag{7}$$

нетрудно убедиться, что эллипсу C_1 соответствует окружность γ_1 единичного радиуса, а эллипсу C_2 — окружность γ_2 радиуса $R>1$, причем:

$$R=\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}. \tag{8}$$

§ 4. Определение функции $\psi(x, y)$

Функция $F(Z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ — аналитическая в каждой из областей S_1 и S_2. Производя замену переменных (6), получим:

$$F(Z)=F(w(\zeta))=f(\zeta)=\varphi(\xi, \eta)+i\psi(\xi, \eta),$$

где $f(\zeta)$ аналитическая функция в каждой из отдельно взятых областей σ_2 и σ_1, причем σ_2 — кольцо между γ_2 и γ_1, а σ_1 — кольцо между γ_1 и γ_0. Обозначим через $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ значения $f(\zeta)$ соответственно в областях σ_1 и σ_2.

Имеем разложение Laurent'a:

$$f_2(\zeta) = a_0'' + ib_0'' + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (a_k'' + ib_k'') \cdot \zeta^k, \tag{9}$$

$$f_1(\zeta) = a_0' + ib_0' + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (a_k' + ib_k') \zeta^k, \tag{10}$$

где знак (') над суммой означает, что k не принимает значения нуль.

Заменяя ζ через $\zeta = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ и отделяя вещественные и мнимые части, получим:

$$\psi_2 = b_0'' + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k b_k'' + \rho^{-k} b''_{-k}) \cos k\vartheta + (\rho^k a_k'' - \rho^{-k} a''_{-k}) \sin k\vartheta, \tag{11}$$

$$\psi_1 = b_0' + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k b_k' + \rho^{-k} b'_{-k}) \cos k\vartheta + (\rho^k a_k' - \rho^{-k} a'_{-k}) \sin k\vartheta. \tag{12}$$

Когда точка ζ описывает окружность γ_0, то есть когда $\zeta = me^{i\vartheta}$, причем ϑ изменяется напр. от $-\pi$ до $+\pi$, то соответствующая ей точка Z дважды описывает отрезок $-c \leqslant x \leqslant c$ оси Ox, так что точкам $\zeta = me^{i\vartheta}$ и $\zeta = me^{-i\vartheta}$ соответствует одна и та же точка отрезка $-c \leqslant x \leqslant c$ оси Ox. С другой стороны, функция $F(Z)$ должна быть однозначна и голоморфна внутри эллипса C_1 и, в частности вблизи и на отрезке $-c \leqslant x \leqslant c$. Значит, правая часть формулы (10) должна иметь одно и то же значение при $\zeta = me^{i\vartheta}$ и $\zeta = me^{-i\vartheta}$. Отсюда следует, что мы должны иметь: $m^k(a_k' + ib_k') = m^{-k}(a_{-k}' + ib_{-k}')$, то есть

$$a_{-k}' = m^{2k} \cdot a_k', \qquad b_{-k}' = m^{2k} \cdot b_k'. \tag{13}$$

Контурные условия (3), (4) и (5) после преобразования (6) примут вид:

$$\psi_2 = \frac{c^2}{4} \cos 2\vartheta + \text{const}, \qquad (\text{на } \gamma_2) \tag{14}$$

$$\frac{d\psi_2}{d\rho} = \frac{d\psi_1}{d\rho}, \qquad (\text{на } \gamma_1) \tag{15}$$

$$\mu_2\psi_2 - \mu_1\psi_1 = \frac{c^2}{4}(\mu_2 - \mu_1)\cos 2\vartheta + \text{const}, \qquad (\text{на } \gamma_1). \tag{16}$$

Из контурных условий (14), (15) и (16), в силу (13), получаем, что все коэффициенты a_k'', a_{-k}'', a_k', a_{-k}', $(k = 1, 2 \ldots)$ и b_k'', b_{-k}'', b_k' и b_{-k}' $(k = 1, 3, 4 \ldots)$ равны нулю. Для коэффициентов же b_2'', b_{-2}'', b_2' и b_{-2}' получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} b_2'' &= \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\mu_1[R^2(1+m^4) + (1-m^4)] + \mu_2(R^2-1)(1-m^4)}{\mu_1(1+R^4)(1+m^4) + \mu_2(R^4-1)(1-m^4)}, \\ b_{-2}'' &= \frac{c^2}{4} R^2 \cdot \frac{\mu_1[(1+m^4) - R^2(1-m^4)] + \mu_2(R^2-1)(1-m^4)}{\mu_1(1+R^4)(1+m^4) + \mu_2(R^4-1)(1-m^4)}, \\ b_2' &= \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\mu_1(1+R^4) - \mu_2(R^2-1)^2}{\mu_1(1+R^4)(1+m^4) + \mu_2(R^4-1)(1-m^4)}, \quad b_{-2}' = m^4 b_2'. \end{aligned} \tag{17}$$

Функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ определяются с точностью до аддитивных постоянных, которые дают жесткое перемещение всего тела и на деформации не влияют, поэтому в дальнейшем их мы будем считать равными нулю.

