

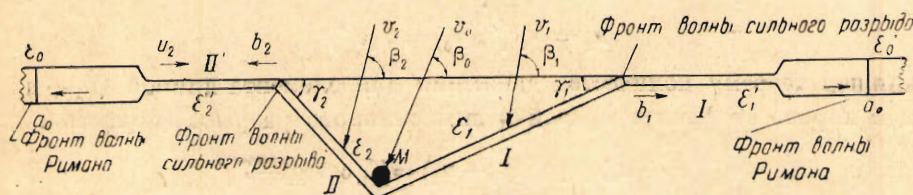
## О КОСОМ УДАРЕ ПО ГИБКОЙ НИТИ С БОЛЬШИМИ СКОРОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

**1. Общие уравнения задачи.** Пусть с прямолинейной и неограниченной гибкой нитью под углом  $\beta_0$  встречается материальная точка бесконечно большой массы, имеющая скорость  $v_0$ . Начальная деформация нити пусть будет равна  $\varepsilon_0$ . Очевидно, во время движения вектор скорости указанной точки не изменится.

Рассмотрим случай скользящего удара при наличии трения и случай, когда движение происходит без скольжения, т. е. материальная точка будет все время двигаться вместе с одной и той же частицей нити.



Фиг. 1

Допустим, что при ударе возникает следующее движение: вправо и влево от ударяющейся материальной точки побегут две системы волн, одна из которых есть волны Римана, распространяющиеся вдоль нити, другая — поперечные волны сильного разрыва (фиг. 1). Изменение толщины поперечного сечения нити, представленное на чертеже, иллюстрирует изменение деформаций нити; утонченные места соответствуют большим деформациям, а утолщенные — малым деформациям. На фиг. 1 приведены также обозначения, принятые в дальнейшем.

**Деформации:**  $\varepsilon_0$  — начальная деформация нити до удара,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — деформации соответственно в областях I и II,  $\varepsilon_1'$  и  $\varepsilon_2'$  — максимальные деформации соответственно в областях I' и II'.

**Скорости:**  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частиц соответственно в областях I и II,  $u_1$  и  $u_2$  — максимальные скорости в областях I' и II'; через  $b_1$  и  $b_2$  обозначены скорости распространения сильных разрывов соответственно вправо и влево.

**Углы:**  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — углы скоростей  $v_1$  и  $v_2$  с начальным направлением нити,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы нити в областях I и II с начальным направлением нити.

Из перечисленных 15 величин предполагается заданной только  $\varepsilon_0$ . Таким образом 14 из них неизвестны.



В области  $I'$  имеет место распространение продольных волн Римана и, следовательно, величины  $u_1$ ,  $\varepsilon_1'$  будут максимальными значениями величин скоростей и деформаций во всей рассматриваемой области  $I'$ . Аналогично  $u_2$  и  $\varepsilon_2'$  будут максимальными значениями скоростей и деформаций во всей области  $II'$ .<sup>1</sup>

Если концевому сечению покоящегося стержня мгновенно сообщить постоянную скорость  $u_0$ , то вдоль этого стержня побегут волны Римана<sup>1</sup> и мы будем иметь

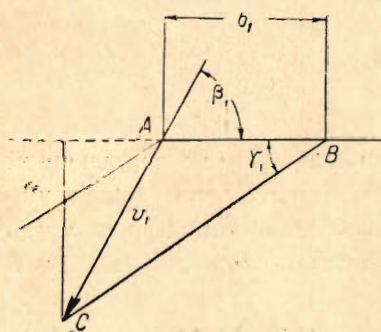
$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon = \psi(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad (1.1)$$

где  $a(\varepsilon)$  — местная скорость звука

$$a(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}} \quad (1.2)$$

причем  $T = T(\varepsilon)$  есть натяжение нити,  $\rho_0$  — масса единицы длины.

Перейдем теперь к составлению уравнений, которыми описывается движение, представленное на схеме **фиг. 1**.



Фиг. 2

На основании (1.1) имеем

$$u_1 = \psi(\varepsilon_1', \varepsilon_0) = \psi(\varepsilon_1') \quad (1.3)$$

Напишем теорему количества движения для элемента длиной  $(b_1 + u_1) dt$ , лежащей вправо от фронта правой волны сильного разрыва (область  $I'$ ):

$$\rho_1' (b_1 + u_1) (v_1 \cos \beta_1 - u_1) = T_1 \cos \gamma_1 - T_1' \quad (1.4)$$

$$\rho_1' (b_1 + u_1) v_1 \sin \beta_1 = T_1 \sin \gamma_1 \quad (1.5)$$

где  $T_1 = T(\varepsilon_1)$  — натяжение на фронте волны сильного разрыва, т. е. на левом конце элемента,  $T_1' = T(\varepsilon_1')$  — натяжение на правом конце,  $\rho_1'$  — масса единицы длины в области  $I'$ .

Напишем условия непрерывности смещений при переходе частиц из области  $I'$  в область  $I$ . Из треугольника  $ABC$  (**фиг. 2**) непосредственно имеем

$$BC = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \beta_1 + (b_1 + v_1 \cos \beta_1)^2}$$

До перехода через поверхность сильного разрыва элемент  $BC$  нити имел длину  $b_1 + u_1$ . Деля длину равномерно деформированного стержня на  $1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — его деформация, мы получим длину стержня в недеформированном состоянии.

