

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОФИЛЕ КРЫЛА

Л. Г. Лойцянский

(Москва)

До тех пор пока не будет разработана рациональная теория турбулентного движения жидкости, вряд ли можно рассчитывать на появление достаточно обоснованной теории расчета турбулентного пограничного слоя. Вместе с тем исключительная актуальность вопросов сопротивления и обтекаемости крыла и других тел заставляет исследователей искать пути решения задачи о движении жидкости в турбулентном пограничном слое в направлении использования существующих эмпирических и полуэмпирических теорий турбулентного движения.

Таков, например, общеупотребительный метод Сквайра-Юнга, позволяющий с достаточной для практики точностью определять сопротивление тонких крыльев при малых значениях коэффициента подъемной силы, но не пригодный для исследования отрыва слоя и вообще при больших углах атаки. Для задач последнего рода существуют чисто эмпирические методы Прандтля-Бури, Грушвица и др., основанные на использовании некоторых экспериментальных кривых, проведенных через весьма небольшое число опытных точек в узком интервале рейнольдсовых чисел.

Предлагаемый в настоящей статье метод расчета турбулентного пограничного слоя представляет обобщение метода Прандтля-Бури на случай больших [рейнольдсовых чисел, причем в отличие от указанного метода содержит некоторые теоретические соображения относительно возможных аналогий между турбулентным и ламинарным пограничными слоями, позволяющих вместе с тем наглядно подчеркнуть и разницу между слоями с различной структурой движения.

Как обычно, в исследованиях этого рода только опыт позволит судить, насколько законны принятые предположения.

§ 1. Формпараметр и применение его в теории ламинарного и турбулентного слоя. Обобщение формпараметра Прандтля. Основная идея методов расчета пограничного слоя, связанных с применением теоремы импульсов (интегрального условия Кармана), заключается в следующем. Вместо истинного, состоящегося неизвестным распределения скоростей в сечениях пограничного слоя выбирается некоторое семейство профилей скорости, определенное рядом заданных наперед условий, общих для всех обтеканий. Этот набор профилей подчиняется зависимости от одного параметра (так называемого формпараметра), который характеризует форму профиля ско-

рости в данном сечении слоя и меняется от сечения к сечению. Задача сводится к определению изменения этого параметра, после чего приближенные профили скорости в сечениях слоя становятся известными и можно найти все искомые величины слоя, в том числе определить трение, абсциссу отрыва и др.

Для определения изменения формпараметра используется уравнение импульсов

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'\delta^{**}}{U} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (1.1)$$

справедливое как для ламинарного, так и для турбулентного слоя. В этом уравнении, как обычно, положено

$$\delta^* = \int_0^{\infty, \delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\infty, \delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy, \quad (1.2)$$

где $u(x, y)$ — продольная скорость в слое, $U(x)$ — скорость на внешней границе слоя, τ_0 — напряжение трения на поверхности крыла; в верхнем пределе интеграла показано δ или ∞ , в зависимости от того, применяется ли теория конечного или бесконечного (асимптотического) слоя.

В методе Польгаузена^[1] в качестве формпараметра принята величина $\lambda = U'\delta^2/\nu$; в методе Хоурта^[2] роль формпараметра играет величина x^* , характеризующая линейный закон скорости $U(x)$, соответствующий выбранному в данном сечении профилю скорости в пограничном слое. В теории ламинарного слоя, кроме только что указанных параметров, пользуются еще параметром $f = U'\delta^{**2}/\nu$, являющимся^[3,4] аналогом параметра λ и частным случаем параметра Прандтля—Бури^[5,6]

$$\Gamma = \frac{U'\delta^{**}}{U} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^m \quad (1.3)$$

при $m = 1$.

Параметр Γ был введен для турбулентного слоя Прандтлем по аналогии с параметром Польгаузена.

Бури, использовавший идею Прандтля, преобразовывает уравнение (1.1) при $m = 1/4$ к виду

$$\frac{d}{dx} \left[\delta^{**} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} \right] = \frac{5}{4} \left[\frac{\tau_0}{\rho U^2} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} - \frac{U'\delta^{**}}{U} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} \left(\frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) \right] \quad (1.4)$$

показывает, что на основании опытов правая часть уравнения (1.4) может быть представлена как линейная функция параметра Γ и определяет из экспериментов коэффициенты этой линейной функции. Уравнение (1.4) при такой замене становится обыкновенным дифференциальным уравнением относительно δ^{**} . Задаваясь, кроме того, еще одной экспериментальной кривой связи величин $\frac{\tau_0}{\rho U^2} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$ и формпараметра $\frac{U'\delta^{**}}{U} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$, Бури получает возможность определять напряжение трения. К сожалению, последняя кривая проведена чрезвычайно произвольно через четыре весьма разбросан-

ные экспериментальные точки и внушает сомнения даже по отношению к общему характеру своего хода. Метод Бури основан на использовании ограниченных по объему личных опытов автора по сужающимся трубам и опытов Никурадзе по сужающимся и расширяющимся каналам. К. К. Федяевский [7] обработал опыты Донха, а также Фейджа и Фолкнера (пограничный слой на крыле) и получил также удовлетворительное соответствие с прямой Бури.

Грушвиц в подстрочном примечании в своей известной работе [8] указывает, что метод Прандтля—Бури соответствует использованию в качестве профилей скорости в сечениях пограничного слоя профилей, имеющих место при отсутствии продольного градиента давления, т. е., например, на продольно обтекаемой пластине. И действительно, коэффициенты линейной связи правой части уравнения (1.4) и формпараметра $\Gamma = \frac{U'\delta^{**}}{U} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}$, указанные Бури и в дальнейшем в работе К. К. Федяевского [7], могут быть получены заменой в правой части (1.4) выражений $\frac{c_0}{\rho U^2} \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu}\right)^{1/4}$ и $\frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ их значениями для пластины. Такой способ линеаризации эквивалентен первому приближению в методе Грушвица и, вопреки критике Грушвица, оказывается совсем не так плох, о чем можно судить хотя бы по кривым самого Грушвица. Экспериментальные значения толщины потери импульса δ^{**} , рассчитанные по первому приближению, начинают более или менее различаться лишь при приближении к точке отрыва. Второе приближение Грушвица несколько лучше, но не всегда достаточно близко к опытной кривой той же величины.

