ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ I 1933 № 2

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНОК НАГРУЗКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПЛОЩАДИ КРУГА

С. А. Гершгорин *(Ленинград)*

Целью настоящей заметки является вывод одной весьма простой формулы, решающей в общем виде вопрос об изгибе пластинок нагрузками, распределенными по площади круга и обладающими осевой симметрией, в случае, если действие произвольно расположенной сосредоточенной силы на ту же пластинку известно.

В конце работы даются примеры применения полученного результата к некоторым случаям изгиба пластинок, в частности, к случаю круглых пластинок с опертыми краями.

§ 1. Изгиб пластинок силами, равномерно распределенными по окружности

Пусть имеем пластинку S с определенными очертаниями и условиями закрепления на контуре, и положим, что ее упругая поверхность под действием силы $P=1$, приложенной в точке ξ, η, определяется функцией

$$v=v(\xi, \eta, x, y).$$

Функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta\Delta v(\xi, \eta, x, y)=0, \qquad (1)$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и регулярна во всех точках пластинки S за исключением точки приложения силы $x=\xi$, $y=\eta$, где она имеет особенность вида

$$\frac{1}{16\pi N} r^2 \ln r^2, \qquad (2)$$

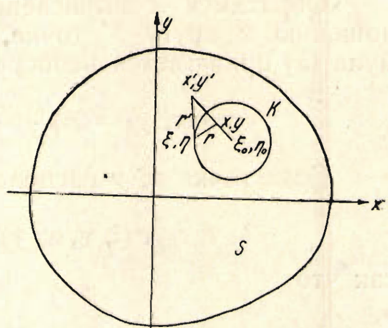

Рис. 1.

где

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

а

$$N=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

жесткость пластинки.

Заметим, что функция $v(\xi, \eta, x, y)$ удовлетворяет также дифференциальному уравнению:

$$\Delta_{\xi,\eta}\Delta_{\xi,\eta} v(\xi, \eta, x, y) = 0, \tag{3}$$

где

$$\Delta_{\xi,\eta} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

Действительно, уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$\Delta_{\xi,\eta}\Delta_{\xi,\eta} v(x, y, \xi, \eta) = 0.$$

Но

$$v(x, y, \xi, \eta) = v(\xi, \eta, x, y)$$

на основании теоремы взаимности Maxwell'a, откуда и следует сказанное. Таким образом, убеждаемся, что $v(\xi, \eta, x, y)$, рассматриваемая как функция от ξ и η, является также функцией бигармонической и регулярной во всех точках, кроме точки $\xi = x$, $\eta = y$, где она имеет особенность вида (2).

Найдем теперь упругую поверхность $w = w(x, y)$ пластинки S при действии на нее нагрузки $p = 1$ (на единицу длины), распределенной по окружности K радиуса ρ с центром в точке ξ_0, η_0 (рис. 1).

Очевидно

$$w(x, y) = \int_K v(\xi, \eta, x, y)\,ds. \tag{4}$$

Для определения интеграла (4) воспользуемся следующей теоремой:[1]

Если $f(\xi, \eta)$ функция, регулярная внутри круга K радиуса ρ и с центром ξ_0, η_0, то:

$$\int_K f(\xi, \eta)\,ds = 2\pi\rho\left[f(\xi_0, \eta_0) + \frac{\rho^2}{4}\Delta_{\xi,\eta} f(\xi_0, \eta_0) + \ldots + \frac{\rho^{2k}}{2^{2k}(k!^2)}\Delta^k_{\xi,\eta} f(\xi_0, \eta_0) + \ldots\right].$$

В частности если $f(\xi, \eta)$ — функция бигармоническая, получаем:

$$\int_K f(\xi, \eta)\,ds = 2\pi\rho\left[f(\xi_0, \eta_0) + \frac{\rho^2}{4}\Delta_{\xi,\eta} f(\xi_0, \eta_0)\right]. \tag{5}$$

Обратимся к вычислению интеграла (4). Если x, y — внешняя по отношению к кругу K точка, то $v(\xi, \eta, x, y)$ регулярна внутри K, и формула (5) прилагается непосредственно. Получаем:

$$w(x, y) = 2\pi\rho \cdot v(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{\pi\rho^3}{2}\Delta_{\xi,\eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y). \tag{6}$$