Имея в виду только что сказанное, получим условие неразрывности

$$\frac{b_1 + u_1}{1 + \varepsilon_1'} = \frac{\sqrt{v_1^2 \sin^2 \beta_1 + (b_1 + v_1 \cos \beta_1)^2}}{1 + \varepsilon_1} \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> См. работу автора «О распространении волн разгрузки» в этом же томе журнала, стр. 91. При этом автор, пользуясь случаем, исправляет ошибку, вставшуюся в формулу (1.27). А именно, указанная формула должна иметь вид

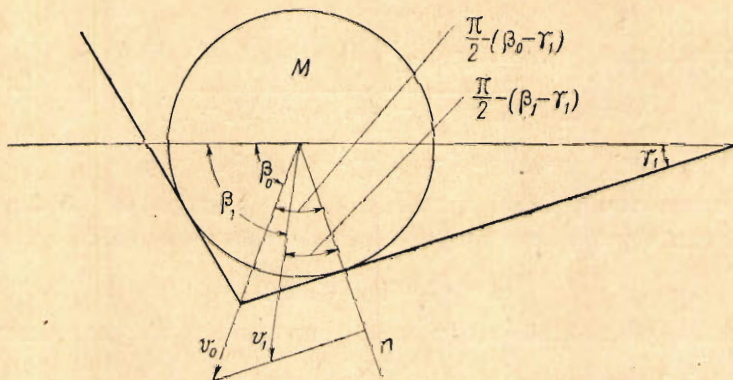
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{1 + af'}{a^2 f'^2 - 1} a \frac{d\varepsilon_0}{dx}$$



Из фиг. 1 имеем следующее геометрическое условие:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{v_0 \sin \beta_0}{b_1 + v_0 \cos \beta_0} \quad (1.7)$$

Напишем так называемое условие скольжения точки  $M$  (фиг. 1). Так как точка  $M$  скользит по нити, то проекции скоростей прилегающего к ней

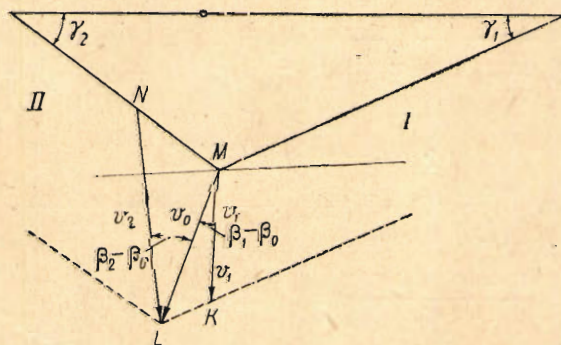


Фиг. 3

элемента нити и самой точки на нормаль  $n$  к нити должны быть равны между собой (фиг. 3):

$$v_0 \sin(\beta_0 - \gamma_1) = v_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1) \quad (1.8)$$

Шесть уравнений аналогичных (1.3)–(1.8) можно написать для обла-



Фиг. 4

стей II' и II, лежащих слева от ударяющейся материальной точки. Таким образом получим

$$x_2 = \psi(\varepsilon_2') \quad (1.9)$$

$$\beta_2' (b_2 + x_2) (-x_2 \cos \beta_2 - u_2) = T_2 \cos \gamma_2 - T_2' \quad (1.10)$$

$$\beta_2'' (b_2 + x_2) v_2 \sin \beta_2 = T_2 \sin \gamma_2 \quad (1.11)$$

$$\frac{b_2 + u_2}{1 + \varepsilon_2'} = \frac{\sqrt{x_2^2 \sin^2 \beta_2 + (b_2 - v_2 \cos \beta_2)^2}}{1 + \varepsilon_2} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{v_0 \sin \beta_0}{b_2 - v_2 \cos \beta_0} \quad (1.13)$$

$$v_0 \sin(\gamma_2 + \beta_0) = v_2 \sin(\gamma_2 + \beta_2) \quad (1.14)$$



Кроме написанных 12 уравнений, можно написать еще два уравнения, связывающие области I и II. Для этого воспользуемся фиг. 4. Из треугольников  $MLK$  и  $MNL$  имеем

$$MN^2 = v_2^2 + v_0^2 - 2v_2 v_0 \cos(\beta_2 - \beta_0), \quad LK^2 = v_1^2 + v_0^2 - 2v_1 v_0 \cos(\beta_1 - \beta_0)$$

Так как

$$\frac{MN}{1 + \varepsilon_2} = \frac{LK}{1 + \varepsilon_1}$$

то первым уравнением связи будет

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_1) \sqrt{v_2^2 + v_0^2 - 2v_2 v_0 \cos(\beta_2 - \beta_0)} = \\ = (1 + \varepsilon_2) \sqrt{v_1^2 + v_0^2 - 2v_1 v_0 \cos(\beta_1 - \beta_0)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Если принять точку  $M$  за цилиндр малого радиуса и обозначить коэффициент трения через  $f$ , то получим второе уравнение связи

$$T_1 = T_2 \exp [f(\gamma_1 + \gamma_2)] \quad (1.16)$$

Из этих 14 уравнений необходимо определить все искомые величины через  $v_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\varepsilon_0$ .