Следовательно, будем иметь:

$$\frac{1}{i} f_2(\zeta) = b_2''\zeta^2 + \frac{b''_{-2}}{\zeta^2}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{i} f_1(\zeta) = b_2'\left(\zeta^2 + \frac{m^4}{\zeta^2}\right). \tag{19}$$

Возвращаясь к старой переменной Z в формулах (18) и (19) $Z = x + iy = \frac{n}{2}\left(\zeta + \frac{m^2}{\zeta}\right)$ и отделяя вещественные и мнимые части, получим значения φ и ψ в старых координатах x и y.

§ 5. Жесткость при кручении

Пусть M — момент закручивающей пары, тогда имеем: $M = \tau \cdot D$, где D — есть жесткость при кручении, определяемая формулой:

$$D = \mu_1 \iint_{S_1} \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy + \\ + \mu_2 \iint_{S_2} \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{20}$$

Выражение (20) перепишем следующим образом:

$$D = \mu_1 \iint_{S_1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy + \mu_2 \iint_{S_2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy + \\ + \mu_1 \iint_{S_1} \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy + \mu_2 \iint_{S_2} \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{21}$$

Легко видеть, что

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \pi\frac{a_1 b_1 (a_1^2 + b_1^2)}{4} = I_1,$$

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint_{S} (x^2 + y^2)\,dx\,dy - \iint_{S_1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \pi\frac{a_2 b_2 (a_2^2 + b_2^2)}{4} - \pi\frac{a_1 b_1 (a_1^2 + b_1^2)}{4} = I - I_1,$$

где I и I_1 — моменты инерции площадей S и S_1, ограниченных эллипсами C_2 и C_1, относительно начала координат.

Обозначая сумму двух последних интегралов в формуле (21) через A и применяя формулу Gauss'а, будем иметь:

$$A = (\mu_2 - \mu_1) \int_{C_1} \varphi \cdot d\,\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \mu_2 \int_{C_2} \varphi d\,\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

или в комплексной форме:

$$A = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \int_{C_1} [F_1(Z) + \overline{F}_1(\overline{Z})]\, d(Z \cdot \overline{Z}) - \frac{\mu_2}{2} \int_{C_2} [F_2(Z) + \overline{F}_2(\overline{Z})]\, d(Z \cdot \overline{Z}),$$

где через $\overline{F}(\overline{Z})$ мы обозначаем сопряженную функцию $F(Z)$ от сопряженной переменной $\overline{Z}$.

Делая замену переменных $Z=\frac{n}{2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)$, в силу (18) и (19), после простых выкладок будем иметь:

$$D=c^2\frac{\mu_2-\mu_1}{2}b_2'(1-m^4)\pi+c^2\frac{\mu_2}{4}\left(\frac{c^2}{2}-4b_2''R^2\right)\pi+\mu_2(I-I_1)+\mu_1 I_1. \tag{22}$$

Если мы имеем полый цилиндр, т. е. если $\mu_1=0$, тогда из (22) получаем:

$$D'=-\frac{c^4}{4}\mu_2\pi\frac{R^2-1}{R^2+1}+\mu_2(I-I_1). \tag{23}$$

При $\mu_2=0$ из формулы (22) мы получим известное выражение жесткости при кручении однородного бруса с эллиптическим сечением:

$$D''=\frac{\pi\mu_1 a_1^3 b_1^3}{a_1^2+b_1^2}, \tag{24}$$

(из формул (22), (23) и (24) видно, что $D'+D''<D$).

§ 6. Компоненты напряжения

Для вычисления компонентов напряжения воспользуемся специальными криволинейными координатами, связанными с преобразованием (6). В силу этого преобразования точке (ρ,ϑ) на плоскости ζ соответствует определенная точка (x, y) на плоскости Z.

Рассмотрим ρ и ϑ (полярные координаты точки ζ) как криволинейные координаты точки Z.

На плоскости Z линии $\rho=\text{const}$ суть конфокальные эллипсы, а $\vartheta=\text{const}$ конфокальные гиперболы, к ним ортогональные.

Пусть (ρ) и (ϑ) обозначают нормали к этим кривым, проходящим через данную точку, проведенные соответственно в сторону возрастания ρ и ϑ.