Если точка x, y расположена внутри K (рис. 1), то полагаем

$$v(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{16\pi N} r^2 \ln r^2 + v'(\xi, \eta, x, y), \tag{7}$$

так что

$$w(x, y) = \frac{1}{16\pi N}\int_K r^2 \ln r^2\,ds + \int_K v'(\xi, \eta, x, y)\,ds. \tag{8}$$

Функция $v'(\xi, \eta, x, y)$ регулярна во всех точках внутри K. Применяя к ней формулу (5), получаем:

---

[1] Rayleigh. Theory of Sound, § 275. См. также мои статьи: „О средних значениях функций на окружности и сфере". (Изв. Лгр. Полит. ин-та, т. XXXII, 1929) и „Über einen allg. Mittelwertsatz d. math. Physik" (Доклады Акад. наук СССР, 1932 г.)

$$\int\limits_K v'(\xi, \eta, x, y)\, ds = 2\pi\rho\, v'(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{\pi\rho^3}{2}\Delta_{\xi,\eta} v'(\xi_0, \eta_0, x, y) =$$

$$= 2\pi\rho\, v(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{\pi\rho^3}{2}\Delta_{\xi,\eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y,) - \frac{\rho}{8N} r_0^2 \ln r_0^2 - \frac{\rho^3}{8N}(\ln r_0^2 + 2), \quad (9)$$

где

$$r_0^2 = (x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2.$$

Нам остается найти еще интеграл

$$I = \frac{1}{16\pi N}\int\limits_K r^2 \ln r^2\, ds. \quad (10)$$

Для этого рассмотрим точку x', y', сопряженную с точкой x, y относительно окружности K по закону обратных радиусов. Очевидно

$$x' = \frac{\rho^2 x}{r_0^2}; \quad y' = \frac{\rho^2 y}{r_0^2}.$$

Если точка ξ, η расположена на K, то, как известно,

$$\frac{r}{r'} = \frac{r_0}{\rho} = \text{const},$$

где

$$r'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2.$$

На этом основании можем интеграл (10) представить в виде

$$I = \frac{r_0^2}{16\pi N\rho^2}\int\limits_K r'^2 \ln\frac{r_0^2 r'^2}{\rho^2}\, ds,$$

причем теперь подъинтегральная функция регулярна во всех точках внутри K (и бигармонична). Следовательно, согласно формуле (6) имеем:

$$I = \frac{r_0^2}{8N\rho}\left[r_0'^2 \ln\frac{r_0^2 r_0'^2}{\rho^2} + \rho^2\left(\ln\frac{r_0^2 r_0'^2}{\rho^2} + 2\right)\right],$$

где

$$r_0'^2 = (x' - \xi_0)^2 + (y' - \eta_0)^2.$$

Так как

$$r_0 r_0' = \rho^2,$$

то

$$I = \frac{\rho^3}{8N}\ln\rho^2 + \frac{\rho r_0^2}{8N}(\ln\rho^2 + 2). \quad (11)$$

На основании формул (7), (8), (9), (11) мы приходим к следующему окончательному результату:

1) Если x, y — точка внешняя относительно K, то

$$w(x, y) = w_1(x, y) = 2\pi\rho\, v(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{\pi\rho^3}{2}\Delta_{\xi,\eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y); \quad (12)$$

Если x, y внутренняя точка, то

$$w(x, y) = w_2(x, y) = 2\pi\rho\, v(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{\pi\rho^3}{2}\Delta_{\xi,\eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y) -$$

$$- \frac{\rho(\rho^2 + r_0^2)}{8N}\ln r_0^2 + \frac{\rho(\rho^2 + r_0^2)}{8N}\ln\rho^2 + \frac{\rho r_0^2}{4N}\left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}\right). \quad (13)$$

§ 2. Нагрузка распределена по площади круга

Обратимся теперь к тому случаю, когда нагрузка p действует по площади круга T радиуса R с центром в точке ξ_0, η_0. Положим, что p зависит только от растояния ρ рассматриваемой точки круга T до его центра, т. е. что

$$p = p(\rho).$$

Упругую поверхность пластинки в рассматриваемом сейчас случае обозначим через $W = W(x, y)$. Очевидно,

$$W(x, y) = \int_0^R p(\rho)\, w(x, y)\, d\rho,$$

где $w(x, y)$ имеет то же значение, что в предыдущем параграфе.