**2. Максимальные деформации.** Покажем, что максимальная деформация в области I' равна деформациям частиц нити, принадлежащих области I:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$$

Умножая уравнение (1.4) на  $\sin \gamma_1$ , уравнение (1.5) на  $-\cos \gamma_1$  и складывая результаты, имеем

$$\rho_1' (b_1 + u_1) [v_1 \sin(\gamma_1 - \beta_1) - u_1 \sin \gamma_1] = -T_1' \sin \gamma_1 \quad (2.1)$$

С другой стороны, из (1.7) имеем  $b_1 \sin \gamma_1 = v_0 \sin(\beta_0 - \gamma_1)$ . Следовательно, на основании (1.8) получим  $v_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1) = b_1 \sin \gamma_1$ . Подставляя последнее в (2.1), найдем

$$\rho_1' (b_1 + u_1)^2 = T_1' (\varepsilon_1') \quad (2.2)$$

Так как  $u_1 = u_1(\varepsilon_1')$ , то уравнение (2.2) связывает скорость  $b_1$  и деформацию  $\varepsilon_1'$ . Далее из (1.6) имеем

$$\frac{(b_1 + u_1)^2 (1 + \varepsilon_1)^2}{(1 + \varepsilon_1')^2} = v_1^2 + 2v_1 b_1 \cos \beta_1 + b_1^2 \quad (2.3)$$

Из (1.4) и (1.5) находим

$$\begin{aligned} v_1 \sin \beta_1 &= \frac{T_1 \sin \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} \\ v_1 \cos \beta_1 &= \frac{T_1 \cos \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} - \frac{T_1'}{\rho_1' (b_1 + u_1)} + u_1 = \frac{T_1 \cos \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} - b_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Возведя эти уравнения в квадрат и складывая результаты, имеем

$$v_1^2 = \frac{T_1^2}{\rho_1'^2 (b_1 + u_1)^2} - 2b_1 \frac{T_1 \cos \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} + b_1^2 \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.3) выражение  $v_1^2$  и  $v_1 \cos \beta_1$  получим

$$\frac{(b_1 + u_1)^2 (1 + \varepsilon_1)^2}{(1 + \varepsilon_1')^2} = \frac{T_1^2}{\rho_1'^2 (b_1 + u_1)^2} - 2b_1 \frac{T_1 \cos \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} + b_1^2 + 2b_1 \frac{T_1 \cos \gamma_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} - 2b_1^2 + b_1^2$$



Произведя приведение подобных членов в правой части этого уравнения и имея в виду (1.2), найдем

$$\frac{T_1'^2}{(1 + \varepsilon_1')^2} = \frac{T_1^2}{(1 + \varepsilon_1)^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1' \quad (2.6)$$

Нетрудно заметить, что из уравнений (1.3) — (1.7) можно определить величины  $v_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  через  $\varepsilon_1$ ,  $\beta_0$ ,  $v_0$ .

Выведем ряд соотношений, имеющих место для областей II и II'. Из уравнений (1.10) и (1.11)

$$\rho_2' (b_2 + u_2) [v_2 \sin(\beta_2 + \gamma_2) + u_2 \sin \gamma_2] = T_2' \sin \gamma_2 \quad (2.7)$$

Но из (1.13) имеем  $b_2 \sin \gamma_2 = v_0 \sin(\beta_0 + \gamma_0)$ . Следовательно, из (1.14) найдем

$$v_2 \sin(\beta_2 + \gamma_2) = b_2 \sin \gamma_2$$

Подставляя  $v_2 \sin(\beta_2 + \gamma_2)$  в (2.7), получим

$$\rho_2' (b_2 + u_2)^2 = T_2' \quad (2.8)$$

Возведя в квадрат обе части уравнения (1.12), имеем

$$\frac{(1 + \varepsilon_2)^2 (b_2 + u_2)^2}{(1 + \varepsilon_2')^2} = v_2^2 - 2b_2 v_2 \cos \beta_2 + b_2^2 \quad (2.9)$$

Из уравнений (1.10) и (1.11), имея в виду (2.8), легко получить

$$\begin{aligned} v_2 \cos \beta_2 &= \frac{T_2'}{\rho_2' (b_2 + u_2)} - u_2 - \frac{T_2 \cos \gamma_2}{\rho_2' (b_2 + u_2)} = b_2 - \frac{T_2 \cos \gamma_2}{\rho_2' (b_2 + u_2)} \\ v_2 \sin \beta_2 &= \frac{T_2 \sin \gamma_2}{\rho_2' (b_2 + u_2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Откуда

$$v_2^2 = \frac{T_2^2}{\rho_2'^2 (b_2 + u_2)^2} + b_2^2 - 2b_2 \frac{T_2 \cos \gamma_2}{\rho_2' (b_2 + u_2)} \quad (2.11)$$

Подставляя полученное выражение в (2.9), получим

$$\frac{(b_2 + u_2)^2 (1 + \varepsilon_2)^2}{(1 + \varepsilon_2')^2} = \frac{T_2^2}{\rho_2'^2 (b_2 + u_2)^2}$$

или, имея в виду (2.2), найдем

$$\frac{T'^2}{(1 + \varepsilon_2')^2} = \frac{T_2^2}{(1 + \varepsilon_2)^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2' \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) выражает равенство деформаций перед и за фронтом волны сильного разрыва, двигающейся влево со скоростью  $b_2$ . Заметим, что уравнения (2.6) и (2.12) имеют также решения, отличные от  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$ . Покажем, что решения этих уравнений, кроме  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$ , не имеют физического смысла.

Рассмотрим линейную зависимость  $T = E\varepsilon$ . В этом случае рассматриваемые уравнения имеют вид

$$\frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{(1 + \varepsilon_1)^2}$$

Рассмотрим функции

$$y = \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2}, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^3}$$



По графику (фиг. 5) функции  $y = y(\varepsilon)$  видно, что уравнения (2.5) и (2.10) имеют два решения, одно из которых есть нами принятое, другое же имеет отрицательное значение для  $\varepsilon_1'$  при положительном  $\varepsilon_1$  и наоборот. Так как нить не воспринимает сжимающих напряжений, то второе решение физически не реально.

Заметим, что, подставляя выражения для  $v_1, \beta_1, v_2, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  в уравнения (1.15) и (1.16), получим систему двух уравнений, откуда можно определить  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(v_0, \beta_0, \varepsilon_0)$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(v_0, \beta_0, \varepsilon_0)$ .