Тот же метод линеаризации по существу лежит в основе и метода Сквайра—Юнга [16], но в отличие от метода Прандтля—Бури здесь эта линеаризация применяется лишь для малых углов атаки и для тонких, слабо искривленных крыловых профилей, т. е. для случая малых продольных градиентов давления, что и приводит, как уже упоминалось во введении, к прекрасным результатам.

Та же идея однопараметрического представления семейства профилей скорости в сечениях пограничного слоя представлена в методе Грушвица [8], который вместо параметра Прандтля Γ выбирает параметр γ , равный

$$\gamma = 1 - \left(\frac{u}{U}\right)_{y=\delta^{**}}$$

и путем ряда обработок экспериментальных материалов устанавливает некоторые эмпирические дифференциальные уравнения, численное интегрирование которых и приводит к решению задачи. Метод Грушвица крайне сложен для практических применений, кроме того, как показали исследования Шмидбауэра [9] и Петерса [11], в ряде случаев метод Грушвица не дает решения задачи.

У нас в Союзе по пути использования полуэмпирических теорий турбулентного движения (теория «пути смещения») пошли К. К. Федяевский [11], А. П. Мельников [11], Л. Е. Калихман [12]. Первые два автора применяют в качестве формпараметра величину

$$A = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$$

Обобщая идею формпараметра Прандтля, рассмотрим величины

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad \text{и} \quad -\delta^{**} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\rho U^2} = \frac{U' \delta^{**}}{U}$$

Первая из них представляет собой безразмерный коэффициент местного трения на поверхности крыла, а вторая — безразмерный продольный градиент давления. Величины эти, меняясь от точки к точке на поверхности крыла, являются вместе с тем функциями рейнولدсова числа. Желая сделать эти величины универсальными, т. е. не зависящими от рейнولدсова числа, умножим их на некоторую функцию $G(R^{**})$, где $R^{**} = U\delta^{**}/\nu$, и составим выражения

$$\bar{c}_x = \frac{\tau_0}{\rho U^2} G(R^{**}) \quad (1.5)$$

$$\Gamma = \frac{U' \delta^{**}}{U} G(R^{**}) \quad (1.6)$$

Остановимся сначала на простейшем случае продольного обтекания пластинки ($U' = 0$). Используя известный логарифмический профиль скоростей

$$\frac{u}{v_*} = 2.5 \ln \frac{yv_*}{\nu} + 5.5, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (1.7)$$

как профиль скоростей в турбулентном пограничном слое на пластине, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{U}{v_*} &= 2.5 \ln \frac{\delta v_*}{\nu} + 5.5 = 2.5 \ln \left(\frac{U\delta v_*}{\nu U} \right) + 5.5 \\ \frac{U-u}{v_*} &= -2.5 \ln \frac{y}{\delta} \end{aligned} \quad (1.7')$$

Отсюда следует

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d \frac{y}{\delta} = \frac{v_*^2}{U^2} \int_0^1 \frac{u}{v_*} \frac{U-u}{v_*} d \frac{y}{\delta}$$

или по предыдущим формулам

$$\frac{R^{**}}{R_\delta} = A_1 \frac{v_*}{U} + A_2 \frac{v_*^2}{U^2} \quad \left(R_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \right) \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -2.5 \int_0^1 \ln \frac{y}{\delta} d \frac{y}{\delta} = 2.5 \\ A_2 &= -6.25 \int_0^1 \ln^2 \frac{y}{\delta} d \frac{y}{\delta} = -12.5 \end{aligned}$$

Исключая в равенстве (1.8) величину R_δ по формуле (1.7') и замечая что $v_*/U = \sqrt{\tau_0/(\rho U^2)}$, после простых преобразований получим формулу сопротивления в неявном виде

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_0/(\rho U^2)}} = 5.75 \log R^{**} - 5.75 \log \left(1 - 5 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho U^2}} \right) + 3.22 \quad (1.9)$$

Пользуясь методом последовательных приближений и полагая в правой части (1.9) сначала $\tau_0/(\rho U^2) = 0$, затем $\tau_0/(\rho U^2) = [\tau_0/(\rho U^2)]_1$ и т. д., легко

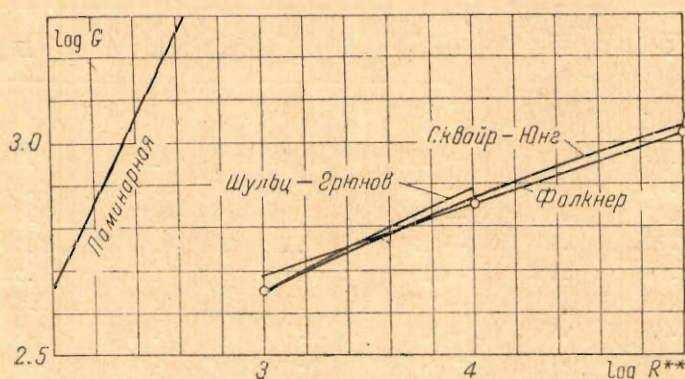
найдем величину $\tau_0 / (\rho U^2)$ в функции от R^{**} . Замечая, что в интересующем нас обычно интервале значений R^{**} от 10^3 до 10^4 правая часть равенства (1.9) без первого члена меняется весьма слабо от значения 3.88 до 3.71, будем иметь, беря среднее значение 3.8,

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_0 / (\rho U^2)}} = 5.75 \log R^{**} + 3.8$$

Отсюда следует

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{(5.75 \log R^{**} + 3.8)^2} \quad (1.10)$$

Сравнивая это равенство с равенством (1.5), видим, что $\bar{\zeta} = \text{const}$. Пола-



Фиг. 1

гая $\bar{\zeta} = 1$, т. е. включая константу в определение функции $G(R^{**})$, получим для $G(R^{**})$ приближенное выражение

$$G(R^{**}) = (5.75 \log R^{**} + 3.8)^2 = 33 (\log R^{**} + 0.66)^2 \quad (1.11)$$