Обозначим через T_ρ и T_ϑ проекции на эти нормали вектора (X_z, Y_z).

Тогда по формуле, указанной Н. И. Мусхелишвили,[1] будем иметь:

$$T_\rho-iT_\vartheta=\frac{\zeta\omega'(\zeta)}{\rho\,|\omega'(\zeta)|}(X_z-iY_z). \tag{25}$$

В нашем случае последняя формула примет вид:

$$T_{j\rho}-iT_{j\vartheta}=\tau\mu_j\zeta\,\frac{f_j'(\zeta)-i\omega'(\zeta)\,\overline{\omega}(\bar{\zeta})}{\rho\,|\omega'(\zeta)|},\qquad (j=1,2) \tag{26}$$

Знак j указывает область, к которой относится рассматриваемая точка. Вычислим сперва напряжение в области S_2. Полагая в формуле (26) $j=2$, в силу формул (18) и (6), после элементарных вычислений получим:

$$T_{2\rho}=\frac{\tau\mu_2}{n}\cdot\frac{(R^2-\rho^2)(4b_2''R^2-4b_2''\rho^2-c^2)}{\rho\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}\sin 2\vartheta, \tag{27}$$

$$T_{2\vartheta}=\frac{\tau\mu_2}{2n}\cdot\frac{n^2(\rho^4-m^4)+8(b_{-2}''-b_2''\rho^4)\cos 2\vartheta}{\rho\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}. \tag{28}$$

Из (27) вытекает, что при $\rho=R$, $T_{2\rho}=0$, как и следовало ожидать.

Из формулы (28) легко заключить, что наибольшие напряжения на границе C_2 имеются на концах большой оси, а минимальные — на концах малой оси.

[1] Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes, Rendic. d. R. Acc. dei Lincei, Ser. 6, vol. IX (1929) pp. 295—300.

Аналогично, напряжения в области S_1 получаем из формулы (26), полагая $j=1$, при помощи формул (19) и (6):

$$T_{1\rho}=\frac{\tau\mu_1}{n}\cdot\frac{c^2\rho^2-4b_2'(\rho^4+m^4)}{\rho\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}\sin 2\vartheta, \tag{29}$$

$$T_{1\vartheta}=\frac{\tau\mu_1}{2n}\cdot\frac{n^2(\rho^4-m^4)+8b_2'(m^4-\rho^4)\cos 2\vartheta}{\rho\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}. \tag{30}$$

Если положить $\mu_2=0$ и $\rho=1$, имеем, что $T_{1\rho}=0$, как и следовало ожидать.

В случае полости, когда $\mu_1=0$, мы имеем, при $\rho=1$, $T_{2\rho}=0$, что также является проверкой наших вычислений.

§ 7. Задача изгиба

Перейдем теперь к рассмотрению задачи изгиба поперечной силой. Будем предполагать, что различные материалы, которые составляют рассматриваемый брус, имеют один и тот же коэффициент Poisson'а σ, но вообще говоря, различные модули упругости.

Задача изгиба поперечной силой для составных брусьев в общем случае также допускает решение типа Saint-Venant'а, как это показано в упомянутой статье Н. И. Мусхелишвили.

Допустим, что поперечная сила направлена по оси Ox и имеет значение W.

При принятых предположениях и указанном выборе системы координат, в нашем случае будет иметь место полная симметрия, в виду чего будет отсутствовать закручивание т. е.

$$\tau=0.$$

Легко заметить, что условиям задачи можно удовлетворить выражениями следующего вида:

$$\begin{gathered}u=A\left\{\frac{1}{2}(l-z)\sigma(x^2-y^2)+\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right\},\quad v=A\sigma(l-z)xy,\\ w=-A\left\{x\left(lz-\frac{1}{2}z^2\right)+\chi(x,y)+xy^2\right\}\end{gathered} \tag{31}$$

и

$$\begin{gathered}X_z=-B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\},\\ Y_z=-B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y}+(2+\sigma)xy\right\},\quad Z_z=-K_j(l-z),\qquad (\text{в } S_j\ j=1,2),\end{gathered} \tag{32}$$

где $\chi(x,y)$ — искомая функция, необходимо непрерывная в области S, l — длина бруса, A — постоянная, B_j и K_j также постоянные, которые могут принимать различные значения в участках, соответствующих различным материалам.

Из уравнений упругого равновесия вытекает, что функция $\chi(x,y)$ должна удовлетворять уравнению Laplace'a

$$\Delta\chi(x,y)=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=0 \tag{33}$$

в каждой из областей S_j $(j=1,2)$, и что

$$B_j=\frac{AE_j}{2(1+\sigma)}=A\mu_j,\quad K_j=AE_j\qquad (E_j \text{ модуль Юнга в } S_j), \tag{34}$$

$$A=\frac{W}{I_E}, \tag{35}$$

где W — заданная сила.