**3. Случай удара без трения.** Если коэффициент трения  $f=0$ , то из (1.16) получим, что  $T_1 = T_2 = T$ ; поэтому и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , т. е. деформации в областях I и II одинаковы. Таким образом уравнение (1.15) примет вид

$$v_2^2 - v_1^2 = 2v_0 \{ [v_2 \sin \beta_2 - v_1 \sin \beta_1] \sin \beta_0 + [v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1] \cos \beta_0 \} \quad (3.1)$$

Так как в рассматриваемом случае согласно (1.2) и (1.9)  $u_1 = u_2 = u$ , то

$$b_1 = b_2 = b, \quad \rho_1' = \rho_2' = \rho' = \frac{\rho}{1 + \varepsilon}$$

Поэтому из (2.4) и (2.9) получим

$$v_2^2 - v_1^2 = 2b \frac{T}{\rho(b+u)} (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2)$$

Аналогично из (2.4) и (2.10)

$$v_2 \sin \beta_2 - v_1 \sin \beta_1 = \frac{T}{\rho(b+u)} (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1)$$

$$v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1 = 2b - \frac{T}{\rho(b+u)} (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)$$

Таким образом уравнение (3.1) можно преобразовать

$$b (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) = v_0 \left\{ (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) \sin \beta_0 + \frac{2b\rho(b+u)}{T} \cos \beta_0 - (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) \cos \beta_0 \right\}$$

Определим  $v_0 \cos \beta_0, v_0 \sin \beta_0$ . Из (1.7) и (1.13) имеем

$$v_0 \sin \beta_0 = \frac{2b \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2}, \quad v_0 \cos \beta_0 = \frac{b (\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1)}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2} \quad (3.2)$$

Следовательно, окончательно уравнение (3.1) будет иметь вид

$$(\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) = 2 (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2 + (\lambda - \cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) (\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1) \quad (3.3)$$

Это и есть основное уравнение, решающее задачу о косом ударе без трения. В него входит только один параметр  $\lambda$ , зависящий от вида функции  $T = T(\varepsilon)$  и начального натяжения  $\varepsilon_0$ , так как

$$\lambda = \frac{2b\rho'(b+u)}{T(\varepsilon)} = \frac{2b}{b+u}, \quad \rho_0(b+u)^2 = (1+\varepsilon)T, \quad u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.4)$$



Кроме того, из (3.2) получим

$$v_0^2 = b^2 \frac{(\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1)^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \gamma_1 \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2)^2}, \quad \operatorname{ctg} \beta_0 = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \gamma_2) \quad (3.5)$$

Уравнения (3.3), (3.4) и (3.5) позволяют решать до конца задачу об определении возникающих при косом ударе деформаций по заданной скорости удара и угла  $\beta_0$ .

Для этого следует составить таблицу значений  $\lambda = \lambda(\varepsilon, \varepsilon_0)$  на основании зависимостей (3.4). С помощью значений  $\lambda = \lambda(\varepsilon, \varepsilon_0)$  можно составить таблицу изменения  $v_0$  для различных значений  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и  $\beta_0$ . Для этого, задаваясь значениями  $\gamma_1$  при фиксированном  $\beta_0$ , из второго соотношения (3.5) определяем значения  $\gamma_2$ . Затем из (3.4) определяем  $\lambda$ ; по значениям  $\lambda$  упомянутой таблицы  $\lambda = \lambda(\varepsilon, \varepsilon_0)$  находим  $\varepsilon$  для фиксированного  $\varepsilon_0$ .

Зная же  $\varepsilon$ , определяем из (3.4) значение  $b$  и по (3.3) скорость удара  $v_0$ .

**4. Случай нормального удара.** В силу симметрии в этом случае деформации слева и справа от точки удара будут одинаковыми; поэтому уравнение (1.16) заменится уравнением

$$T_1 = T_2 \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (4.1)$$

Уравнение (1.15), так же как и в предыдущем параграфе, примет вид (3.3). Из симметрии движения можно заключить, что  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , и следовательно, уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\lambda = 2 \cos \gamma \quad (4.2)$$

На основании первого соотношения (3.4) получим

$$b = (b + u) \cos \gamma \quad (4.3)$$

Из первого уравнения (3.2) имеем

$$v_0 = b \operatorname{tg} \gamma \quad (4.4)$$

Таким образом в рассматриваемом случае задача свелась к решению уравнений (4.2), (4.3) и (4.4).

Для определенности положим  $T = E\varepsilon$ . Тогда из соотношений (3.4) найдем

$$u = a_0 (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad b = a_0 \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)} - a_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (4.5)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) дают

$$b^2 + v_0^2 = (b + u)^2 = a_0^2 (1 + \varepsilon)$$

$$\bar{v}_0 = \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_0) \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)} + (\varepsilon - \varepsilon_0)^2} \quad \text{или} \quad \bar{v}_0 \approx \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_0) \sqrt{\varepsilon}} \quad (4.6)$$

где  $\bar{v}_0 = v_0 / a_0$ . Отсюда в случае отсутствия начального натяжения

$$\varepsilon \approx \frac{v_0^{4/3}}{V^2}, \quad b \approx \frac{v_0^{2/3}}{V^2} \quad \text{или} \quad b \approx 0.8 v_0^{2/3} a_0^{1/3} \quad (4.7)$$

Пользуясь (4.4), находим

$$\operatorname{tg} \gamma \approx 1.25 \sqrt[3]{\frac{v_0}{a_0}} \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) показывает, что угол  $\gamma$  имеет большую величину даже при малых скоростях.