Как известно, Сквайр и Юнг [16] дают формулу сопротивления, аналогичную (1.10). Для функции $G(R^{**})$ при этом получается выражение

$$G(R^{**}) = 34.6 (\log R^{**} + 0.61)^2 \quad (1.12)$$

Проведенная нами обработка опытов Шульц-Грюнова [15] привела к формуле

$$G(R^{**}) = 5.405 (1.574 + 1.310 \log R^{**})^{2.584} \quad (1.13)$$

Наконец, не так давно Фолкнер [17] в результате обработки опытов различных авторов с пластинами при больших реиновльдовых числах предложил для сопротивления простую степенную формулу, имеющую в наших обозначениях вид

$$G(R^{**}) = 153.2 (R^{**})^{1/4} \quad (1.14)$$

Соответствующие указанным формулам кривые нанесены на фиг. 1. Чтобы не затемнять чертежа, кривая, представляющая формулу (1.11), заменена

несколькими жирными точками. На той же фигуре приводится ламинарная прямая^[14]

$$G(R^{**}) = \frac{1}{0.22} R^{**} = 4.545 R^{**} \quad (1.15)$$

Итак, в случае продольного обтекания пластинки коэффициент сопротивления $\bar{\zeta}$ сохраняет при всех рейнولدсовых числах постоянное значение, принятое нами для простоты равным единице, величина \bar{F} при этом повсюду равна нулю, так как $U' = 0$. В случае обтекания крыла $\bar{\zeta}$ уже не будет константой. По аналогии с однопараметрическими методами теории ламинарного слоя примем $\bar{\zeta}$ за универсальную функцию параметра \bar{F} (см.^[13]).

Таблица 1

\bar{f}	$\bar{\zeta}$	\bar{H}	\bar{F}	\bar{f}	$\bar{\zeta}$	\bar{H}	\bar{F}
-0.95	1.63	0.85	0	0	1.00	1.00	-4.90
-0.90	1.60	0.86	-0.24	0.10	0.93	1.02	-5.48
-0.80	1.53	0.87	-0.74	0.20	0.85	1.04	-6.04
-0.70	1.47	0.88	-1.24	0.30	0.77	1.07	-6.64
-0.60	1.41	0.90	-1.76	0.40	0.69	1.10	-7.26
-0.50	1.34	0.915	-2.28	0.50	0.60	1.125	-7.88
-0.40	1.28	0.93	-2.78	0.60	0.515	1.16	-8.56
-0.30	1.21	0.95	-3.30	0.70	0.42	1.20	-9.28
-0.20	1.14	0.97	-3.82	0.80	0.34	1.25	-10.04
-0.10	1.08	0.985	-4.36	0.90	0.275	1.35	-10.80
0	1.00	1.00	-4.90	1.00	0	1.48	-11.68

Рассматривая величину \bar{F} , определенную формулой (1.6), как формпараметр турбулентного пограничного слоя и вводя еще значение \bar{F}_s в точке отрыва, нормируем величину \bar{F} так, чтобы в точке отрыва она равнялась единице, т. е. примем окончательно за формпараметр величину

$$f = \frac{\bar{F}}{\bar{F}_s} = \frac{U'_{0^{**}}}{U \bar{F}_s} G(R^{**})$$

Обобщенный коэффициент сопротивления $\bar{\zeta}$ будем рассматривать как функцию формпараметра \bar{f} , причем согласно принятому нормированию величин \bar{f} и $\bar{\zeta}$ имеем:

а) в точке минимума давления

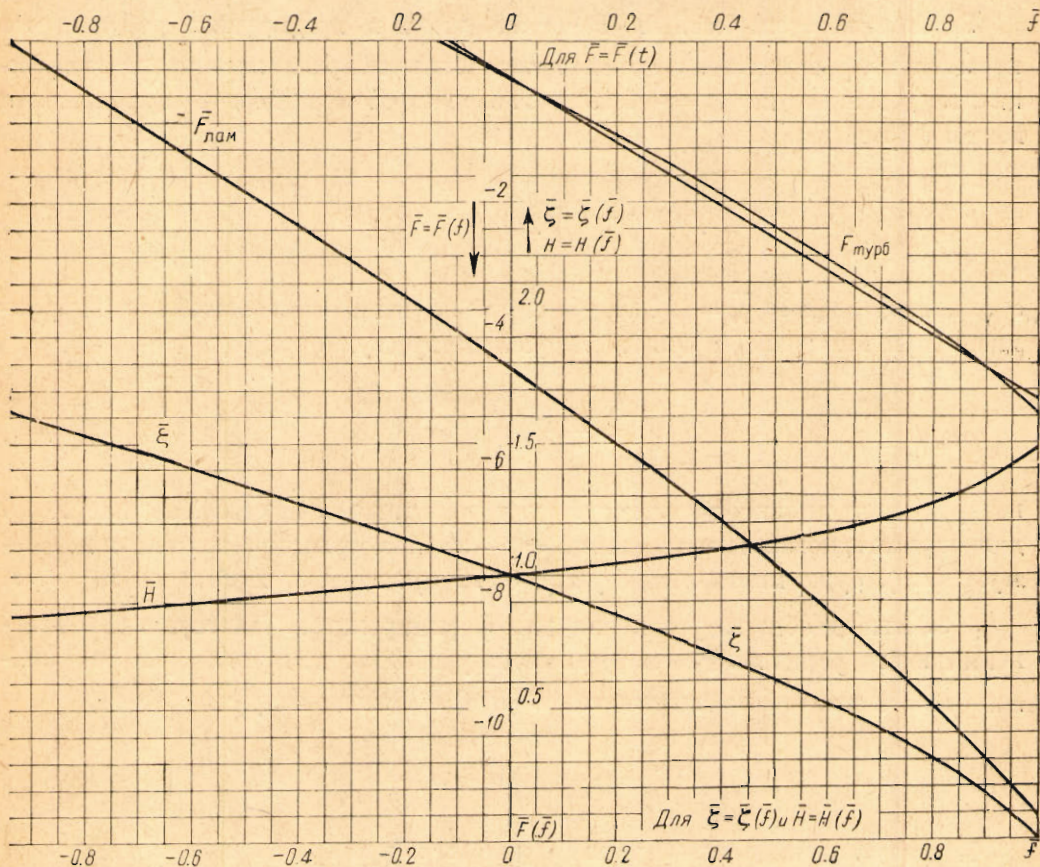
$$\bar{f} = 0, \quad \bar{\zeta} = 1$$

б) в точке отрыва слоя

$$\bar{f} = 1, \quad \bar{\zeta} = 0$$

§ 2. Нормированные параметры в теории ламинарного пограничного слоя. Аналогичное нормирование может быть проведено и в теории ламинарного пограничного слоя, что избавит нас от запоминания мало характерных и различных в разных методах чисел, определяющих значение формпараметра в точке отрыва.