В частности, если x, y — внешняя по отношению к кругу T точка, то

$$W(x, y) = W_1(x, y) = \int_0^R p(\rho)\, w_1(x, y)\, d\rho, \tag{14}$$

если же x, y — точка внутренняя, то

$$W(x, y) = W_2(x, y) = \int_0^{r_0} p(\rho)\, w_1(x, y)\, d\rho + \int_{r_0}^R p(\rho)\, w_2(x, y)\, d\rho. \tag{15}$$

На основании формул (12) и (13) далее получаем:

$$W_1(x, y) = Pv(\xi_0, \eta_0\, x, y) + \frac{A}{4}\Delta_{\xi, \eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y), \tag{16}$$

$$W_2(x, y) = Pv(\xi_0, \eta_0, x, y) + \frac{A}{4}\Delta_{\xi, \eta} v(\xi_0, \eta_0, x, y) - \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N}\ln r_0^2 + \theta(r_0), \tag{17}$$

где

$$\theta(r_0) = \frac{1}{8N}\int_{r_0}^R p(\rho)\left[\rho(\rho^2 + r_0^2)\ln\rho^2 + 2\rho r_0^2\left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}\right)\right] d\rho, \tag{18}$$

$$P = 2\pi\int_0^R p(\rho)\,\rho d\rho,$$

$$A = 2\pi\int_0^R p\,\rho(\rho)\,\rho^3\, d\rho.$$

P представляет полную нагрузку на круг T, а A — полярный момент инерции фиктивного распределения масс с плотностью p относительно центра круга T.

Формулы (16), (17) и (18) дают полное решение поставленной нами задачи в общем виде.

Выпишем еще выражения функции $\theta(r_0)$ для некоторых случаев нагрузки. Если $p = p_n\rho^n$, где p_n — постоянная, то

$$\theta(r_0) = \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N}\ln R^2 + \frac{1}{8\pi N}\left[\frac{n+1}{n+2}Pr_0^2 + \frac{4}{(n+4)(n+2)^2}A\left(\frac{r_0}{R}\right)^{n+4} - \frac{n+5}{n+4}A\right], \tag{19}$$

причем в данном случае

$$P = 2\pi\frac{R^{n+2}}{n+2}p_n,$$

$$A = 2\pi\frac{R^{n+4}}{n+4}p_n.$$

На основании формулы (19) может быть легко получено выражение для $\theta(r_0)$ и в том случае, когда $p(\rho)$ выражается полиномом произвольной степени от ρ.

В частности, если $n=0$ (равномерная нагрузка $p=p_0$), то

$$\theta(r_0)=\frac{Pr_0^2+A}{16\pi N}\ln R^2+\frac{1}{32\pi N}\left[2Pr_0^2+A\left(\frac{r_0}{R}\right)^4-5A\right], \tag{20}$$

где

$$P=\pi R^2 p_0,$$
$$A=\frac{\pi R^4}{4}p_0.$$

§ 3. Применение полученных формул к круглой пластинке с заделанными краями

Рассмотрим круглую пластинку радиуса a, заделанную по краям и подверженную в точке ξ, η действию сосредоточенной силы $P=1$. Обозначим через c расстояние точки ξ, η до центра пластинки, через r — расстояние произвольной точку x, y пластинки до точки ξ, η, а через $\bar{r}$ — расстояние той же точки x, y до точки ξ', η', сопряженной с точкой ξ, η относительно кругового контура пластинки по закону обратных радиусов, т. е. положим:

$$c^2=\xi^2+\eta^2,$$
$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

где

$$\bar{r}^2=(x-\xi')^2+(y-\eta')^2,$$
$$\xi'=\frac{a^2\xi}{c^2},\quad \eta'=\frac{a^2\eta}{c^2}.$$

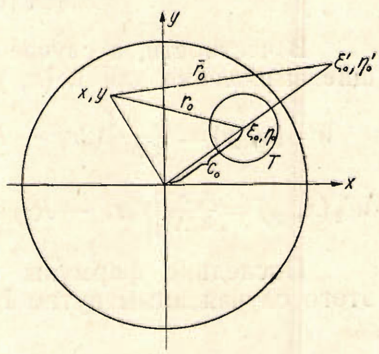

Рис. 2.