I_E „приведенный момент инерции“ сечения относительно оси Oy, находящейся в плоскости сечения, дается формулой: [1]

$$I_E=\iint\limits_S Ex^2\,dx\,dy=E_1I_1+E_2I_2 \tag{36}$$

(I_j обычный момент инерции площади S_j относительно оси O_y).

Обозначим через $\chi_2(x,y)$ и $\chi_1(x,y)$ значения функции $\chi(x,y)$ в областях S_2 и S_1; тогда гармонические функции $\chi_1(x,y)$ и $\chi_2(x,y)$ определяются из следующих контурных условий:

$$\frac{d\chi_2}{dn}=-\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos\widehat{nx}+(2+\sigma)\,xy\cos\widehat{ny}\right\},\quad (\text{на } C_2) \tag{37}$$

$$\chi_2=\chi_1,\qquad (\text{на } C_1) \tag{38}$$

$$\mu_2\frac{d\chi_2}{dn}-\mu_1\frac{d\chi_1}{dn}=$$

$$=-(\mu_2-\mu_1)\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos\widehat{nx}+(2+\sigma)\,xy\cos\widehat{ny}\right\},\ (\text{на } C_1), \tag{39}$$

где через $\frac{d\chi_2}{dn}$ и $\frac{d\chi_1}{dn}$ обозначены производные, взятые по направлению нормали, внешней относительно области S_2.

Из формулы (39) видно, что нормальные производные от функции $\chi(x,y)$ терпят разрыв при переходе через контур C_1.

§ 8. Определение функции $\chi(x,y)$

Произведем конформное отображение, указанное в § 3 формулой (6). Пусть $\Phi(Z)=\chi(x,y)+i\Omega(x,y)$ функция комплексного переменного $Z=x+iy$, имеющая вещественной частью $\chi(x,y)$, аналитическая в каждой из областей S_1 и S_2, и пусть Φ_1 и Φ_2 ее значения в этих областях.

Введем обозначения $\Phi(Z)=\Phi\left(\frac{n}{2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)\right)=g(\zeta)=\chi(\xi,\eta)+i\Omega(\xi_1\eta)$ и пусть $g_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$ значения функции $g_2(\zeta)$ в областях σ_1 и σ_2.

Тогда для функций $g(\zeta)$ имеем разложение L a u r e n t' a: [2]

$$g_2(\zeta)=\alpha_0''+i\beta_0''+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(\alpha_k''+i\beta_k'')\,\zeta^k, \tag{40}$$

$$g_1(\zeta)=\alpha_0'+i\beta_0'+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(\alpha_k'+i\beta_k')\,\zeta^k, \tag{41}$$

где знак (') над суммой, как и раньше означает, что k не принимает значения нуль.

Отделяя вещественные и мнимые части, получим:

$$\chi_2=\alpha_0''+\sum_{k=1}^{\infty}(\rho^k\alpha_k''+\rho^{-k}\alpha_{-k}'')\cos k\vartheta-(\rho^k\beta_k''-\rho^{-k}\beta_{-k}'')\sin k\vartheta, \tag{42}$$

---

[1] Под „приведенным моментом инерции“ сечения понимаем момент инерции сечения, который получится, если отдельным участкам сечения приписать поверхностные плотности равные соответствующим модулям упругости. См. Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Известия Ак. наук СССР 1932 г. № 7.

[2] Из факта однозначности $\chi(\xi,\eta)$ в области σ_2 еще не следует, вообще говоря, однозначность функции $\Omega(\xi,\eta)$, так как область σ_2 не односвязна. Однако легко видеть, что в нашем случае $\Omega(\xi,\eta)$, а следовательно и $g_2(\zeta)$ будет однозначна. В противном случае пришлось бы в правой части (40) добавить член вида: $A\log\zeta$, где A вещественная постоянная.

$$\chi_1 = \alpha_0' + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k \alpha_k' + \rho^{-k}\alpha_{-k}') \cos k\vartheta - (\rho^k \beta_k' - \rho^{-k}\beta_{-k}') \sin k\vartheta, \tag{43}$$

где, как и раньше, между коэффициентами β_{-k}', α_{-k}' и β_k', α_k' существуют зависимости вида (13)

$$\alpha_{-k}' = m^{2k} \alpha_k', \quad \beta_{-k}' = m^{2k} \beta_k'. \tag{44}$$

Выразим контурные условия (37), (38) и (39) в новых координатах ρ и ϑ, связанных со старыми преобразованием (6).