Табл. 1 содержит соответствующие ламинарному слою нормированные величины $\bar{\zeta}$, \bar{H} , \bar{F} в функции от нормированного формпараметра \bar{f} , причем под \bar{H} мы здесь понимаем отношение не нормированной величины $H = \delta^* / \delta^{**}$ к ее значению H_0 в точке минимума давления, под \bar{f} — отношение ненормированного f к $f_s = -0.089$, под $\bar{\zeta}$ — ненормированное ζ , деленное на 0.22



Фиг. 2

[см. (1.15)], а характеристическая функция $\bar{F}(\bar{f})$, соответствующая известному уравнению ламинарного слоя [3], [14]

$$\frac{d\bar{f}}{dx} = \frac{U'}{U} \bar{F}(\bar{f}) + \frac{U''}{U'} \bar{f} \tag{2.1}$$

при пользовании нормированными величинами равна

$$\bar{F}(\bar{f}) = \frac{F(f)}{f_s} = 2 \frac{\zeta}{f_s} - 2(2 + H_0 H) \bar{f} \tag{2.2}$$

Вид кривых $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{f})$, $\bar{H} = \bar{H}(\bar{f})$ и $\bar{F} = \bar{F}(\bar{f})$ представлен на фиг. 2.

Решение уравнения (2.1) проводится методом, изложенным в ранее опубликованных нами работах [3, 14]. Функция $\bar{F}(\bar{f})$ может быть заменена прямой

$$\bar{F}(\bar{f}) = a - b\bar{f} \tag{2.3}$$

Такая замена приведет к линейному дифференциальному уравнению, решение которого будет

$$\bar{f} = \frac{\bar{a}U'}{U^b} \int_0^x U^{b-1}(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

Здесь показатель степени b тот же, что и в предыдущих работах; что касается коэффициента \bar{a} , то он может быть получен из старого коэффициента делением на $f_s = -0.089$. Таким образом в первом приближении имеем формулу

$$\bar{f} = -\frac{4.9U'}{U^{5.75}} \int_0^x U^{4.75}(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

с условием отрыва $\bar{f}_s = 1$. Можно, округляя показатели степени и коэффициент при интеграле, принять следующую простую формулу:

$$\bar{f} = -\frac{5U'}{U^6} \int_0^x U^5(\xi) d\xi \quad (2.6)$$

которая даст вполне достаточную для практики точность. Так например, для случая односкатного профиля $U = 1 - x$ точка отрыва, рассчитанная по формуле (2.6), будет иметь абсциссу $x_s = 0.122$ против точной абсциссы $x_s = 0.12$.

§ 3. Вывод общего уравнения для формпараметра. Линейризация уравнения и его решение. Рассмотрим вновь уравнение импульсов (1.1) и умножим обе части его на выражение $G(R^{**})/\bar{\Gamma}_s$, тогда получим

$$\frac{G(R^{**})}{\bar{\Gamma}_s} \frac{d\delta^{**}}{dx} + (2 + H)\bar{f} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\Gamma}_s} \quad (3.1)$$

Первое слагаемое левой части может быть преобразовано так

$$\begin{aligned} \frac{G(R^{**})}{\bar{\Gamma}_s} \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{U}{U^*} \frac{U'\delta^{**}}{\bar{\Gamma}_s U} G(R^{**}) \right] - \frac{\delta^{**}}{\bar{\Gamma}_s} G'(R^{**}) \frac{dR^{**}}{dx} = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{U}{U^*} \bar{f} \right) - \frac{\delta^{**}}{\bar{\Gamma}_s} G'(R^{**}) \frac{U}{U^*} \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{\delta^{**}}{\bar{\Gamma}_s} G'(R^{**}) \frac{\delta^{**}}{U^*} U' = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{U}{U^*} \bar{f} \right) - m(R^{**}) \frac{G(R^{**})}{\bar{\Gamma}_s} \frac{d\delta^{**}}{dx} - m(R^{**}) \bar{f}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

где введено обозначение

$$m(R^{**}) = \frac{R^{**}G'(R^{**})}{G(R^{**})} = \frac{d \log G(R^{**})}{d \log R^{**}} \quad (3.3)$$

Исключая из равенств (3.1) и (3.2) выражение $\frac{G}{\bar{\Gamma}_s} \frac{d\delta^{**}}{dx}$ после простых преобразований, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{U}{U^*} \bar{f} \right) = [1 + m(R^{**})] \frac{\bar{\xi}}{\bar{\Gamma}_s} - \{2 + m(R^{**}) + [1 + m(R^{**})] H\} \bar{f} \quad (3.4)$$

или

$$\frac{d\bar{f}}{dx} = \frac{U'}{U} F(\bar{f}, R^{**}) + \frac{U''}{U'} \bar{f} \tag{3.5}$$

где под $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$ подразумевается выражение

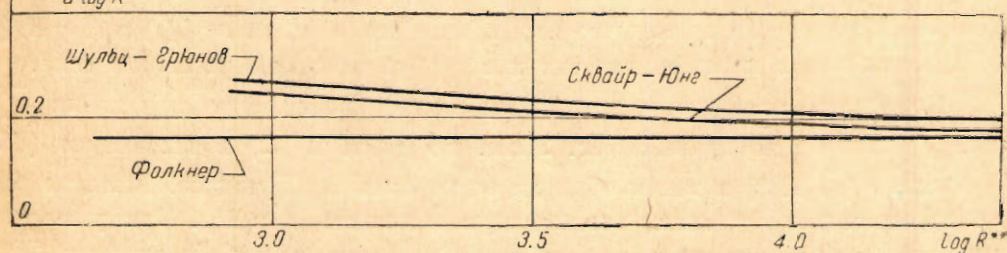
$$\bar{F}(\bar{f}, R^{**}) = (1+m) \frac{\zeta}{\Gamma_s} - [3+m+(1+m)H] \bar{f} \tag{3.6}$$