Упругая поверхность $v(\xi, \eta, x, y)$ в данном случае представляется в виде:[1]

$$v(\xi, \eta, x, y)=\frac{1}{16\pi N}\left(r^2\ln\frac{a^2r^2}{c^2\bar{r}^2}+\frac{c^2\bar{r}^2}{a^2}-r^2\right).$$

Замечая, что

$$c^2\bar{r}^2=c^2\lambda^2+a^4-2a^2(x\xi+y\eta),$$

где

$$\lambda^2=x^2+y^2,$$

нетрудно убедиться, что

$$\Delta_{\xi,\eta}r^2\ln c^2\bar{r}^2=4\left[\ln c^2\bar{r}^2+1+\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{(a^2-\lambda^2)(c^2\lambda^2-a^4)}{a^2c^2\bar{r}^2}\right].$$

Отсюда следует:

$$\Delta_{\xi,\eta}v(\xi, \eta, x, y)=\frac{1}{4\pi N}\left[\ln\frac{a^2r^2}{c^2\bar{r}^2}-\frac{(a^2-\lambda^2)(c^2\lambda^2-a^4)}{a^2c^2\bar{r}^2}\right].$$

Если на пластинку действует круговая нагрузка описанного в § 2 вида (рис. 2), то ее упругая поверхность представится на основании формул (16), (17) и (18) уравнениями:

---

[1] Michell, London Math. Soc. Proc. vol. 34 (1902), p. 223. Также Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, p. 563.

$$W_1(x, y) = \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N} \ln \frac{a^2 r_0^2}{c_0^2 \bar{r}_0^2} + \frac{P}{16\pi N}\left(\frac{c_0^2 \bar{r}_0^2}{a^2} - r_0^2\right) - \frac{A}{16\pi N} \frac{(a^2 - \lambda^2)(c_0^2\lambda^2 - a^4)}{a^2 c_0^2 \bar{r}_0^2}, \quad (21)$$

$$W_2(x, y) = \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N} \ln \frac{a^2 r_0^2}{c_0^2 \bar{r}_0^2} + \frac{P}{16\pi N}\left(\frac{c_0^2 \bar{r}_0^2}{a^2} - r_0^2\right) - \frac{A}{16\pi N} \frac{(a^2 - \lambda^2)(c_0^2\lambda^2 - a^4)}{a^2 c_0^2 \bar{r}_0^2} + \theta(r_0), \quad (22)$$

где

$$c_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2,$$
$$r_0^2 = (x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2,$$
$$\bar{r}_0^2 = (x - \xi_0')^2 + (y - \eta_0')^2$$

(ξ_0', η_0' представляет точку, сопряженную с точкой ξ_0, η_0 относительно кругового контура пластинки).

Если нагрузка следует закону $p = p_n \rho^n$, то W_2 принимает вид:

$$W_2(x, y) = \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N} \ln \frac{a^2 R^2}{c_0^2 \bar{r}_0^2} + \frac{P}{16\pi N}\left(\frac{c_0^2 \bar{r}_0^2}{a^2} + \frac{n}{n+2} r_0^2\right) - \frac{A}{16\pi N} \frac{(a^2 - \lambda^2)(c_0^2\lambda^2 - a^4)}{a^2 c_0^2 \bar{r}_0^2} + \frac{A}{8\pi N}\left[\frac{4}{(n+4)(n+2)^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{n+4} - \frac{n+5}{n+4}\right].$$

В частности, в случае равномерной нагрузки $p = p_0$ получаем следующие выражения для $W(x, y)$:

$$W_1(x, y) = \frac{p_0 R^2}{32N}\left[(2r_0^2 + R^2) \ln \frac{a^2 r_0^2}{c^2 \bar{r}_0^2} + \frac{2c_0^2 \bar{r}_0^2}{a^2} - 2r_0^2 - \frac{R^2 (a^2 - \lambda^2)(c^2\lambda^2 - a^4)}{a^2 c_0^2 \bar{r}_0^2}\right],$$

$$W_2(x, y) = \frac{p_0 R^2}{32N}\left[(2r_0^2 + R^2) \ln \frac{a^2 r_0^2}{c^2 \bar{r}_0^2} + \frac{2c_0^2 \bar{r}_0^2}{a^2} + \frac{r_0^4}{2R^2} - \frac{5R^2}{2} - \frac{R^2 (a^2 - \lambda^2)(c_0^2\lambda^2 - a^4)}{a^2 c_0^2 \bar{r}_0^2}\right].$$

