

ИЗГИБ ДЛИННЫХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН

Я. Л. ЛУНЦ

(Москва)

Из приближенной теории изгиба пластинок известно, что задача о нахождении прогибов и напряжений пластинки, изогнутой под действием сил, перпендикулярных к ее плоскости, сводится к решению при некоторых граничных условиях дифференциального уравнения Софи Жермен

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = f(x, y) \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

Здесь $q(x, y)$ — интенсивность нагрузки, $w(x, y)$ — прогиб пластинки, D — цилиндрическая жесткость пластинки, которая выражается, как указано, через высоту пластинки h и упругие постоянные E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона.

Для случая защемленной по краям пластинки на границе имеем условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Решение этой задачи известно для нескольких частных случаев (эллиптическая пластинка, нагруженная равномерно, круговая пластинка с любой нагрузкой). В большинстве случаев приходится прибегать к приближенному решению.

В 1932 г. Duncan^[1] был предложен метод для решения проблемы кручения и изгиба изотропных стержней, основанный на разложении искомой функции по степеням малого параметра. Точность этого метода зависит от вида сечения стержня. Результаты Duncan были обобщены Д. Ю. Пановым^[2] на случай уравнения Пуассона с произвольной правой частью; при этом была выведена оценка, строго обосновывающая применение приближенного решения для длинных и узких областей.

Настоящая работа посвящена распространению метода малого параметра для поставленной задачи. Решение пишется в виде ряда по степеням малого параметра, характеризующего один из поперечных размеров пластинки. Для коэффициентов этого ряда (функций координат) получается бесконечная система рекуррентных дифференциальных уравнений. Решение каждого из этих уравнений сводится фактически к решению системы четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Ниже будет показано, что достаточно знать первые два коэффициента искомого ряда, чтобы с помощью выведенных рекуррентных соотношений вычислить все остальные.

Получающийся в результате ряд формально удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям; однако вопрос о его сходимости

требует в каждом отдельном случае особого исследования. Вообще говоря, ряд будет расходящимся, но для длинных и узких областей приближенные решения, получающиеся из частных сумм ряда, будут весьма мало отличаться от точного решения.

§ 1. Метод малого параметра. Пусть область G ограничена кривыми (фиг. 1)

$$y = \eta_1(x) \geq 0, \quad y = \eta_2(x) \leq 0 \tag{1.1}$$

Обозначим через G_λ область, целиком лежащую в G и ограниченную кривыми

$$y = \lambda\eta_1(x), \quad y = \lambda\eta_2(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \tag{1.2}$$

Краевая задача для области G_λ имеет вид

$$\nabla^4 w = f(xy), \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \lambda\eta_1(x) \text{ и } y = \lambda\eta_2(x) \tag{1.3}$$

Каждому значению параметра λ отвечает некоторое единственное, регулярное в области G_λ решение $w = w(x, y, \lambda)$ краевой задачи (1.3).

Для дальнейшего целесообразно сделать замену переменных

$$x = x, \quad y = \lambda\eta \tag{1.4}$$

Легко видеть, что уравнение (1.3) приведет к уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = f(x, \lambda\eta) \tag{1.5}$$

а краевые условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta = \eta_1(x) \text{ и } \eta = \eta_2(x) \tag{1.6}$$

Будем искать решение краевой задачи (1.5), (1.6) в виде ряда

$$w(x, \lambda\eta; \lambda) = w_0(x, \eta) + \lambda w_1(x, \eta) + \lambda^2 w_2(x, \eta) + \dots \tag{1.7}$$

Разложим функцию $f(x, \lambda\eta)$ в ряд по степеням второго аргумента:

$$f(x, \lambda\eta) = f_0(x) + \lambda\eta f_1(x) + \lambda^2 \eta^2 f_2(x) + \dots \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в уравнение (1.5) и умножая на λ^4 , получим

$$\frac{\partial^4}{\partial \eta^4} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) + 2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \eta^2} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) + \lambda^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} (w_0 + \lambda w_1 + \dots) = \lambda^4 f_0 + \lambda^5 \eta f_1 + \dots \tag{1.9}$$

Потребовав тождественного удовлетворения уравнения по λ , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} &= 0, & \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_4}{\partial \eta^4} &= f_0 \\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial \eta^4} &= 0, & \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_5}{\partial \eta^4} &= \eta f_1 \\ & & \dots & \\ 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial \eta^4} &= 0, & \frac{\partial^4 w_{k-4}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{k-2}}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial \eta^4} &= \eta^{k-4} f_{k-4} \\ 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_3}{\partial \eta^4} &= 0, & \dots & \end{aligned} \tag{1.10}$$

Чтобы ряд (1.7) удовлетворял граничным условиям (1.6), достаточно, чтобы этим граничным условиям удовлетворяла каждая из функций $w_k(x, \eta)$.