которое можно еще представить в виде

$$\bar{F}(\bar{f}, R^{**}) = \frac{1+m}{\Gamma_s} \bar{\zeta} - [3+m+(1+m)H_0 \bar{H}] \bar{f} \tag{3.7}$$

где H_0 есть отношение δ^*/δ^{**} в точке минимума давления ($U'=0$) на крыле или соответствующее значение того же отношения на пластине. Величина H_0 представляет собой слабую функцию реинольдсова числа R^{**} и может быть принята в среднем равной 1.4.

$$m = \frac{d \log G(R^{**})}{d \log R^{**}}$$



Фиг. 3

Величина $m(R^{**})$ также представляет собой слабо изменяющуюся функцию R^{**} . Изменение её показано на фиг. 3. Функция $m(R^{**})$ в случае $G(R^{**})$, определенной формулой (1.11), почти не отличается от кривой, соответствующей формуле Сквайра и Юнга.

Уравнение (3.5) совершенно аналогично уравнению (2.1) теории ламинарного слоя, причем функция $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$ превращается в функцию $\bar{F}(\bar{f})$, определенную формулой (2.2), если положить в (3.7) $m=1$.

Принимая для m некоторое среднее значение m_0 , соответствующее интервалу R^{**} данного обтекания, и полагая в уравнениях (3.5) и (3.7) величины $\bar{\zeta}=1$, $\bar{H}=1$, т. е. производя линеаризацию по Сквайру—Юнгу или Прандтлю—Бури, убедимся, что уравнение (3.5) легко при этом может быть сведено к модификации уравнения Сквайра и Юнга, данной Л. Е. Калихманом.

Действительно, переписывая \bar{f} в виде

$$\bar{f} = \frac{U'\delta^{**}}{\Gamma_s U} G(R^{**}) = \frac{\sqrt{U'}}{\Gamma_s U^2} R^{**} G(R^{**}) = \frac{\sqrt{U'}}{\Gamma_s U^2} z$$

где в обозначениях Л. Е. Калихмана

$$z = R^{**} / \left(\frac{\tau_0}{\rho U^2} \right)$$

есть не что иное, как $R^{**}G(R^{**})$, получим вместо (3.5)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{U'}}{\Gamma_s U^2} \frac{dz}{dx} + z \frac{\sqrt{U^2 U'' - 2UU'^2}}{\Gamma_s U^4} = \\ & = \frac{U' (1+m_0)}{\Gamma_s} + \frac{\sqrt{U''}}{\Gamma_s U^2} z - [3 + m_0 + (1+m_0)H_0] \frac{\sqrt{U'^2}}{\Gamma_s U^2} z \end{aligned}$$

или после простых приведений (при этом $\bar{\Gamma}_s$ выпадает, а это значит, что при принятой линеаризации закон изменения R^{**} не зависит от величины $\bar{\Gamma}_s$)

$$\frac{dz}{dx} = (1+m_0) \frac{U'}{\sqrt{U}} - (1+m_0)(1+H_0) \frac{U'}{U} z$$

что и представляет собой линейное уравнение Калихмана, чрезвычайно удобное для расчетов крыловых профилей на малых углах атаки.

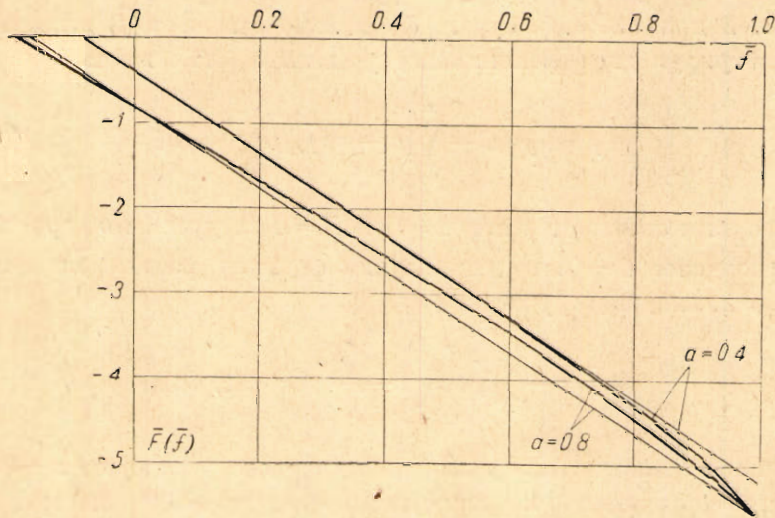
Обратимся теперь к рассмотрению интересующего нас общего случая произвольных продольных градиентов давления на крыле.

Для определения основной функции $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$, входящей в уравнение (3.5), необходимо знать связь между величинами $\bar{\zeta}$, \bar{H} и \bar{f} . Простейшее допущение, которое в настоящее время можно сделать вместо линеаризации $\bar{\zeta} = \bar{H} = 1$, заключается в том, что нормированные функции $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{f})$ и $\bar{H} = \bar{H}(\bar{f})$ одинаковы как в ламинарном, так и в турбулентном пограничном слое.

Пользуясь этим допущением, мы можем подставить выражения $\bar{\zeta}(\bar{f})$ и $\bar{H}(\bar{f})$, взятые по кривым фиг. 2 или по табл. 1 § 2, в выражение (3.7) функции $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$ и таким образом определить эту функцию. Влияние рейнольдсова числа R^{**} явно входит через величины m и H_0 . Как уже упоминалось, эти величины являются слабо изменяющимися функциями R^{**} . Так, величина m изменяется от $1/4$ при малых значениях R^{**} до $1/6$ при больших значениях R^{**} . Точно так же колебания величины H_0 в наблюдаемом интервале рейнольдсовых чисел, повидимому, не выходят из пределов $1.3 \div 1.5$. Остается еще решить вопрос о величине $\bar{\Gamma}_s$, которая с точки зрения принятого нами однопараметрического представления характеристик турбулентного слоя должна быть некоторой константой, одинаковой для всех обтеканий и не зависящей (практически, вероятно, слабо зависящей) от рейнольдсова числа.