Для этого заметим, что:

$$\frac{d\chi}{d\rho} = \frac{d\chi}{dn} \cdot \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|. \tag{45}$$

Простым вычислением в нашем случае устанавливаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| &= \frac{n}{2}\sqrt{\left(1+\frac{m^4}{\rho^4}\right) - \frac{2m^2}{\rho^2}\cos 2\vartheta}, \\ \cos \widehat{nx} &= \frac{\left(1-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\cos\vartheta}{\sqrt{\left(1+\frac{m^4}{\rho^4}\right) - \frac{2m^2}{\rho^2}\cos 2\vartheta}}, \\ \cos \widehat{ny} &= \frac{\left(1+\frac{m^2}{\rho^5}\right)\sin\vartheta}{\sqrt{\left(1+\frac{m^4}{\rho^4}\right) - \frac{2m^2}{\rho^2}\cos 2\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

В силу этих формул, контурные условия (37), (38) и (39) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_2}{d\rho} = &-\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\sigma\right)a_2^2 b_2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_2^3\right]\frac{\cos\vartheta}{R} + \\ &+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sigma\right)a_2^2 b_2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_2^3\right]\frac{\cos 3\vartheta}{R}, \quad (\text{на } \gamma_2), \end{aligned} \tag{47}$$

$$\chi_2 = \chi_1, \quad (\text{на } \gamma_1), \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 \frac{d\chi_2}{d\rho} - \mu_1 \frac{d\chi_1}{d\rho} = &-(\mu_2-\mu_1)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\sigma\right)a_1^2 b_1 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_1^3\right]\cos\vartheta + \\ &+(\mu_2-\mu_1)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sigma\right)a_1^2 b_1 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_1^3\right]\cos 3\vartheta, \quad (\text{на } \gamma_1). \end{aligned} \tag{49}$$

Введем для краткости обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\sigma\right)a_2^2 b_2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_2^3 = d_1'', \\ &\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sigma\right)a_2^2 b_2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_2^3 = d_3'' = d_1'' - \frac{1}{2}\sigma a_2^2 b_2, \\ &\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\sigma\right)a_1^2 b_1 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_1^3 = d_1', \\ &\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sigma\right)a_1^2 b_1 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sigma\right)b_1^3 = d_3' = d_1' - \frac{1}{2}\sigma a_1^2 b_1. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Из контурных условий (47), (48) и (49) в силу (44) получаем, что все коэффициенты β_k'', β_{-k}'', β_k', и β_{-k}' $(k=1, 2, 3\ldots)$ и α_k'', α_{-k}'', α_k' и α_{-k}' $(k=2, 4, 5\ldots)$ равны нулю.

Коэффициенты α_1'', α_3'', α_{-1}'', α_{-3}'', α_1' α_3', α_{-1}' и α_{-3}' определятся из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&R\alpha_1''-R^{-1}\alpha_{-1}''=-d_1'', && R^3\alpha_3''-R^{-3}\alpha_{-3}''=\frac{1}{3}d_3'',\\
&\alpha_1''+\alpha_{-1}''=(1+m^2)\,\alpha_1', && \alpha_3''+\alpha_{-3}''=(1+m^6)\,d_3',\\
&(\nu+m^2)\,\alpha_1''-(1+\nu m^2)\,\alpha_{-1}''= && (\nu+m^6)\,\alpha_3''-(1+\nu m^6)\,\alpha_{-3}''=\\
&=-\nu(1+m^2)\,d_1', && =\frac{\nu}{3}(1+m^6)\,d_3',\\
&\alpha_{-1}'=m^2\alpha_1', && \alpha_{-3}'=m^6\alpha_3'.
\end{aligned}\right\}\qquad(51)$$

где через ν обозначено отношение $\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}$.

Постоянные β_0'' и β_0', как и выше в задаче кручения, остаются произвольными, что и следовало ожидать. Эти постоянные никакого физического значения не имеют.

Что касается постоянных α_0'' и α_0', то из условия непрерывности $\chi(x, y)$ при переходе через контур C_1 имеем $\alpha_0''=\alpha_0'$, общее значение их также остается произвольным, оно дает только жесткое перемещение всего тела и на деформации не влияет.

Мы будем полагать $\alpha_0''=\alpha_0'=\beta_0''=\beta_0'=0$.