§ 2. Решение системы уравнений. Первое из уравнений системы (1.10) не содержит других неизвестных функций, кроме ω_0 . Легко видеть, что этому дифференциальному уравнению и граничным условиям (1.6) удовлетворяет нулевое решение $\omega_0 = 0$. В силу теоремы единственности других, регулярных в данной области решений нет. Точно так же убеждаемся, что

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \quad (2.1)$$

Переходя к пятому уравнению, получаем

$$\frac{\partial^4 \omega_4}{\partial \eta^4} = f_0(x) \quad (2.2)$$

Ищем решение в виде

$$\omega_4(x, \eta) = \Omega_{04}(x) + \eta \Omega_{14}(x) + \eta^2 \Omega_{24}(x) + \eta^3 \Omega_{34}(x) + \frac{1}{24} \eta^4 f_0(x) \quad (2.3)$$

Условия на границе (1.6) приводят к системе уравнений для определения искомых функций $\Omega_{04}, \Omega_{14}, \Omega_{24}, \Omega_{34}$:

$$\begin{aligned} \Omega_{04} + \eta_1 \Omega_{14} + \eta_1^2 \Omega_{24} + \eta_1^3 \Omega_{34} &= -\frac{1}{24} \eta_1^4 f_0 \\ \Omega_{04} + \eta_2 \Omega_{14} + \eta_2^2 \Omega_{24} + \eta_2^3 \Omega_{34} &= -\frac{1}{24} \eta_2^4 f_0 \\ \Omega_{14} + 2\eta_1 \Omega_{24} + 3\eta_1^2 \Omega_{34} &= -\frac{1}{6} \eta_1^3 f_0 \\ \Omega_{14} + 2\eta_2 \Omega_{24} + 3\eta_2^2 \Omega_{34} &= -\frac{1}{6} \eta_2^3 f_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычисления определителей системы дают

$$D = -(\eta_1 - \eta_2)^4 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} D_{04} &= -\frac{f_0}{24} \eta_1^2 \eta_2^2 (\eta_1 - \eta_2)^4 & D_{24} &= -\frac{f_0}{24} (\eta_1^2 + 4\eta_1 \eta_2 + \eta_2^2) (\eta_1 - \eta_2)^4 \\ D_{14} &= \frac{f_0}{12} \eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2) (\eta_1 - \eta_2)^4 & D_{34} &= \frac{f_0}{12} (\eta_1 + \eta_2) (\eta_1 - \eta_2)^4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом искомые функции будут

$$\begin{aligned} \Omega_{04} &= \frac{D_{04}}{D} = \frac{f_0}{24} \eta_1^2 \eta_2^2 & \Omega_{24} &= \frac{D_{24}}{D} = \frac{f_0}{24} (\eta_1^2 + 4\eta_1 \eta_2 + \eta_2^2) \\ \Omega_{14} &= \frac{D_{14}}{D} = -\frac{f_0}{12} \eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2) & D_{34} &= \frac{D_{34}}{D} = -\frac{f_0}{12} (\eta_1 + \eta_2) \end{aligned}$$

Функция $\omega_4(x, \eta)$ определяется согласно (2.3):

$$\omega_4(x, \eta) = \frac{f_0}{24} (\eta - \eta_1)^2 (\eta - \eta_2)^2 \quad (2.6)$$

Для следующего уравнения из (1.10) решение ищем в виде

$$\omega_5(x, \eta) = \Omega_{05} + \eta \Omega_{15} + \eta^2 \Omega_{25} + \eta^3 \Omega_{35} + \frac{1}{120} \eta^5 f_1 \quad (2.7)$$

Получаем систему алгебраических уравнений, аналогичную (2.4):

$$\begin{aligned} \Omega_{05} + \eta_1 \Omega_{15} + \eta_1^2 \Omega_{25} + \eta_1^3 \Omega_{35} &= -\frac{1}{120} \eta_1^5 f_1 \\ \Omega_{05} + \eta_2 \Omega_{15} + \eta_2^2 \Omega_{25} + \eta_2^3 \Omega_{35} &= -\frac{1}{120} \eta_2^5 f_1 \\ \Omega_{15} + 2\eta_1 \Omega_{25} + 3\eta_1^2 \Omega_{35} &= -\frac{1}{24} \eta_1^4 f_1 \\ \Omega_{15} + 2\eta_2 \Omega_{25} + 3\eta_2^2 \Omega_{35} &= -\frac{1}{24} \eta_2^4 f_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

После вычислений получим

$$\omega_5(x, \eta) = \frac{f_1}{120} (\eta - \eta_1)^2 (\eta - \eta_2)^2 [\eta + 2(\eta_1 + \eta_2)] \quad (2.9)$$

Функции ω_4 и ω_5 представляют собой полиномы четвертой и пятой степени относительно переменной η . Вообще, как это будет установлено ниже, $\omega_k(x, \eta)$ представляет собой полином степени k относительно переменной η .

Заметим, что основная система дифференциальных уравнений (1.10) распадается на две независимые системы, для четных и для нечетных значений k . Поэтому если, например, $f(x, y)$ — четная функция от переменной y (в частности, постоянная), то все функции $\omega_{2k+1}(x, \eta)$ исчезнут, если же $f(x, y)$ — нечетная функция (от y), то обратятся в нуль $\omega_{2k}(x, \eta)$. Если нагрузка, изгибающая пластинку, равномерно распределена, то нет необходимости вычислять все функции ω_k , достаточно ограничиться четными индексами k .

Легко видеть, что вычисления следующих членов разложения (1.7) становятся громоздкими. Поэтому найдем общий член разложения.