Точно так же, как и величины m и H_0 , значение $\bar{\Gamma}_s$ должно быть взято из опытов. К сожалению, экспериментальное определение толщины слоя δ^{**} , входящей в выражение $\bar{\Gamma}_s$, особенно еще в точке отрыва, крайне не точно. Мы не имеем сейчас достаточно хороших опытов для определения этой величины в точке отрыва. Можно лишь отметить, что существующие измерения скоростей вблизи поверхности обтекаемого тела при наличии значительных пульсаций дают сильно завышенные значения скоростей, а следовательно, и завышенные δ^{**} . Прандтль указывает для своего параметра $\bar{\Gamma}_s$ в точке отрыва значения порядка $(-0.05) \div (-0.09)$, что при пересчете на $\bar{\Gamma}_s$ при тех же рейнольдсовых числах дает значения $(-3) \div (-5)$. Эти числа взяты из опытов Никурадзе над диффузорами с установившимся движением, т. е., собственно говоря, не относятся к пограничному слою. Кроме того, как только что указывалось, эти числа, вероятно, завышены.

Не имея достоверных статистических сведений о значении величины $\bar{\Gamma}_s$, найдем ее из того условия, чтобы прямая, аппроксимирующая кривую $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$, при выбранных значениях $m = m_0$ и H_0 совпала с прямой, получаемой при линеаризации функции $\bar{F}(\bar{f}, R^{**})$ по Сквайру и Юнгу, т. е. при замене в этой функции $\zeta = 1$, $\bar{H} = 1$. При выполнении этого усло-



Фиг. 4

вия первое приближение решения общей задачи будет совпадать с решением Сквайра-Юнга для малых углов атаки.

Имеем условие

$$\bar{F}(\bar{f}, R^{**}) \approx -a - b\bar{f} = \frac{1+m_0}{\bar{\Gamma}_s} - [3 + m_0 + (1+m_0)H_0] \bar{f} \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что коэффициент b не зависит от $\bar{\Gamma}_s$ и равен

$$b = 3 + m_0 + (1 + m_0)H_0 \quad (3.9)$$

Что же касается коэффициента a , то он тесно связан с выбором $\bar{\Gamma}_s$ и равен

$$a = -\frac{1+m}{\bar{\Gamma}_s} \quad (3.10)$$

Пользуясь табл. 1, мы построили графики функции \bar{F} при различных $\bar{\Gamma}_s$, причем положили $m_0 = 1/6 = 0.167$ и $H_0 = 1.4$. Как видно из фиг. 4, нижняя прямая ($a = 0.8$) будет давать завышенные значения \bar{f} , т. е. преждевременный отрыв, верхняя ($a = 0.4$) — заниженные \bar{f} , т. е. запоздалый отрыв. Мы остановились на среднем значении $a = 0.6$, что при указанных значениях m_0 и H_0 соответствует выбору $\bar{\Gamma}_s = -1.95$. Проведение аппроксимирующей прямой, т. е. выбор величины a , на самом деле зависит еще от вида функции $U(x)$. Выбранное нами среднее значение $a = 0.6$ дает лишь неко-

торую среднюю грубую оценку величины \bar{I}_s . Коэффициент b при выбранных m_0 и H_0 равен $b=4.8$.

Полагая, как и в теории ламинарного слоя

$$\bar{F} = -a - b\bar{f} + \varepsilon(\bar{f})$$

где $\varepsilon(\bar{f})$ — отклонение кривой, соответствующей точной функции \bar{F} , от аппроксимирующей прямой (3.8), будем, формально считая $\varepsilon(\bar{f})$ известной функцией и интегрируя дифференциальное уравнение (3.5), иметь

$$\bar{f} = \frac{U'}{U^b} \left\{ C - \int_0^x [a - \varepsilon(\bar{f})] U^{b-1}(\xi) d\xi \right\} \quad (3.11)$$

Из условия конечности \bar{f} при $x=0$ и $U=0$ следует, что при полностью турбулентном слое $C=0$, и мы получим формулу расчета \bar{f} при отсутствии начального ламинарного участка

$$\bar{f} = -\frac{aU'}{U^b} \int_0^x \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) U^{b-1}(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

В случае же наличия начального ламинарного участка от $x=0$ до $x=x_t$, из условия совпадения толщины потери импульса δ^{**} на границе $x=x_t$ между ламинарным и турбулентным участком, получим

$$\bar{f} = \frac{U'}{U^b} \left[C_t - a \int_{x_t}^x \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) U^{b-1}(\xi) d\xi \right] \quad (3.13)$$

$$C_t = \bar{f}_t \frac{U_t^b}{U_t'} = \frac{\nu U_t'}{\Gamma_s U_t'} R_{tt}^{**} G(R_{tt}^{**}) \frac{U_t^b}{U_t'} = \frac{\nu}{\Gamma_s} U_t^{b-2} R_{tt}^{**} G(R_{tt}^{**})$$

Здесь индекс t обозначает, что данная величина берется при $x=x_t$, а под R_{tt}^{**} подразумевается рейнольдсово число $R^{**} = U\delta^{**}/\nu$ в точке $x=x_t$, рассчитанное по теории ламинарного слоя от точки $x=0$ до $x=x_t$.

Если в приведенных формулах перейти, что весьма удобно при расчетах, к безразмерным координатам, относя x к хорде c , а скорость U к скорости набегающего потока U_0 , то, сохраняя прежние обозначения для x и U , заметим, что C_t в этом случае будет равно

$$C_t = \frac{1}{\Gamma_s R} U^{b-2} R_{tt}^{**} G(R_{tt}^{**}) \quad \left(R = \frac{U_0 c}{\nu}\right) \quad (3.14)$$

Первое приближение $\bar{f}_1(x)$ получим, полагая в предыдущих формулах $\varepsilon=0$, второе приближение $\bar{f}_2(x)$ найдем, полагая в тех же формулах $\varepsilon(\bar{f}) = \varepsilon[\bar{f}_1(x)]$, и т. д.