Найдем величину скорости, которая для железной проволоки вызвала бы предельные упругие деформации. Пусть  $\varepsilon_s = 0,002$ . Тогда (4.7) дает

$$\bar{v}_{os} = \sqrt{2\varepsilon_s^{3/4}} = 1,4 (2 \times 10^{-3})^{3/4} = 0,011 \quad \text{или} \quad v_{os} = 0,011a_0 \approx 55 \text{ м/сек}$$

Таким образом для перехода материала проволоки за предел упругости требуются значительные скорости.

При ударе по сильно натянутой нити с малыми скоростями, можно принять  $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ . В этом случае из формулы (4.5) имеем

$$b = a_0 \sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{E\varepsilon_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

Как и следовало ожидать, скорость распространения волны сильного разрыва оказалась равной скорости звука в натянутой струне. Заметим, что согласно нашей теории при ударе по струне вдоль нее также побегит волна продольного растяжения. В обычной теории колебания струны эта волна не принимается во внимание.

**5. Косой удар при отсутствии скольжения.** Если скольжение отсутствует, то частицы нити в областях I и II должны иметь одинаковую скорость, равную скорости удара, а именно

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_0, \quad v_1 = v_2 = v_0 \quad (5.1)$$

В силу этого уравнения (1.8) и (1.14) обращаются в тождества.

По смыслу постановки задачи уравнения связи (1.5) и (1.6) не должны приниматься во внимание, так что для решения задачи имеем десять уравнений и соответственно 10 неизвестных. Нетрудно видеть, что уравнения (1.3), (1.7), (2.2), (2.4) будут иметь место и для рассматриваемого случая. Из них можно определить величины  $b_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $u_1$ ,  $\gamma_1$ .

В предельном случае для  $\beta_1 = 0$ , т. е. при чисто продольном ударе, из уравнений (2.4) получаем

$$\gamma_1 = 0, \quad v_1 = \frac{T_1}{\rho_1(b_1 + u_1)} = b_1$$

Тогда на основании (2.2) получаем, как и следовало ожидать,  $v_2 = u_1$ .

**6. Исследование уравнения энергии.** При решении задачи об ударе мы пользовались только законом количества движения и условиями непрерывности смещений. Указанные уравнения были достаточными для описания движения. Но остается не выясненным вопрос: удовлетворяет ли полученное движение закону сохранения энергии. В настоящем параграфе работы мы и покажем, что при линейной зависимости напряжения от деформаций полученное движение удовлетворяет закону сохранения энергии. Однако заметим, что при нелинейной зависимости напряжения от деформаций наше решение не удовлетворяет закону сохранения энергии, а именно оно сопровождается некоторой потерей энергии. Рассмотрим случай симметричного удара. Работа внешних сил за единицу времени от начала удара будет

$$A = T \sin \gamma v_0 \quad (6.1)$$

а энергия, накопленная нитью за указанное время:

$$\mathcal{E} = \frac{v_0}{(1+\varepsilon) \sin \gamma} \frac{\varepsilon^2 E}{2} + \frac{a_0 - b}{1+\varepsilon} \frac{\varepsilon^2 E}{2} + \frac{v_0 \rho_0 v_0^2}{2(1+\varepsilon) \sin \gamma} + \frac{a_0 - b}{1+\varepsilon} \rho_0 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2} \quad (6.2)$$



Пользуясь уравнением движения (4.5) для работы внешней силы выражение (6.1), приведем к виду

$$A = v_0 T \sin \gamma = \frac{\rho_0 (b+u) v_0^2}{1+\varepsilon} \quad (6.3)$$

Приравняв  $\mathcal{E}$  к работе силы  $A$  и сокращая на  $\rho_0 / (1+\varepsilon)$ , получим

$$\frac{(b+u)v_0^2}{(1+\varepsilon)} = \frac{v_0}{(1+\varepsilon) \sin \gamma} \left( \frac{\varepsilon^2 a_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \right) + \frac{a_0 - b}{1+\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon^2 a_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 a_0^2}{2} \right) \quad (6.4)$$

Имея в виду, что

$$\sin \gamma = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 + v_0^2}} = \frac{v_0}{b+u}, \quad u = a_0 \varepsilon$$

и отнеся все скорости к  $a_0$ , получим

$$\frac{(\bar{b} + \varepsilon)v_0^2}{2} = \frac{(\bar{b} + \varepsilon)\varepsilon^2}{2} + (1 - \bar{b})\varepsilon^2 \quad (6.5)$$

Комбинируя (4.3) и (4.4), имеем

$$(\bar{b} + \varepsilon)^2 = \varepsilon(1 + \varepsilon) = \bar{b}^2 + v_0^2 \quad \text{или} \quad v_0^2 = \varepsilon(2\bar{b} + \varepsilon) \quad (6.6)$$

Подставляя  $v_0^2$  в (6.5), получим  $\bar{b}(\bar{b} + \varepsilon) = (1 - \bar{b})\varepsilon$ , откуда

$$\bar{b}^2 + 2\bar{b}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{или} \quad (\bar{b} + \varepsilon)^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(1 + \varepsilon)$$

Таким образом на основании (6.6) доказано равенство работы внешней силы и энергии, получаемой нитью, для случая линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

**7. Доказательство невозможности непрерывного движения, в случае поперечного удара по гибкой нити.** Если обозначить через  $\bar{X}$  продольное, а через  $\bar{Y}$  поперечное смещение частицы нити и если направить ось  $x$  вдоль нити, ось  $y$  перпендикулярно к нити, то уравнение движения ее будет иметь вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{T}{1+\varepsilon} \left( 1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right], \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{T}{1+\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right]$$

где  $s_0$  — переменная длина дуги нити в начальный момент.

Эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{T}{(1+\varepsilon)\rho_0} \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} + \frac{1+x_s}{\rho_0} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{T}{1+\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{(1+\varepsilon)\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} + \frac{y_s}{\rho_0} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{T}{1+\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для деформации имеем выражение

$$\varepsilon = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial s_0} + 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2} - 1 \quad (7.2)$$

Введем новые переменные  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  по формулам

$$\bar{x} = v_0 t x, \quad \bar{y} = v_0 t y \quad (7.3)$$



где  $v_0$  — скорость удара. Функции  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  безразмерные и могут зависеть лишь от безразмерных параметров:

$$\frac{s_0}{v_0 t}, \quad \frac{r_0}{a_i}, \quad \beta_0$$

где  $a_i$  есть некоторая величина, имеющая размерность скорости, которая зависит от функции  $T = T(\varepsilon)$ . Так например, для случая линейной зависимости  $T = T(\varepsilon)$  величина  $a_i$  равна скорости звука в материале нити.

Введем также новую безразмерную переменную

$$z = \frac{s_0}{v_0 t}$$

Тогда

$$x = v_0 t \bar{x}(z), \quad y = v_0 t \bar{y}(z)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = \frac{d\bar{x}}{dz}, \quad \frac{\partial y}{\partial s_0} = \frac{d\bar{y}}{dz}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} = \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} \frac{1}{v_0 t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} = \frac{d^2 \bar{y}}{dz^2} \frac{1}{v_0 t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \bar{x} - v_0 t \frac{d\bar{x}}{dz} \frac{s_0}{v_0 t^2} = v_0 \left( \bar{x} - z \frac{d\bar{x}}{dz} \right)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v_0 \left[ -\frac{d\bar{x}}{dz} \frac{s_0}{v_0 t^2} + \frac{s_0}{v_0 t^2} \frac{dx}{dz} + z \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} \frac{s_0}{v_0 t^2} \right] = z^2 \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} \frac{v_0}{t}$$

Подставляя в (7.1), получим

$$z^2 \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} = \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} + \frac{1 + \bar{x}' d}{1 + \varepsilon} \frac{d}{dz} \left[ \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \right] [(1 + x') x'' + y' y''] \quad (7.4)$$

$$z^2 \frac{d^2 \bar{y}}{dz^2} = \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \frac{d^2 \bar{y}}{dz^2} + \frac{\bar{y}' d}{1 + \varepsilon} \frac{d}{dz} \left[ \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \right] [(1 + x') x'' + y' y'']$$

Вводя обозначения

$$a^2 = \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)}, \quad b = \frac{1 + \bar{x}_s d}{1 + \varepsilon} \frac{d}{dz} \left[ \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \right], \quad c = \frac{\bar{y}' d}{1 + \varepsilon} \frac{d}{dz} \left[ \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)} \right] \quad (7.5)$$

представим уравнения (7.4) в виде

$$[a^2 - z^2 + b(1 + x')] x'' + by' y'' = 0, \quad [a^2 - z^2 + cy'] y'' + c(1 + x') x'' = 0 \quad (7.6)$$

Уравнения (7.5) имеют тривиальные решения

$$x'' = 0, \quad y'' = 0$$

т. е.

$$\frac{d\bar{x}}{dz} = \frac{\partial x}{\partial s_0} = C_1, \quad \frac{d\bar{y}}{dz} = \frac{\partial y}{\partial s_0} = C_2, \quad \frac{dx}{dt} = C_3, \quad \frac{dy}{dt} = C_4$$

Решения эти соответствуют постоянству деформаций и скоростей и тождественны с вышеприведенным разрывным решением. Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  для различных участков будут различны и определяются из условий динамической совместности.

Выясним существование не тривиального решения системы (7.6). Очевидно, если такое решение существует, то для него должен тождественно обращаться в нуль детерминант системы (7.6)

$$[a^2 - z^2 + b(1 + x')] [a^2 - z^2 + cy'] - bx' y' (1 + x') = 0$$



Отсюда получаем два уравнения:

$$a^2 - z^2 = 0, \quad a^2 - z^2 + b(1 + x') + cy' = 0 \quad (7.7)$$

Первое уравнение согласно (7.2) после подстановки  $a^2$  из (7.5) дает

$$(x' + 1)^2 + y'^2 = f(z^2)$$

Полученное уравнение противоречит уравнениям (7.6).

Рассматривая второе из (7.7), имеем

$$y' = f(x', z^2), \quad y'' = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x'} x''$$

Подставляя это в первое, из уравнений (7.6) получим

$$b \left[ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x'} x'' \right] - cx'' = 0$$

Отсюда

$$x'' = \frac{c + b \frac{\partial f}{\partial x'}}{\rho \frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{dx'}{dz} = \varphi(z, x')$$

Рассмотрим случай линейной зависимости  $T$  от  $\varepsilon$ , т. е.  $T = E\varepsilon$ . Имеем

$$a^2 = \frac{E\varepsilon}{\rho v_0^2 (1 + \varepsilon)} = \frac{a_0^2}{v_0^2} \varepsilon, \quad b \approx \frac{a_0^2}{v_0^2} (1 + x'), \quad c \approx \frac{a_0^2}{v_0^2} y'$$

Связь между  $y'$  и  $x'$

$$\varepsilon + (1 + x')^2 + y'^2 = \frac{v_0^2}{a_0^2} z^2 \quad (7.8)$$

Для деформации, как известно, можно принять выражение  $\varepsilon = x' + \frac{1}{2} y'^2$ . Подставляя  $\varepsilon$  в (7.8) и пренебрегая  $x'^2$ , найдем

$$2 \left( 1 + \frac{3}{2} x' \right) = k^2 z^2 + 1 - \frac{3}{2} y'^2 \quad \left( k = \frac{v_0^2}{a_0^2} \right) \quad (7.9)$$

Пользуясь (7.9), из уравнения (7.6) после преобразования получим

$$\frac{y''}{y'} = \frac{(1 + x') x''}{1 + 2x'} \quad (7.10)$$

После интегрирования получим

$$\log y' = \frac{x'}{2} + \frac{1}{4} \log(1 + 2x') + \log C \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) показывает, что полученное решение также не удовлетворяет условию непрерывного изменения касательной.