Пусть функции $\omega_{k-2}(x, \eta)$ и $\omega_k(x, \eta)$ известны:

$$\omega_{k-2} = \Omega_{0, k-2} + \eta \Omega_{1, k-2} + \eta^2 \Omega_{2, k-2} + \dots + \eta^{k-3} \Omega_{k-3, k-2} + \eta^{k-2} \Omega_{k-2, k-2} \quad (2.10)$$

$$\omega_k = \Omega_{0, k} + \eta \Omega_{1, k} + \eta^2 \Omega_{2, k} + \dots + \eta^{k-1} \Omega_{k-1, k} + \eta^k \Omega_{k, k}$$

Чтобы найти $\omega_{k+2}(x, \eta)$, надо решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 \omega_{k+2}}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega_{k-2}}{\partial x^4} = \eta^{k-2} f_{k-2} \quad (2.11)$$

Так как

$$2 \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial x^2 \partial \eta^2} = 2 \cdot 2 \cdot 1 \Omega_{2, k}'' + 2 \cdot 3 \cdot 2 \eta \Omega_{3, k}'' + 2 \cdot 4 \cdot 3 \eta^2 \Omega_{4, k}'' + \dots + 2(k-1)(k-2) \eta^{k-3} \Omega_{k-1, k}'' + 2k(k-1) \eta^{k-2} \Omega_{k, k}'' \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^4 \omega_{k-2}}{\partial x^4} = \Omega_{0, k-2}^{IV} + \eta \Omega_{1, k-2}^{IV} + \eta^2 \Omega_{2, k-2}^{IV} + \dots + \eta^{k-3} \Omega_{k-3, k-2}^{IV} + \eta^{k-2} \Omega_{k-2, k-2}^{IV}$$

то

$$\frac{\partial^4 \omega_{k+2}}{\partial \eta^4} = - \{ [2 \cdot 2 \cdot 1 \Omega_{2, k}'' + \Omega_{0, k-2}^{IV}] + \eta [2 \cdot 3 \cdot 2 \Omega_{3, k}'' + \Omega_{1, k-2}^{IV}] + \eta^2 [2 \cdot 4 \cdot 3 \Omega_{4, k}'' + \Omega_{2, k-2}^{IV}] + \dots + \eta^{k-3} [2(k-1)(k-2) \Omega_{k-1, k}'' + \Omega_{k-3, k-2}^{IV}] + \eta^{k-2} [2k(k-1) \Omega_{k, k}'' + \Omega_{k-2, k-2}^{IV} - f_{k-2}] \} \quad (2.13)$$

Введем новые функции $\Omega_{m, k+2}$ ($m=4, 5, 6, \dots, k+1$)

$$-\Omega_{m, k+2} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \left(2(m-2)(m-3) \Omega_{m-2, k}'' + \Omega_{m-4, k-2}^{IV} \right) \quad (2.14)$$

$$-\Omega_{k+2, k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)k(k-1)} \left(2k(k-1) \Omega_{k, k}'' + \Omega_{k-2, k-2}^{IV} - f_{k-2} \right)$$

Тогда

$$\frac{\partial^4 \omega_{k+2}}{\partial \eta^4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Omega_{4, k+2} + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \eta \Omega_{5, k+2} + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \eta^2 \Omega_{6, k+2} + \dots + (k+1)k(k-1)(k-2) \eta^{k-3} \Omega_{k+1, k+2} + (k+2)(k+1)k(k-1) \eta^{k-2} \Omega_{k+2, k+2} \quad (2.15)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\omega_{k+2}(x, \eta) = \Omega_{0, k+2} + \eta \Omega_{1, k+2} + \eta^2 \Omega_{2, k+2} + \eta^3 \Omega_{3, k+2} + \eta^4 \Omega_{4, k+2} + \dots + \eta^{k+1} \Omega_{k+1, k+2} + \eta^{k+2} \Omega_{k+2, k+2} \quad (2.16)$$

Здесь неизвестными являются только коэффициенты $\Omega_{0, k+2}$, $\Omega_{1, k+2}$, $\Omega_{2, k+2}$, $\Omega_{3, k+2}$; остальные же определены через известные коэффициенты функций ω_{k-2} и ω_k .

Неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий. При этом получается система уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega_{0, k+2} + \eta_1 \Omega_{1, k+2} + \eta_1^2 \Omega_{2, k+2} + \eta_1^3 \Omega_{3, k+2} &= - \sum_{m=4}^{k+2} \eta_1^m \Omega_{m, k+2} \\ \Omega_{0, k+2} + \eta_2 \Omega_{1, k+2} + \eta_2^2 \Omega_{2, k+2} + \eta_2^3 \Omega_{3, k+2} &= - \sum_{m=4}^{k+2} \eta_2^m \Omega_{m, k+2} \\ \Omega_{1, k+2} + 2\eta_1 \Omega_{2, k+2} + 3\eta_1^2 \Omega_{3, k+2} &= - \sum_{m=4}^{k+2} m\eta_1^{m-1} \Omega_{m, k+2} \\ \Omega_{1, k+2} + 2\eta_2 \Omega_{2, k+2} + 3\eta_2^2 \Omega_{3, k+2} &= - \sum_{m=4}^{k+2} m\eta_2^{m-1} \Omega_{m, k+2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из теории линейных уравнений известно, что решение этой системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Omega_{0, k+2} &= - \frac{1}{D} \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} D_{0, m}^* & \Omega_{2, k+2} &= - \frac{1}{D} \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} D_{2, m}^* \\ \Omega_{1, k+2} &= - \frac{1}{D} \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} D_{1, m}^* & \Omega_{3, k+2} &= - \frac{1}{D} \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} D_{3, m}^* \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь $D = -(\eta_1 - \eta_2)^4$ — определитель системы, вычисленный ранее (2.5),