Определив $\bar{f}(x)$ в том или ином приближении, найдем R^{**} из равенства

$$R^{**} G(R^{**}) = \bar{\Gamma}_s R \frac{U^2}{U'} \bar{f}(x) \quad (3.15)$$

где справа U , U' и x приняты безразмерными.

Из формул (3.15) и (3.13) следует, что неточность в принятом ранее определении величины $\bar{\Gamma}_s$ скажется при определении R^{**} лишь на поправочном слагаемом ε/a второго приближения, т. е. можно ожидать, что влияние неточности задания $\bar{\Gamma}_s$ будет не велико. Это, конечно, не снимает необходимости уточнения в дальнейшем величины $\bar{\Gamma}_s$ из экспериментальных материалов.

Определение величины $R^{**}(x)$, а тем самым и $\delta^{**}(x)$ имеет, как известно, самое существенное значение в теории профильного сопротивления.

Для определения напряжения трения, а следовательно, и сопротивления трения, используем очевидную формулу

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\bar{\zeta}[\bar{f}(x)]}{G[R^{**}(x)]} \tag{3.16}$$

где значения величины $\bar{\zeta}(\bar{f})$ берутся по табл. 1 или кривой фиг. 2.

Отношение условных толщин слоя будет определяться так:

$$H = \delta^* / \delta^{**} = H_0 \bar{H}[\bar{f}(x)] \tag{3.17}$$

Зная $H(x)$ и $\delta^{**}(x)$, определим отсюда и $\delta^*(x)$.

§ 4. Общие выводы. Примеры. Из рассмотрения полученных формул можно сделать некоторые общие выводы.

1°. Сравнивая условия отрыва слоя при полностью турбулентном слое и полностью ламинарном слое, видим, что при одинаковых распределениях давлений турбулентный слой должен отрываться значительно позже, так как $a_{\text{турб}} \ll a_{\text{лам}}$.

2°. Абсцисса турбулентного отрыва при полностью турбулентном слое, так же как и при ламинарном слое, не зависит от числа Рейнольдса, если предположить, что и распределение давления не зависит от числа Рейнольдса.

3°. Влияние рейнольдсова числа сказывается сильнее всего через перемещение точки перехода. При наличии ламинарного участка точка отрыва лежит ниже по потоку, чем при полностью турбулентном слое, как это следует из рассмотрения формул (3.12) и (3.13). При одинаковых распределениях давлений имеем

$$C_t = \frac{\nu}{\Gamma_s} U_t^{b-2} R_{it}^{**} G_t'(R_{it}^{**}) - a \int_0^{x_t} \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) U^{b-1} d\xi = \frac{\nu}{U_t^2} U_t^b = \frac{\nu}{\Gamma_s} U_t^{b-2} R_{it}^{**} G(R_{it}^{**})$$

причем во втором равенстве под R_{it}^{**} следует понимать R^{**} , рассчитанное в точке $x = x_t$ по теории турбулентного слоя; при этом

$$R_{it}^{**} > R_{it}^{**}$$

Следовательно,

$$|C_t| < a \int_0^{x_t} \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) U^{b-1} d\xi$$

Таблица 2

\bar{s}	$1-\bar{p}$	U	$U^{3.8}$	$\int_0^s U^{3.8} ds$	$U^{4.8}$	U'	$U'/U^{4.8}$	\bar{f}_1
0	0.80	0.895	0.661	—	0.592	—	—	—
0.025	2.24	1.487	4.73	0.068	6.95	12.7	1.82	-0.075
0.05	2.92	1.710	8.87	0.25	13.44	5.4	0.41	-0.061
0.10	3.54	1.882	11.09	0.76	20.86	2.26	0.11	-0.050
0.15	3.80	1.950	12.65	1.34	24.64	0	0	0
0.20	3.68	1.920	11.93	1.96	22.90	-1.34	-0.06	0.071
0.30	3.22	1.795	9.22	3.01	16.65	-1.28	-0.077	0.175
0.40	2.77	1.665	6.79	3.81	11.55	-1.48	-0.128	0.292
0.50	2.24	1.497	4.63	4.38	6.95	-1.65	-0.238	0.627
0.60	1.84	1.356	3.17	4.76	4.31	-1.38	-0.320	0.915
0.66	1.66	1.288	2.62	4.94	3.37	-1.23	-0.364	1.07

Таблица 3

\bar{f}	$\varepsilon(\bar{f})$	ε/a	\bar{f}	$\varepsilon(\bar{f})$	ε/a
-0.3	-0.1505	-0.250	0.6	0.135	0.225
-0.2	-0.0938	-0.156	0.7	0.119	0.198
-0.1	-0.05045	-0.083	0.8	0.075	0.125
0	0	0	0.9	-0.020	-0.033
0.1	0.0387	0.0645	0.925	-0.045	-0.075
0.2	0.0731	0.122	0.950	-0.077	-0.128
0.3	0.104	0.173	0.975	-0.133	-0.222
0.4	0.121	0.201	1.0	-0.185	-0.304
0.5	0.138	0.230			