В самом деле, из (7.11) видно, что  $y'$  не может равняться нулю, т. е. касательная никогда не может быть горизонтальной.

С другой стороны, если допустить движение с непрерывным изменением касательной, то оно будет обязательно иметь в области продольных движений нулевой наклон. Таким образом полученное решение дает второе разрывное решение. Можно показать, что это решение будет соответствовать удару клива по нити.



8. Случай косо́го удара по нити, когда диаграмма растяжения может быть представлена отрезками прямой. Решенная в работе задача позволяет подсчитать не только принципиально, но и практически возникающие в нити деформации, когда по ней ударяется тело достаточно большой массы.

В этом параграфе мы и приведем конкретные расчеты, предполагая, что материал нити удовлетворяет схеме Пра́ндтля, т. е.

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon < \varepsilon_s \\ T &= E\varepsilon \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon > \varepsilon_s \\ T &= T_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) \end{aligned}$$

Предположим, что трение отсутствует. В силу (8.1) имеем:

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon < \varepsilon_s \\ u &= a_0(\varepsilon - \varepsilon_0) \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon > \varepsilon_s \\ u &= a_0[\varepsilon_s - \varepsilon_0 + a_1(\varepsilon - \varepsilon_s)] \end{aligned}$$

Так как случай упругих деформаций разобран детально в предыдущих параграфах, здесь нам достаточно рассмотреть случай деформаций, выходящих за предел упругости, т. е.  $\varepsilon \geq \varepsilon_s$ .

В этом случае из уравнений (3.4) будем иметь

$$\lambda = \frac{2\bar{b}}{\bar{b} + \varepsilon_s - \varepsilon_0 + \bar{a}_1(\varepsilon - \varepsilon_s)} \tag{8.3}$$

$$[\bar{b} + \varepsilon_s - \varepsilon_0 + \bar{a}_1(\varepsilon - \varepsilon_s)]^2 = (1 + \varepsilon) [\varepsilon_s + \bar{a}_1^2(\varepsilon - \varepsilon_s)]$$

где

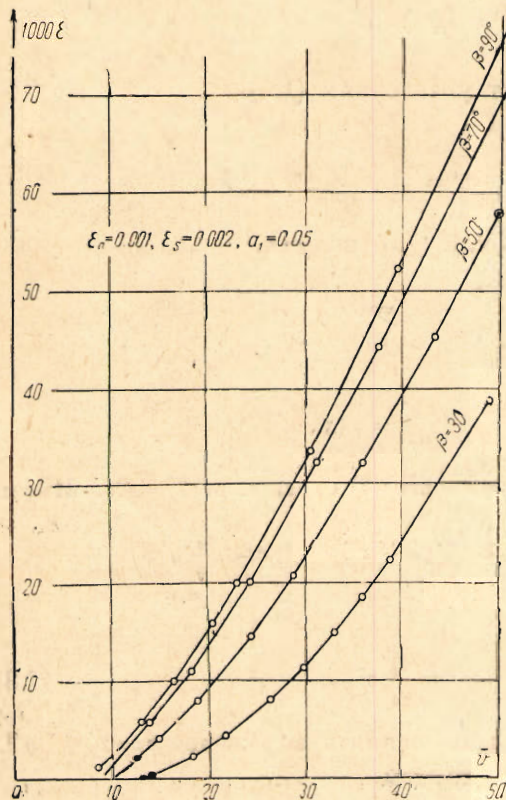
$$\bar{b} = \frac{b}{a_0}, \quad \bar{a}_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Нетрудно найти выражение для  $\bar{b}$ :

$$\bar{b} = \sqrt{(1 + \varepsilon) [\varepsilon_s + \bar{a}_1^2(\varepsilon - \varepsilon_s)]} - [\varepsilon_s - \varepsilon_0 + \bar{a}_1(\varepsilon - \varepsilon_s)] \tag{8.4}$$

Из (8.3) и (8.4), исключая  $\bar{b}$ , получаем квадратное уравнение относительно  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 4\lambda)\bar{a}_1^2\varepsilon + [(2 - \lambda)^2(\bar{a}_1^2\varepsilon_s - \bar{a}_1^2\varepsilon_s + \varepsilon_0) - 8\bar{a}_1(\varepsilon_s - \varepsilon_0) + 8\bar{a}_1^2\varepsilon_s] + \\ + (2 - \lambda)^2(\varepsilon_s - \bar{a}_1^2\varepsilon_s) - 4(\varepsilon_s - \varepsilon_0)^2 + 8\varepsilon_s(\varepsilon_s - \varepsilon_0) - 4\bar{a}_1^2\varepsilon_s^2 = 0 \end{aligned}$$



Фиг. 6



Обозначим решение этого уравнения через

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \tag{8.5}$$

Из (5.3) получим

$$\text{ctg } \gamma_1 = 2 \text{ctg } \beta_0 + \text{ctg } \gamma_2 \tag{8.6}$$

Из (3.3)

$$\lambda = \frac{1}{\text{tg } \gamma_2 - \text{tg } \gamma_1} [(\text{tg } \gamma_1 + \text{tg } \gamma_2)(\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) - 2(\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) \text{tg } \gamma_1 \text{tg } \gamma_2] + \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 \tag{8.7}$$