$$\begin{aligned} D_{0, m}^* &= \begin{vmatrix} \eta_1^m & \eta_1 & \eta_1^2 & \eta_1^3 \\ \eta_2^m & \eta_2 & \eta_2^2 & \eta_2^3 \\ m\eta_1^{m-1} & 1 & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ m\eta_2^{m-1} & 1 & 2\eta_2 & 3\eta_2^2 \end{vmatrix}, & D_{1, m}^* &= \begin{vmatrix} 1 & \eta_1^m & \eta_1^2 & \eta_1^3 \\ 1 & \eta_2^m & \eta_2^2 & \eta_2^3 \\ 0 & m\eta_1^{m-1} & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ 0 & m\eta_2^{m-1} & 2\eta_2 & 3\eta_2^2 \end{vmatrix} \\ D_{2, m}^* &= \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^m & \eta_1^3 \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^m & \eta_2^3 \\ 0 & 1 & m\eta_1^{m-1} & 3\eta_1^2 \\ 0 & 1 & m\eta_2^{m-1} & 3\eta_2^2 \end{vmatrix}, & D_{3, m}^* &= \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 & \eta_1^m \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 & \eta_2^m \\ 0 & 1 & 2\eta_1 & m\eta_1^{m-1} \\ 0 & 1 & 2\eta_2 & m\eta_2^{m-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Вычисляя, найдем

$$\begin{aligned} D_{0, m}^* &= \eta_1^2 \eta_2^2 (\eta_1 - \eta_2)^4 P_{0, m} & D_{2, m}^* &= (\eta_1 - \eta_2)^4 P_{2, m} \\ D_{1, m}^* &= \eta_1 \eta_2 (\eta_1 - \eta_2)^4 P_{1, m} & D_{3, m}^* &= (\eta_1 - \eta_2)^4 P_{3, m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $m = 4, 5, 6, \dots$ и

$$\begin{aligned} P_{0, m} &= \sum_{k=1}^{m-3} k(m-k-2) \eta_1^{m-k-2} \eta_2^{k-1} \\ P_{1, m} &= - \sum_{k=1}^{m-2} [3k(m-k-1) - m] \eta_1^{m-k-2} \eta_2^{k-1} \\ P_{2, m} &= \sum_{k=1}^{m-1} [3k(m-k) - 2m] \eta_1^{m-k-1} \eta_2^{k-1} \\ P_{3, m} &= - \sum_{k=1}^{m-2} k(m-k-1) \eta_1^{m-k-2} \eta_2^{k-1} \end{aligned}$$

После преобразования формулы (2.18) примут вид¹

$$\begin{aligned} \Omega_{0, k+2} &= \eta_1^2 \eta_2^2 \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} P_{0, m} & \Omega_{2, k+2} &= \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} P_{2, m} \\ \Omega_{1, k+2} &= \eta_1 \eta_2 \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} P_{1, m} & \Omega_{3, k+2} &= \sum_{m=4}^{k+2} \Omega_{m, k+2} P_{3, m} \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{m, k+2} &= -\frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \left(2(m-2)(m-3) \Omega_{m-2, k}^{\prime\prime} + \Omega_{m-4, k+2}^{\text{IV}} \right) \\ \Omega_{k+2, k+2} &= -\frac{1}{(k+2)(k+1)k(k-1)} \left(2k(k-1) \Omega_{kk}^{\prime\prime} + \Omega_{k-2, k-2}^{\text{IV}} - f_{k-2} \right) \\ & \quad (m=4, 5, 6, \dots, k+1) \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (2.14) и (2.21), найдем функцию

$$\begin{aligned} w_6(x, \eta) &= (\eta - \eta_1)^2 (\eta - \eta_2)^2 \left\{ \frac{f_1 - f_0^{\prime\prime}}{360} [\eta^2 + 2(\eta_1 + \eta_2)\eta + (3\eta_1^2 + 4\eta_1\eta_2 + 3\eta_2^2)] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{[f_0(\eta_1 + \eta_2)]^{\prime\prime}}{120} [\eta + 2(\eta_1 + \eta_2)] - \frac{[f_0(\eta_1^2 + 4\eta_1\eta_2 + \eta_2^2)]^{\prime\prime}}{144} \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом ряд (1.7) в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} w(x, \lambda\eta; \lambda) &= \lambda^4 (\eta - \eta_1)^2 (\eta - \eta_2)^2 \left\{ \frac{f_0}{24} + \lambda \frac{f_1}{120} + \lambda^2 \left[\frac{f_2 - f_0^{\prime\prime}}{360} \{\eta^2 + 2(\eta_1 + \eta_2)\eta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (3\eta_1^2 + 4\eta_1\eta_2 + 3\eta_2^2)\} + \frac{[f_0(\eta_1 + \eta_2)]^{\prime\prime}}{120} \{\eta + 2(\eta_1 + \eta_2)\} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{[f_0(\eta_1^2 + 4\eta_1\eta_2 + \eta_2^2)]^{\prime\prime}}{144} \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть область G ограничена симметричным контуром. Тогда $\eta_2(x) = -\eta_1(x)$ и

$$\begin{aligned} w_4(x, \eta) &= \frac{f_0}{24} (\eta^2 - \eta_1^2)^2, & w_5(x, \eta) &= \frac{f_1}{120} \eta (\eta^2 - \eta_1^2)^2 \\ w_6(x, \eta) &= (\eta^2 - \eta_1^2)^2 \left[\frac{f_2 - f_0^{\prime\prime}}{360} (\eta^2 + 2\eta_1^2) + \frac{(f_0\eta_1^2)^{\prime\prime}}{72} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} w(x, \lambda\eta; \lambda) &= \lambda^4 (\eta^2 - \eta_1^2)^2 \left\{ \frac{f_0}{24} + \frac{\lambda}{120} f_1 \eta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda^2}{360} [(f_2 - f_0^{\prime\prime})(\eta^2 + 2\eta_1^2) + 5(f_0\eta_1^2)^{\prime\prime}] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