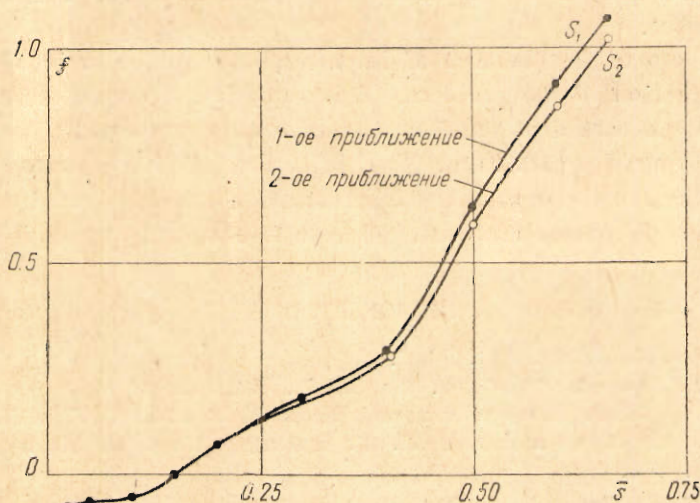
Таблица 4

s	\bar{f}_1	$-\frac{\varepsilon}{a}$	$1-\frac{\varepsilon}{a}$	$U^{3.8}$	$\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)U^{3.8}$	$\int_0^s \left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)U^{3.8} d\xi$	\bar{f}_2
0	—	—	—	0.661	0.661	0	—
0.025	-0.075	0.07	1.07	4.73	5.05	0.071	-0.078
0.5	-0.061	0.06	1.06	8.87	9.40	0.252	-0.061
0.10	-0.050	0.04	1.04	11.09	11.50	0.775	-0.050
0.15	0	0	1.0	12.65	12.65	1.412	0
0.20	0.071	-0.04	0.96	11.93	11.45	2.015	0.0725
0.30	0.175	-0.12	0.88	9.22	8.10	2.992	0.171
0.40	0.292	-0.17	0.83	6.79	5.63	3.679	0.282
0.50	0.627	-0.22	0.78	4.63	3.62	4.441	0.593
0.60	0.915	0.05	1.05	3.17	3.33	4.489	0.865
0.66	1.07	0.54	1.54	2.62	4.03	4.710	1.0.0

Но в точке отрыва $\bar{f}=1$ и из формулы (3.13) следует, что при наличии ламинарного участка абсцисса точки отрыва будет больше, чем при отсутствии его.

Отсюда вытекает также следующее важное следствие.

4°. На поверхности крыла при больших углах атаки и малых R вначале имеет место отрыв ламинарного слоя, который происходит вблизи точки минимума давления. Затем с ростом R точка перехода в своем движении против течения достигает точки отрыва ламинарного слоя. Происходит так называемый «кризис обтекания»: обтекание улучшается, точка отрыва смещается вниз по потоку. Продолжающееся с ростом рейнгольдсова числа уменьшение ламинарного участка вследствие перемещения точки перехода к передней кромке крыла вызывает некоторое ухудшение обтекания, точка отрыва смещается в направлении к носу крыла. На этом явлении осно-



Фиг. 5

вана известная закономерность влияния рейнгольдсова числа на максимальное значение коэффициента подъемной силы. С ростом рейнгольдсова числа вначале $C_{y\max}$ растет, затем рост останавливается и начинается падение $C_{y\max}$. Интенсивность роста и падения $C_{y\max}$, а также интервалы рейнгольдсовых чисел, при которых эти явления происходят, зависят от геометрических особенностей крылового профиля (относительной толщины и воиутости, расположения максимальной толщины и воиутости, радиуса носка профиля и др.).

В качестве примера, иллюстрирующего количественное применение формул предыдущего параграфа, рассмотрим изученное Н. Н. Ф. миной и Е. К. Бучинской¹⁸¹ обтекание крылового профиля USA при $R = 5.17 \times 10^6$ и $\alpha = 14^\circ$.

В табл. 2 приводятся основные данные по распределению безразмерного U и результаты расчета величины \bar{f} по первому приближению в предположении, что турбулентный слой начинается от самой передней кромки. Как видно из последнего столбца табл. 2 и фи. 5, стрыв ($\bar{f}=1$) будет примерно на безразмерном расстоянии $\bar{s}=0.63$, в то время как экспериментальное

значение $\bar{s} = 0.70$. Вертикальными черточками отмечены точки отрыва S_1 , S_2 , рассчитанные по первому и второму приближениям.

На той же фигуре приведена кривая значений \bar{f} по второму приближению. Отрыв по этому приближению оказывается при $s = 0.655$. В табл. 3 даны значения ε/a в функции \bar{f} , а в табл. 4 показан порядок самого расчета.

Поступила в редакцию
3. V. 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

**L. G. LOITZANSKY. — APPROXIMATE CALCULATION OF THE TURBULENT
BOUNDARY LAYER ON AN AEROFOIL PROFILE**

The parameters taken as characteristic of the turbulent boundary layer are a generalization of the Prandtl-Bury parameters for the case of any Reynolds number.

With the help of the theorem of impulses, the author arrives at a general differential equation of the problem. This equation becomes closed if certain analogies between turbulent and laminar layers are assumed. The problem is reduced to a simple quadrature. The influence of the laminar range can easily be taken into account. As an illustration the author gives numerical calculations and a comparison with the results obtained through experiment.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pohlhausen K. ZAMM. 1921. Bd. 1.
2. Howarth L. Proceed. of the Roy. Soc. Ser. A. Vol. 164.
3. Лойцянский Л. Г. Доклады Академии Наук СССР. 1942. Т. XXXVI. № 9.
4. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Доклады Академии Наук СССР. 1942. Т. XXXVI. № 9.
5. Buri A. Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Dissertation. Zürich. 1931. № 652.
6. Дюрэнд. Т. Ш. Аэродинамика. Статья Прандтля «Механика вязкой жидкости».
7. Федяевский К. К. Технические заметки ЦАГИ. 1937. № 158.
8. Gruschwitz E. Ingenieur Archiv. 1931. II.
9. Schmidbauer H. Dissertation. München. 1934.
10. Peters H. Journ. of the Aeron. Sciences. 1935. Vol. III. N 1.
11. Федяевский К. К. Труды ЦАГИ. Вып. 282. (1936), вып. 316 (1937).
12. Мельников А. П. Труды Ленинградского института инженеров гражданского воздушного флота. Вып. 12 (1937).
13. Калихман Л. Е. Техника Воздушного Флота. 1942. № 1.
14. Дородницын А. А., Лойцянский Л. Г. Труды ЦАГИ. 1944. № 551 с. п.
15. Schultz-Grünow. Luftfahrt-Forschung. 1940. XVII. № 8.
16. Squire H. & Joung A. ARC R & M. 1937. N 1838.
17. Falkner V. M. Aircraft Engineering. 1943. March.
18. Фомина Н. Н. Бучинская Е. К. Труды ЦАГИ. 1938. № 374.