Из формулы (51) вытекает, что:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1''=\frac{Rd_1''+\nu[Rm^2d_1''-d_1'(1+m^2)]}{(m^2-R^2)+\nu(1-m^2R^2)}, && \alpha_3''=-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''+\nu[R^2m^6d_3''-d_3'(1+m^6)]}{(m^6-R^6)+\nu(1-m^6R^6)},\\
&\alpha_{-1}''=\frac{Rm^2d_1''+\nu[Rd_1''-R^2d_1'(1+m^2)]}{(m^2-R^2)+\nu(1-m^2R^2)}, && \alpha_{-3}''=-\frac{1}{3}\,\frac{m^6R^3d_3''+\nu[R^3d_3''-R^6d_3'(1+m^6)]}{(m^6-R^6)+\nu(1-m^6R^6)},\\
&\alpha_1'=\frac{Rd_1''+\nu[d_1''R-d_1'(1+R^2)]}{(m^2-R^2)+\nu(1-m^2R^2)}, && \alpha_3'=-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''+\nu[R^3d_3''-d_3'(1+R^6)]}{(m^6-R^6)+\nu(1-m^6R^6)},\\
&\alpha_{-1}'=m^2\alpha_1' && \alpha_{-3}'=m^6\alpha_3'.
\end{aligned}\right\}\qquad(52)$$

Формулы (52) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1''=\frac{Rd_1''}{m^2-R^2}-\nu A_1, && \alpha_3''=-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''}{m^6-R^6}+\frac{\nu}{3}A_3,\\
&\alpha_{-1}''=\frac{m^2Rd_1''}{m^2-R^2}-\nu B_1, && \alpha_3''=-\frac{1}{3}\,\frac{m^6R^3d_3''}{m^6-R^6}+\frac{\nu}{3}B_3,\\
&\alpha_1'=\frac{Rd_1''}{m^2-R^2}-\nu C_1, && \alpha_3'=-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''}{m^6-R^6}+\frac{\nu}{3}C_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

где постоянные A_1, B_1, C_1, A_3, B_3 и C_3 имеют значения:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=\frac{(1+m^2)[Rd_1''(1-m^2)+d_1'(m^2-R^2)]}{(m^2-R^2)^2+\nu(m^2-R^2)(1-m^2R^2)}, && B_1=R^2\cdot A_1,\\
&A_3=\frac{(1+m^6)[R^3d_3''(1-m^6)+d_3'(m^6-R^6)]}{(m^6-R^6)^2+\nu(m^6-R^6)(1-m^6R^6)}, && B_3=R^6\cdot A_3,\\
&C_1=\frac{(1+R^2)[Rd_1''(1-m^2)+d_1'(m^2-R^2)]}{(m^2-R^2)^2+\nu(m^2-R^2)(1-m^2R^2)}, &&\\
&C_3=\frac{(1+R^6)[R^3d_3''(1-m^6)+d_3'(m^6-R^6)]}{(m^6-R^6)^2+\nu(m^6-R^6)(1-m^6R^6)}. &&
\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

Возвращаясь к формулам (40) и (41), получаем на основании (44):

$$\begin{aligned}
g_2(\zeta)=&\frac{Rd_1''}{m^2-K^2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''}{m^6-K^5}\left(\zeta^3+\frac{m^6}{\zeta^3}\right)-\\
&-\nu\left\{A_1\left(\zeta+\frac{R^2}{\zeta}\right)-\frac{1}{3}A_3\left(\zeta^3+\frac{R^6}{\zeta^3}\right)\right\},
\end{aligned}\qquad(55)$$

$$\begin{aligned}
g_1(\zeta)=&\frac{Rd_1''}{m^2-K^2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''}{m^6-R^6}\left(\zeta^3+\frac{m^6}{\zeta^3}\right)-\\
&-\nu\left\{C_1\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)-\frac{1}{3}C_3\left(\zeta^3+\frac{m^6}{\zeta^3}\right)\right\}.
\end{aligned}\qquad(56)$$

Входящее в $g_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$ выражение:

$$\frac{Rd_1''}{m^2-R^2}\left(\zeta+\frac{m^2}{\zeta}\right)-\frac{1}{3}\,\frac{R^3d_3''}{m^6-R^6}\left(\zeta^3+\frac{m^6}{\zeta^3}\right)$$

соответствует функции $\chi(x,y)$ для однородного эллиптического цилиндра ($\nu=0$). Остальные слагаемые в выражениях $g_2(\zeta)$ и $g_1(\zeta)$ характеризуют возмущение, вызванное присутствием другого материала.

§ 9. Компоненты напряжения

Для вычисления компонентов напряжения воспользуемся теми же самыми криволинейными координатами, что в § 6.

Этим способом нам удастся вычислить составляющие касательных напряжений в плоскости сечения.