В частности, если к пластинке приложена нагрузка постоянной интенсивности $f(x, y) = q$, то последняя формула примет вид

$$w(x, \lambda\eta; \lambda) = \frac{q\lambda^4 (\eta^2 - \eta_1^2)^2}{24} \left[1 + \lambda^2 \frac{(\eta_1^2)^{\prime\prime}}{3} + \dots \right] \quad (2.26)$$

¹ Аналогичными вычислениями для случая краевой задачи, решенной Д. Ю. Павловым [2], можно получить выражение для коэффициентов φ_k разложения решения по степеням λ .

§ 3. Оценка точности приближенного решения. Допустим, что точное решение краевой задачи (1.3) в области G_λ есть $\bar{w}(x, \eta; \lambda)$. Обозначим через $\bar{w}_n(x, \eta; \lambda)$ приближенное решение той же задачи, получающееся при удержании первых n членов ряда (2.23), и произведем оценку ошибки:

$$\rho_n = \bar{w}(x, \eta; \lambda) - \bar{w}_n(x, \eta; \lambda) = \bar{w}(x, \eta; \lambda) - \sum_{k=0}^n \lambda^k \omega_k(x, \eta) \quad (3.1)$$

Имеем

$$\nabla_{x,y}^4 \rho_n = \nabla_{x,y}^4 \bar{w} - \sum_{k=0}^n \lambda^k \nabla_{x,y}^4 \omega_k \quad (3.2)$$

Так как

$$\nabla_{x,y}^4 \bar{w} = f(x, y) = f(x, \lambda \eta)$$

то

$$\nabla_{x,y}^4 \rho_n = f(x, \lambda \eta) - \sum_{k=0}^n \lambda^k \left(\frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial \eta^4} \right) \quad (3.3)$$

Если развернутую сумму в правой части этого уравнения расположить по степеням λ , то, пользуясь (1.10), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \lambda^k \left(\frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial \eta^4} \right) &= \sum_{k=0}^{n-4} \lambda^k \eta^k f_k + \lambda^{n-3} \left(\frac{\partial^4 \omega_{n-3}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right) + \\ &+ \lambda^{n-2} \left(\frac{\partial^4 \omega_{n-2}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_n}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right) + \lambda^{n-1} \frac{\partial^4 \omega_{n-1}}{\partial x^4} + \lambda^n \frac{\partial^4 \omega_n}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Возвращаясь к (3.2), получим

$$\begin{aligned} \nabla_{x,y}^4 \rho_n &= \sum_{k=n-3}^{\infty} (\lambda \eta)^k f_k - \lambda^{n-3} \left(\frac{\partial^4 \omega_{n-3}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right) - \lambda^{n-2} \left(\frac{\partial^4 \omega_{n-2}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_n}{\partial x^2 \partial \eta^2} \right) - \\ &- \lambda^{n-1} \frac{\partial^4 \omega_{n-1}}{\partial x^4} - \lambda^n \frac{\partial^4 \omega_n}{\partial x^4} = g_n(x, \eta; \lambda) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$f(x, \lambda \eta) - \sum_{k=0}^{n-4} (\lambda \eta)^k f_k = \sum_{k=n-3}^{\infty} (\lambda \eta)^k f_k \quad (3.6)$$

Будем предполагать, что $f(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням второго аргумента, сходящийся абсолютно и равномерно в области G . Тогда

$$\left| \sum_{k=n-3}^{\infty} (\lambda \eta)^k f_k \right| = \lambda^{n-3} \left| \sum_{k=n-3}^{\infty} \lambda^{k-n+3} \eta^k f_k \right| \leq \lambda^{n-3} r_{n-4} \quad (3.7)$$

Здесь

$$r_{n-4} = \max \sum_{k=n-3}^{\infty} |y|^k |f_k| \quad \text{в области } G \quad (3.8)$$

Введем, кроме того, обозначения

$$p_n = \max \left| \frac{\partial^4 \omega_n(x, y)}{\partial x^4} \right|, \quad q_n = \max \left| \frac{\partial^4 \omega_n(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \quad \text{в области } G \quad (3.9)$$

Тогда в области G_λ

$$|g_n| \leq \lambda^{n-3} (r_{n-4} + 2q_{n-2} + p_{n-3}) + \lambda^{n-2} (2q_n + p_{n-2}) + \lambda^{n-1} p_{n-1} + \lambda^n p_n \quad (3.10)$$

Заметим, что $\rho_n = 0$ и $\frac{\partial \rho_n}{\partial \nu} = 0$ на границе области G_λ , это следует из определения функций ρ_n , \bar{w} и ω_k .