Таблица 1

Значения  $\gamma_1$

$\beta_0 \backslash \gamma_2$	10°	13°	18°	23°	30°	35°	40°	50°	55°
90°	10°00'	13°00'	18°00'	23°00'	30°00'	35°00'	40°00'	50°00'	—
70°	8 50	11 10	14 40	18	22 10	24 50	27 30	32 30	—
50°	7 40	9 20	11 50	14	16 20	17 50	19 10	21 40	—
30°	6 10	7 20	8 40	9 40	10 50	11 30	12 10	13	13 30

Таблица 2

$$\beta_0 = 90^\circ, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \bar{a}_1^2 = 0.05$$

$\bar{v}_0$	0.0135	0.0167	0.0192	0.0245	0.0347	0.045	0.0518	0.64	0.0661	0.0742	0.085
$\varepsilon$	0.002	0.006	0.01	0.02	0.04	0.6	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16
$\bar{b}_0$	0.0426	0.0441	0.0453	0.0481	0.0530	0.05696	0.06045	0.0656	0.0655	0.068	0.0707

$$\beta_0 = 90^\circ, \quad \varepsilon_0 = 0.001, \quad \bar{a}_1^2 = 0.05$$

$\bar{v}_0$	0.00978	0.01295	0.0164	0.02035	0.0228	0.0283	0.0331	0.0381	0.0423	0.0511
$\varepsilon$	0.002	0.006	0.01	0.016	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08
$\bar{b}_0$	0.0436	0.0451	0.0463	0.0481	0.0491	0.0518	0.054	0.0563	0.0579	0.0614

$$\beta_0 = 70^\circ, \quad \varepsilon_0 = 0.001, \quad \bar{a}_1^2 = 0.05$$

$\bar{v}_0$	0.0139	0.0182	0.0254	0.0311	0.0376	0.0554				
$\varepsilon$	0.006	0.01	0.0219	0.0326	0.0444	0.0787				
$\bar{b}_0$	0.0452	0.0464	0.0499	0.0525	0.0551	0.0612				

$$\beta_0 = 50^\circ, \quad \varepsilon_0 = 0.001, \quad \bar{a}_1^2 = 0.05$$

$\bar{v}_0$	0.0113	0.0148	0.0188	0.02426	0.0286	0.0337	0.0423			
$\varepsilon$	0.0002	0.0042	0.008	0.0146	0.0207	0.0323	0.0455			
$\bar{b}_0$	0.0431	0.0445	0.0458	0.0478	0.0496	0.00525	0.0555			

$$\beta_0 = 50^\circ, \quad \varepsilon_0 = 0.001, \quad \bar{a}_1^2 = 0.05$$

$\bar{v}_0$	0.0142	0.0183	0.0217	0.0263	0.0297	0.0332	0.036	0.0388	0.0425	
$\varepsilon$	0.0004	0.0023	0.0058	0.0082	0.0114	0.015	0.0185	0.0223	0.029	
$\bar{b}_0$	0.043	0.0439	0.00446	0.0458	0.0472	0.0487	0.049	0.051	0.0517	



Для скорости удара согласно (3.2) будем иметь

$$\bar{v}_0 = \frac{2b \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2}{\sin \beta_0 [\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2]} \quad (8.8)$$

Пользуясь приведенными формулами, можно получить зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{v}_0)$ .

В табл. 1 приведены значения  $\gamma_1$  для фиксированных значений  $\beta_0$ , но для различных значений  $\gamma_2$ .

Для этих значений углов по формулам (8.7) можно вычислить соответствующие значения  $\lambda$ , а затем по формулам (8.5) можно подсчитать соответствующие значения деформаций  $\varepsilon$ . Зная деформации, по формуле (8.4) можно вычислить соответствующие значения  $\bar{b}_s$ .

Наконец, по формуле (8.8) вычисляем соответствующие значения скорости удара.

В табл. 2 дана зависимость деформации  $\varepsilon$  и скорости волны сильного разрыва  $\bar{b}$  от безразмерной скорости удара  $\bar{v}_0$  для различных значений угла  $\beta_0$ ; вычисления проведены для  $\varepsilon_s = 0.002$ ,  $\bar{a}_1^2 = 0.05$  при начальных деформациях  $\varepsilon_0 = 0.001$  и  $\varepsilon_0 = 0$ . На фиг. 6 представлена графическая зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{v})$  для значений  $\beta = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ .

Поступила в редакцию

28 VI 45

#### Н. А. РАХМАТУЛИН. — INCLINED IMPACT ON A FLEXIBLE CORD

The author deals with the problem of the propagation of waves along an infinite flexible cord, set up by the inclined impact of a material point, which preserves its velocity after the shock. The problem is solved for both elastic and plastic deformations; friction between the cord and the striking solid being taken into account.

The following cases are taken up in detail:

1) A sliding impact without friction. For the Prandtl curve, tables are given for the relationship between the maximum deformation and the velocity of the solid.

2) Normal impact. The case of elastic deformations is carried out in detail. Formulae are given for the dependency between the deformation of the cord and the velocity of waves of strong rupture, and the velocity of the solid. The author's solution for the highly tensed cord is shown to be reducible to the ordinary solution of the theory of oscillations of a cord.

3) Inclined impact without sliding. The author's solution is shown to yield the case of longitudinal shock.

The author shows that a continuous solution of the problem is impossible. The author's solution does not satisfy the equation of the law of conservation of energy, for the case of elastic deformations.

The paper ends with the solution of the problem of propagation of waves along the cord set up by the impact of a wedge.