Формулы $T_{j\rho}-iT_{j\vartheta}=\frac{\zeta\omega'(\zeta)}{\rho\,|\omega'(\zeta)|}(X_z-iY_z)$ на основании (32) принимают вид:

$$T_{j\rho}-iT_{j\vartheta}=-A\mu_j\zeta\,\frac{g_j'(\zeta)+\omega'(\zeta)\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sigma\right)\overline{\omega}^2(\overline{\zeta})+\frac{1}{2}\omega(\zeta)\,\overline{\omega}(\overline{\zeta})-\frac{3}{4}\omega^2(\zeta)\right]}{\rho\,|\omega'(\zeta)|}, \tag{57}$$

где знак j указывает, как и раньше, область, к которой относится рассматриваемая точка.

Простое вычисление дает:

$$\begin{aligned}
&\zeta\omega'(\zeta)\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sigma\right)\overline{\omega}^2(\overline{\zeta})+\frac{1}{2}\overline{\omega}(\overline{\zeta})\cdot\omega(\zeta)-\frac{3}{4}\omega^2(\zeta)\right]=\\
&=\frac{n^3}{32}\left\{\left[(4\sigma-1)m^2+2\rho^2-\frac{(2\sigma+1)m^6}{\rho^4}\right]\zeta+\right.\\
&+\left[\rho^2(2\sigma+1)-\frac{(4\sigma-1)m^4}{C^2}-\frac{2m^6}{\rho^4}\right]\overline{\zeta}+\left[-3+\frac{2m^2}{\rho^2}+\frac{(2\sigma+1)m^4}{\rho^4}\right]\zeta^3+\\
&\left.+\left[-\frac{(2\sigma+1)m^2}{\rho^2}-\frac{2m^4}{\rho^4}+\frac{3m^6}{\rho^6}\right]\overline{\zeta}^3\right\}= \qquad (58)\\
&=\frac{n^3}{32}\left\{\left[(4\sigma-1)m^2\left(1-\frac{m^2}{\rho^2}\right)+(2\sigma+3)\left(\rho^2-\frac{m^6}{\rho^4}\right)\right]\rho\cos\vartheta-\left[\frac{(2\sigma-1)m^2}{\rho^2}\left(1-\frac{m^2}{\rho^2}\right)+\right.\right.\\
&\left.\left.+3\left(1-\frac{m^6}{\rho^6}\right)\right]\rho^3\cos 3\vartheta\right\}+i\frac{n^3}{32}\left\{\left[(4\sigma-1)m^2\left(1+\frac{m^2}{\rho^2}\right)-(2\sigma-1)\left(\rho^2+\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{m^6}{\rho^4}\right)\right]\rho\sin\vartheta+\left[-3\left(1+\frac{m^6}{\rho^6}\right)+\frac{(2\sigma+3)m^2}{\rho^2}\left(1+\frac{m^2}{\rho^2}\right)\right]\rho^3\sin 3\vartheta\right\}.
\end{aligned}$$

Вычислим сперва напряжение в области S_2. Полагая в формуле (57) $j=2$, в силу формул (40), (6) и (58), после элементарных выкладок получим:

$$\begin{aligned}
T_{2\rho}=&-\frac{A\mu_2}{n\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}\left\{\frac{n^3}{16}\left[(4\sigma-1)m^2(\rho^2-m^2)+\right.\right.\\
&\left.\left.+(2\sigma+3)\left(\rho^4-\frac{m^6}{\rho^2}\right)\right]+2\alpha_1''(\rho^2-R^2)-2Rd_1''\right\}\cos\vartheta+\\
&+\frac{A\mu_2}{n\sqrt{\rho^4-2m^2\rho^2\cos 2\vartheta+m^4}}\left\{\frac{n^3}{16}\left[(2\sigma-1)m^2(\rho^2-m^2)+\right.\right.\\
&\left.\left.+3\left(\rho^4-\frac{m^6}{\rho^2}\right)\right]-\frac{6\alpha_3''}{\rho^2}(\rho^6-R^6)-\frac{2}{\rho^2}R^3d_3''\right\}\cos 3\vartheta,
\end{aligned} \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
T_{2\vartheta} = & \frac{A\mu_2}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(4\sigma - 1) m^2 (\rho^2 + \right. \\
& \left. + m^2) - (2\sigma - 1)\left(\rho^4 + \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] + 2\alpha_1''(\rho^2 + R^2) + 2Rd_1'' \right\} \sin\vartheta + \\
& + \frac{A\mu_2}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(2\sigma + 3) m^2 (\rho^2 + m^2) - 3\left(\rho^4 + \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] + \right. \\
& \left. + \frac{6\alpha_3''}{\rho^2}(\rho^6 + R^6) - \frac{2R^3}{\rho^2} d_3'' \right\} \sin 3\vartheta.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Из формулы (59) видно, что при $\rho = R$, $T_{2\rho} = 0$, как и следовало ожидать. На контуре C_2 на концах большой оси напряжения отсутствуют.