Следовательно, функция ρ_n является решением краевой задачи

$$\nabla_{x,y}^2 \rho_n = g_n \left(x, \frac{y}{\lambda}; \lambda \right); \quad \rho_n = 0, \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при } y = \lambda \eta_1(x) \text{ и } y = \lambda \eta_2(x) \quad (3.11)$$

Здесь ν — внутренняя нормаль к контуру области G_λ .

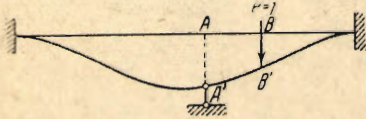
Остается теперь оценить решение краевой задачи (3.11).

Известно, что решение $w(x, y)$ краевой задачи (1.3) может быть представлено с помощью функции Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$:

$$w(x, y) = D \int \int_{(G)} \Gamma(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.12)$$

Функция Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ определяет величину прогиба пластинки в точке (x, y) при действии сосредоточенной единичной силы в точке (ξ, η) .

Чтобы оценить функцию $w(x, y)$ по модулю, достаточно знать максимум модуля $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ так как функция $f(\xi, \eta)$ задана.



Фиг. 2

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. Максимум модуля функции Грина (как функции четырех переменных) может достигаться только в точках $x = \xi, y = \eta$.

Докажем, что если

$$|\Gamma(x, y; \xi, \eta)| \geq |\Gamma(\xi, \eta; \xi, \eta)|, \quad (3.13)$$

то

$$|\Gamma(x, y; x, y)| > |\Gamma(x, y; \xi, \eta)|$$

Обратимся к фиг. 2. Пусть единичная сила, приложенная в точке $B(\xi, \eta)$, вызывает в этой точке и в точке $A(x, y)$ соответственно смещения

$$BB' = |\Gamma(\xi, \eta; \xi, \eta)|, \quad AA' = |\Gamma(x, y; \xi, \eta)| \quad (3.14)$$

К точке A' подведем пору, дающую после удаления силы $P=1$ реакцию P' в направлении AA' . После удаления силы P пластинка примет новую форму равновесия, которая отличается от всякой другой кинематически возможной формы равновесия тем, что она обладает минимальной потенциальной энергией. На основании известной теоремы о потенциальной энергии деформации $\frac{1}{2} P' \times AA' < \frac{1}{2} \times 1 BB'$ или в силу (3.13) $P' < 1$, а так как $AA' = P' |\Gamma(x, y; x, y)|$, то в силу (3.14) имеем

$$P' |\Gamma(x, y; x, y)| = |\Gamma(x, y; \xi, \eta)|, \quad \text{откуда } |\Gamma(x, y; x, y)| > |\Gamma(x, y; \xi, \eta)|$$

Отсюда немедленно следует, что максимум функции Грина не может достигаться в точках, где $x \neq \xi$ или $y \neq \eta$.

Лемма 2. Если $\Gamma'(x, y; \xi, \eta)$ и $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ суть функции Грина для областей G' и G , и если область G целиком лежит в области G' , то

$$\Gamma'(x, y; x, y) > \Gamma(x, y; x, y).$$

Другими словами, пластинка G прогнется в точке приложения единичной силы меньше, чем пластинка G' в той же точке¹.

¹ Доказательство этой леммы предложено А. А. Ильюшиным. Этот же метод лег в основу доказательства предыдущей леммы.

Пластина G , защемленная по контуру γ , прогнется в точке A на величину $\Gamma(x, y; x, y)$. Подведем к точке A' опору. Тогда действие единичной силы будет заменено реакцией опоры. Пластинку G можно рассматривать как образованную из G' путем защемления по контуру γ . Освободим теперь пластинку G' от защемления по контуру γ и рассмотрим новую форму равновесия пластинки G' . Обозначая возникшую при этом реакцию в опоре A' через P' и, применяя известный принцип о минимуме энергии, получим

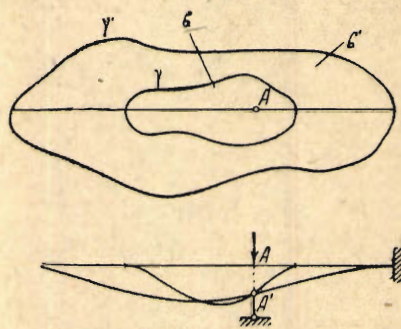
$$\frac{1}{2} AA' \times P' < \frac{1}{2} AA' \quad \text{или} \quad P' < 1$$

С другой стороны, $AA' = \Gamma(x, y; x, y)$ и $AA' = P' \Gamma'(x, y; x, y)$, откуда $P' \Gamma'(x, y; x, y) = \Gamma(x, y; x, y)$ и, следовательно,

$$\Gamma'(x, y; x, y) > \Gamma(x, y; x, y).$$

Лемма доказана.

Таким образом для того, чтобы оценить максимум функции Грина для некоторой области, достаточно оценить максимум функции Грина для какой-либо объемлющей области. Естественно для этой цели воспользоваться такой областью, для которой известна функция Грина. В качестве такой области можно взять бесконечную полосу ширины a , так, чтобы вся область могла поместиться внутри полосы. Для оценки функции Грина воспользуемся результатом Надаи [3] для прогиба w_{\max} по середине полосы



Фиг. 3

$$w_{\max} = 0.45 \frac{Pa^2}{2\pi^2 D} \approx \frac{0.00726 Pa^2}{D} \quad (3.15)$$

Положив $P = 1$ кг, получим

$$\max |\Gamma'(x, y; \xi, \eta)| = \frac{0.00726 a^2}{D} > |\Gamma(x, y; \xi, \eta)| \quad (3.16)$$

Возвращаясь к равенству (3.12), имеем

$$|\omega(x, y)| = D \left| \iint_{(G)} \Gamma(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq \quad (3.17)$$

$$\leq D \iint_{(G)} |\Gamma(x, y; \xi, \eta)| |f(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq D \max |\Gamma(x, y; \xi, \eta)| \max |f(x, y)| S$$

Здесь

$$S = \iint_{(G)} d\xi d\eta \quad (3.18)$$

Неравенство (3.16) дает

$$|\omega(x, y)| < 0.00726 a^2 \max |f(x, y)| S \quad (3.19)$$

Перейдем теперь к нашей основной задаче — оценке функции ρ_n .