Последние формулы тождественны с формулами, полученными для этого случая иным путем H. Schmidt'ом.[1]

§ 4. Случай бесконечной полосы, опертой по краям

В случае полосы, бесконечно протяженной в направлении оси y, свободно опертой по краям $x = 0$ и $x = a$ и подверженной действию силы $P = 1$ в точке ξ, η, упругая поверхность $v(\xi, \eta, x, y)$ дается формулами:[2]

а) при $y \geqslant \eta$

$$v(\xi, \eta, x, y) = v_1(\xi, \eta, x, y) = \frac{a^2}{2\pi^2 N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi(y-\eta)}{a}}}{n^3}\left[1 + \frac{n\pi(y-\eta)}{a}\right] \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad (23)$$

б) при $y \leqslant \eta$

$$v(\xi, \eta, x, y) = v_2(\xi, \eta, x, y) = \frac{a^2}{2\pi^2 N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{n\pi(y-\eta)}{a}}}{n^3}\left[1 - \frac{n\pi(y-\eta)}{a}\right] \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}. \quad (24)$$

Хотя $v(\xi, \eta, x, y)$ и выражается бесконечным рядом, однако, как заметил Nadái,[3] все моменты напряжений и перерезывающие силы могут быть представлены в конечном виде. Действительно, в данном случае имеют место равенства:

---

[1] Ein Beitrag zur Theorie der Biegung homog. Kreisplatten, Ing.-Archiv, B. I, H. 2 (1930). Надо отметить, что метод, которым H. Schmidt приходит к своим формулам, отличается большой сложностью.

[2] A. Nadái. Die elastischen Platten, § 25.

[3] Loc. cit., §§ 25—30.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=\frac{1}{2}\left(\varphi-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}&=\frac{1}{2}\left(\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{2}y\frac{\partial\varphi}{\partial x},\end{aligned}\tag{25}$$

причем:[1]

$$\varphi=\varphi(\xi,\eta,x,y)=\Delta v(\xi,\eta,x,y)=$$

$$=R\left[\frac{1}{2\pi N}\ln\frac{\sin\frac{\pi(z-\zeta)}{a}}{\sin\frac{\pi(z+\bar\zeta)}{a}}\right]=\frac{1}{4\pi N}\ln\frac{\cos h\frac{\pi(y-\eta)}{a}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\cos h\frac{\pi(y-\eta)}{a}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a}},\tag{26}$$

где

$$z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta,$$

а $R[\quad]$ обозначает вещественную часть стоящей в скобках величины.

Так как

$$\Delta_{\xi,\eta}v(\xi,\eta,x,y)=\Delta_{\xi,\eta}v(x,y,\xi,\eta),$$

то выражение для $\Delta_{\xi,\eta}v(\xi,\eta,x,y)$ можем получить из $\varphi(\xi,\eta,x,y)$ путем замены x и y соответственно на ξ и η и наоборот. При этом получаем:

$$\Delta_{\xi,\eta}v(\xi,\eta,x,y)=\varphi(\xi,\eta,x,y).\tag{27}$$

Обратимся теперь к рассмотрению действия на нашу полосу круговой нагрузки. Обозначая упругую поверхность в этом случае через $W(x,y)$, получаем на основании формул (16), (17) и (27):

1) В точках внешних по отношению к кругу T

$$W(x,y)=W_1(x,y)=Pv(\xi_0,\eta_0,x,y)+\frac{A}{4}\varphi(\xi_0,\eta_0,x,y).\tag{28}$$

2) Во внутренних точках:

$$W(x,y)=W_2(x,y)=Pv(\xi_0,\eta_0,x,y)+\frac{A}{4}\varphi(\xi_0,\eta_0,x,y)-$$
$$-\frac{Pr_0^2+A}{16\pi N}\ln r_0^2+\theta(r_0).\tag{29}$$