Аналогично напряжения в области S_1 получаем из формулы (57), полагая $j = 1$, при помощи формул (41), (6) и (58).

$$
\begin{aligned}
T_{1\rho} = & -\frac{A\mu_1}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(4\sigma - 1) m^2 (\rho^2 - m^2) + \right. \\
& \left. + (2\sigma + 3)\left(\rho^4 - \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] + 2\alpha_1'(\rho^2 - m^2) \right\} \cos\vartheta + \\
& + \frac{A\mu_1}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(2\sigma - 1) m^2 (\rho^2 - m^2) + \right. \\
& \left. + 3\left(\rho^4 - \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] - \frac{6\alpha_3'}{\rho^2}(\rho^6 - m^6) \right\} \cos 3\vartheta,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{1\vartheta} = & \frac{A\mu_1}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(4\sigma - 1) m^2 (\rho^2 + \right. \\
& \left. + m^2) - (2\sigma - 1)\left(\rho^4 + \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] + 2\alpha_1'(\rho^2 + m^2) \right\} \sin\vartheta + \\
& + \frac{A\mu_1}{n\sqrt{\rho^4 - 2m^2\rho^2\cos 2\vartheta + m^4}} \left\{ \frac{n^3}{16} \Big[(2\sigma + 3) m^2 (\rho^2 + m^2) - 3\left(\rho^4 + \frac{m^6}{\rho^2}\right)\Big] + \right. \\
& \left. + \frac{6\alpha_3'}{\rho^2}(\rho^6 + m^6) \right\} \sin 3\vartheta.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Если положить $\mu_2 = 0$, простым вычислением убедимся, что $T_{1\rho} = 0$ на контуре C_1, как и следовало ожидать.

Постоянная A определена по формуле (35) и имеет значение

$$
A = \frac{W}{I_E} = \frac{4W}{\pi[E_2 a_2^3 b_2 - (E_2 - E_1) a_1^3 b_1]}.
$$

Величина напряжения в точке (ρ, ϑ, z) будет определена формулой:

$$
|T| = \sqrt{T_\rho^2 + T_\vartheta^2 + Z_z^2}.
$$

Простым вычислением можно убедиться, что главный вектор напряжений, действующих на верхнее основание, направлен по оси Ox и что моменты как изгибающей, так и закручивающей пары на верхнем основании равны нулю. Это, впрочем, следует и из общей теории.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда поперечная сила параллельна оси Oy.

Если поперечная сила не проходит через центр и не параллельна одной из осей координат, то точку приложения можно перенести в центр, присоединив соответствующую закручивающую пару.

Если затем разложить силу на две составляющие по осям координат, то задача изгиба решается путем наложения решений задачи кручения и двух задач изгиба разобранного типа.

SUR LE PROBLÈME DE TORSION ET DE FLEXION PAR UNE FORCE TRANSVERSALE D'UNE POUTRE COMPOSÉE DE DEUX MATÉRIAUX ÉLASTIQUES LIMITÉS PAR DEUX ELLIPSES HOMOFOCALES

A. Roukhadzé et *I. Vekoua* (*Tiflis*)

(Résumé)

Dans son travail „Sur le problème de torsion et de flexion des poutres élastiques composées", M. N. Mouskhelichvili a posé un problème de torsion et de flexion des poutres composées limitées par des contours quelconques et a donné une solution théorique en amenant le problème à une équation intégrale de deuxième espèce de Fredholm.

Nous étudions ici le cas où les contours qui limitent les matériaux différents (dans le plan de la section transversale) sont deux ellipses homofocales.

Nous résolvons le problème sans avoir recours à l'équation intégrale, mais avec l'aide des fonctions d'une variable complexe. Avec la représentation conforme d'une aire à deux connexes dans deux cercles concentriques, nous déterminons les fonctions inconnues en les développant en séries de Laurent et de Taylor.

Nous trouvons de même les formules des composantes de la tension pour chaque point de la poutre en employant des coordonnées curvilignes spéciales.

Comme cas particuliers de notre problème, si on pose $\mu_2 = \mu_1$, ou $\mu_1 = 0$ on peut obtenir les résultats connus des problèmes de torsion et de flexion soit pour le cylindre elliptique homogène, soit pour le cylindre creux dont la section transversale est limitée par deux ellipses homofocales.