Применяя последнее неравенство к (3.14), имеем

$$|\rho_n| < 0.00726 a_\lambda^2 \max |g_n| S_\lambda$$

Здесь

$$S_\lambda = \iint_{(G_\lambda)} d\xi d\eta, \quad a_\lambda = \lambda [\max |\eta_1(x)| + \max |\eta_2(x)|]$$

Обозначая через S и a значение величин S_λ и a_λ при $\lambda = 1$, получим

$$S_\lambda = \lambda S \quad \text{и} \quad a_\lambda = \lambda a$$

Подставляя эти значения в неравенство (3.19), имеем

$$|p_n| < 0.00726a^2 S \lambda^3 \max |g_n| \quad (3.20)$$

Воспользовавшись неравенством (3.10), получим окончательно

$$|p_n| < 0.00726a^2 S \lambda^n [r_{n-4} + 2q_{n-1} + p_{n-3} + \lambda(2q_n + p_n) + \lambda^2 p_{n-1} + \lambda^3 p_n] \quad (3.21)$$

Неравенство (3.21) позволяет доказать следующее: если $\omega_4(x, y) \neq 0$ в некоторой замкнутой области внутренней к G , то относительная ошибка $\Delta_n = \left| \frac{\bar{\omega} - \bar{\omega}_n}{\bar{\omega}_n} \right|$ при $n > 4$ стремится к нулю, когда стремится к нулю λ .

Действительно

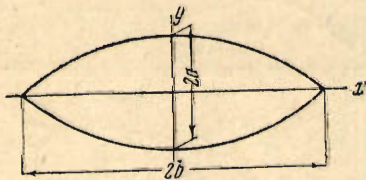
$$\Delta_n = \frac{|p_n|}{|\bar{\omega}_n|} = \frac{|p_n|}{\lambda^4 |\omega_4 + \lambda\omega_5 + \dots + \lambda^{n-4}\omega_n|} < \frac{K\lambda^{n-4}}{|\omega_4 + \lambda\omega_5 + \dots + \lambda^{n-4}\omega_n|} \quad (3.22)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{K\lambda^{n-4}}{|\omega_4 + \lambda\omega_5 + \dots + \lambda^{n-4}\omega_n|} = 0, \quad \text{так как } |\omega_4| > m > 0 \quad (3.23)$$

§ 4. Примеры. Полученные результаты применимы к расчету пластинок.

1. *Параболическая лунка.* Пусть пластинка ограничена двумя параболой (фиг. 4).



Фиг. 4

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{a}{b^2}(x^2 - b^2), \\ y_2 &= \frac{a}{b^2}(x^2 - b^2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Найдем прогиб этой пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности q . При этом воспользуемся первыми двумя значащими членами разложения (2.26). Полагая в этой формуле $\lambda = 1$ и $\omega(x, y; 1) = \omega(x, y)$, получим

$$\omega(x, y) = \frac{q}{72D} \left[y^2 - \frac{a^2}{b^4}(x^2 - b^2)^2 \right]^2 \left[3 + 4\frac{a^2}{b^4}(3x^2 - b^2) \right] \quad (4.2)$$

Нетрудно видеть, что максимальный прогиб будет в центре пластинки:

$$\omega(0, 0) = \frac{qa^4}{72D} \left(3 - 4\frac{a^2}{b^2} \right) \quad (4.3)$$

Разумеется, этим приближенным решением можно пользоваться, если величина отношения a/b достаточно мала. Если, например, $a/b = 1$, то мы получим отрицательное значение для $\omega(0, 0)$, чего не может быть.

Займемся оценкой точности полученного результата. Выпишем предварительно функции ω_4 , ω_5 , ω_6 и ω_7 :

$$\omega_4 = \frac{q}{24D} \left[y^2 - \frac{a^2}{b^4}(x^2 - b^2)^2 \right]^2, \quad \omega_5 = 0$$

$$\omega_6 = \frac{qa^2}{18b^4D} \left[y^2 - \frac{a^2}{b^4}(x^2 - b^2)^2 \right]^2 (3x^2 - b^2), \quad \omega_7 = 0$$

Применяя формулу (3.21), получим для $n = 7$

$$|p_7| < 0.00726 \times 4a^2 S (2q_6 + p_4 + p_6) \quad (4.4)$$

где

$$p_4 = \max \left| \frac{\partial^4 \omega_4}{\partial x^4} \right| = \frac{15q}{D} \left(\frac{a}{b} \right)^4, \quad p_6 = \max \left| \frac{\partial^4 \omega_6}{\partial x^4} \right| = \frac{43q}{D} \left(\frac{a}{b} \right)^6$$

$$q_6 = \max \left| \frac{\partial^4 \omega_6}{\partial x^2 \partial y^2} \right| = 7.2 \frac{q}{D} \left(\frac{a}{b} \right)^4$$