На основании равенств (25), (26), (28), (29) можно написать (в конечном виде) выражения для моментов напряжений m_x, m_y, m_{xy} и для перерезывающих сил p_x, p_y. Для внешних по отношению к кругу T точек получаем:

$$\begin{aligned}m_x&=-\frac{N}{2}\left[P(1+\sigma)\varphi-P(1-\sigma)y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{A(1-\sigma)}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right],\\ m_y&=-\frac{N}{2}\left[P(1+\sigma)\varphi+P(1+\sigma)y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{A(1-\sigma)}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right],\\ m_{xy}&=-\frac{N}{2}\left[P(1-\sigma)y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{A(1-\sigma)}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right],\\ p_x&=-NP\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ p_y&=-NP\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}\tag{30}$$

Для точек внутри круга к этим формулам прибавляются члены, про-

[1] Функция $\varphi=\Delta v$ является гармонической и, будучи продолжена на всю плоскость, обладает в точках $\zeta+2ka$ и $-\zeta+2ka$ соответственно особенностями вида $\frac{1}{4\pi N}\ln r_0^2$ и $-\frac{1}{4\pi N}\ln r_0^2$. Отсюда можно притти к равенству (26).

исходящие от добавочного слагаемого $-\frac{Pr_0^2+A}{16\pi N}\ln r_0^2+0(r_0)$ в выражении упругой поверхности.

Заметим, что формулы настоящего параграфа (с соответствующими изменениями и дополнениями) могут быть использованы применительно к прямоугольным пластинкам с двумя свободно опертыми противоположными сторонами, а также к безбалочным перекрытиям.[1]

ÜBER DIE BIEGUNG VON PLATTEN DURCH LASTEN, DIE ÜBER EINE KREISFLÄCHE VERTEILT SIND

Von S. Gerschgorin (*Leningrad*)

Zusammenfassung

In der vorliegenden Note werden allgemeine Formeln abgeleitet, durch welche die Frage der Biegung von elastischen Platten durch Lasten, die über eine Kreisfläche kreissymmetrisch verteilt sind, in allgemeiner Form gelöst wird. Es bedeute $v=v(\xi, \eta, x, y)$ die elastische Fläche der Platte unter der Wirkung einer im Punkte ξ, η angreifenden Einzelkraft $P=1$. Ist die Belastung durch die Gleichung $p=p(\rho)$ angegeben, wo ρ den Abstand vom Mittelpunkte ξ_0, η_0 des Kreises T bedeutet, so wird die gesuchte elastische Fläche $W=W(x, y)$ durch die Gleichungen (16) bzw. (17)—(18) ausgedrückt, je nachdem x, y ein äusserer oder innerer Punkt der Kreisfläche T ist. Dabei bedeutet P die volle Belastung über die Fläche T, A das polare Trägheitsmoment dieser Belastung (als eine ebene Massenverteilung betrachtet) in Bezug auf den Punkt ξ_0, η_0, r_0 den Abstand zwischen den Punkten x, y und ξ_0, η_0 und N—die Plattensteifigkeit.

Die erhaltenen Resultate werden in § 3 auf den Fall einer eingeklemmten Kreisplatte angewandt. Die Funktion $v(\xi, \eta, x, y)$ lässt sich in diesem Fall nach Michell durch Gleichung (20) ausdrücken. Wirkt eine Kreisbelastung, so ist die elastische Fläche durch Formeln (21) und (22) gegeben. Im Fall einer gleichförmigen Kreisbelastung kommen wir zu den Formeln (21') und (22'), die mit denen zusammenfallen, welche von H. Schmidt vor einiger Zeit in ganz anderer Weise abgeleitet wurden.[2]

In § 4 wird der Fall eines unendlich langen freiaufliegenden Plattenstreifens betrachtet. Die Lösung wird durch Formeln (23), (24), (28), (29) gegeben. Es sei bemerkt, dass in diesem Fall alle Spannungsmomente und Scherkräfte sich in geschlossener Weise darstellen lassen, wie aus Formeln (26), (30) ersichtlich ist.

---

[1] См. мою работу: „Бесконечная пластинка на опорах, расположенных в прямоугольном порядке“. (Сборник по теории сооружений, изд. КУБУЧ, Лгр. 1932.)

[2] S. Fussnote auf S. 164.