Производя вычисления, получим

$$|\rho_7| < \frac{0.0775q}{D} \frac{a^7}{b^3} \left[30.4 + 43 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

Найдем относительную ошибку для прогиба в центре:

$$\Delta_7 = \frac{|\rho_7| 72D}{qa^4 [3 - 4(a/b)^2]} < \frac{0.0775 \times 72 (a/b)^3 [30.4 + 43 (a/b)^2]}{3 - 4(a/b)^2}$$

Потребуем, чтобы ошибка не превышала 8%:

$$\frac{0.0775 \times 72 (a/b)^3 [30.4 + 43 \left(\frac{a}{b} \right)^2]}{3 - 4(a/b)^2} < 0.08 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda^3 [30.4 + 43\lambda^2]}{3 - 4\lambda^2} < 0.0143,$$

где $\lambda = a/b$. Решая это неравенство, получим

$$\lambda < 0.113, \quad \text{т. е.} \quad a < \frac{1}{9} b$$

Наконец, вычислим изгибающий момент G_2 в точке $(0, a)$

$$G_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.6)$$

Вычисляя вторые производные, получим

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0, y=a} = \frac{qa^2}{9D} \left[3 - 4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right], \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0, y=a} = 0$$

откуда

$$G_2 = -\frac{qa^2}{9} \left[3 - 4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

2. *Бесконечная полоса.* Найдем форму равновесия бесконечной полосы ширины $2a$, нагруженной равномерной нагрузкой интенсивности q .

Легко видеть, что все w_n , кроме w_4 , обращаются в нуль. Таким образом ряд (2.21) дает известное точное решение краевой задачи (1.3):

$$w = \frac{q(y^2 - a^2)^2}{24D} \quad (4.8)$$

3. *Эллиптическая пластинка.* Найдем форму равновесия эллиптической пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности q . Уравнение контура в этом случае имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.9)$$

Система уравнений (1.10) может быть удовлетворена следующим образом:

$$w_{2m+5} = 0,$$

$$w_{2m+4} = \frac{\delta^4 q}{24D} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \sum_{n=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^m (-1)^n C_n^{m-n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{a} \right)^{2n} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{b}{a} \right)^{2(m-n)}$$

Здесь

$$C_n^{m-n} = \frac{n!}{(m-n)!(2n-n)!}, \quad C_n^0 = 1$$

Итак, имеем

$$w(x, \lambda \eta; \lambda) = \frac{q \delta^4}{24D} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right)^2 \lambda^4 \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{2m} \sum_{n=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^m (-1)^n C_n^{m-n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{a} \right)^{2n} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{b}{a} \right)^{2(m-n)} \quad (4.10)$$

Пользуясь тождествами

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{2m} \sum_{n=\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^m (-1)^n C_n^{m-n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{a} \right)^{2n} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{b}{a} \right)^{2(m-n)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\lambda \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^{2n} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\lambda \frac{b}{a} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{2k} \quad (4.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\lambda \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^{2n} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\lambda \frac{b}{a} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{2k} = \frac{a^4}{a^4 + \frac{2}{3} \lambda^2 a^2 b^2 + \lambda^4 b^4} \quad (4.12)$$

получим

$$\omega(x, \lambda \eta; \lambda) = \frac{a^4 (\lambda b)^4 q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right)^2}{8D [3a^4 + 2a^2 (\lambda b)^2 + 3(\lambda b)^4]} \quad (4.13)$$

Это решение является точным и совпадает с формулой Брайану.

Радиус сходимости ряда (4.11) для λ определяется из неравенства

$$\lambda^2 \frac{2}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{2} \lambda^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] < 1$$

Откуда

$$\lambda_0 = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{3}}, \quad \lambda_0 \approx 0.85 \frac{a}{b}$$

При $\lambda < \lambda_0$ ряд (4.11) является сходящимся и применение формулы (4.12) законно.

Поступила в редакцию 10. VI 1941.

SUR LA FLEXION DES PLAQUES LONGUES ENCASTRÉES

I. L. LUNTZ

(Résumé)

Il s'agit de la solution de l'équation différentielle

$$\nabla^4 w = f(x, y)$$

où $w=0$, $\partial w / \partial n=0$ sur la frontière d'un domaine étroit G_λ (λ est un paramètre qui caractérise la largeur du domaine G_λ). La solution $w(x, \eta)$ de ce problème aux limites (où $\eta=y/\lambda$) est cherchée dans la forme d'une série

$$w(x, \eta) = w_0(x, \eta) + \lambda w_1(x, \eta) + \lambda^2 w_2(x, \eta) + \dots \quad (1.7)$$

On trouve les coefficients $w_k(x, \eta)$ de cette série et une fonction majorante son reste.

On donne enfin quelques exemples, où on applique les résultats obtenus.

Dans les cas, où le domaine G_λ est une ellipse ou une bande infinie et la charge est constante [$f(x, y)=\text{const}$], la série (1.7) converge et on reçoit des solutions exactes, qui coïncident avec les formules connues.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duncan W. I. Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes. R. M. N. 1932, № 1444.
2. Панов Д. Ю. Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. Известия АН СССР. Отделение естественн. и математич. наук. 1937. [Стр. 63].
3. Nadai. Der Bauingenieur. 1921. [S. 299].