ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. Н. Лебедев (Ленинград)

1. Введение

В теле, находящемся в естественном состоянии, возникают напряжения, если его подвергнуть неравномерному нагреванию или охлаждению. Их величина зависит от степени неравномерности температуры, от формы и материала тела. Напряжения появляются и тогда, когда какая-либо форма получена посредством отливки. Эти напряжения не исчезают и сопровождают деталь в продолжение всего ее использования.

При некоторых ограничительных предположениях количественное определение напряжений второго типа приводится к первому. Поэтому достаточно решить задачу для этого первого случая.

2. Основные уравнения в пространственной задаче

Математическим аппаратом для решения задачи служат те же уравнения теории упругости с некоторыми добавочными членами.

Уравнения равновесия остаются без изменения.

Именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Связь между деформациями и напряжениями выражается в форме:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mu+\lambda}{\mu\beta}\left[X_x-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(Y_y+Z_z)\right]+\alpha t,\\ \varepsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\lambda+\mu}{\mu\beta}\left[Y_y-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Z_z)\right]+\alpha t,\\ \varepsilon_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\lambda+\mu}{\mu\beta}\left[Z_z-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(Y_y+X_x)\right]+\alpha t,\\ \varepsilon_{xy}&=\frac{1}{\mu}X_y;\quad \varepsilon_{xz}=\frac{1}{\mu}X_z;\quad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{\mu}Y_z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где t — температура,

α — линейный коэффициент расширения,

αt — температурное относительное расширение,

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu\beta}=\frac{1}{E};\quad \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\sigma;\quad \beta=2\mu+3\lambda.$$

Решив уравнение (2) относительно x_x, y_y, z_z найдем

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\, t, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \alpha\beta t, \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \alpha\beta t; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \quad Y_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Здесь под θ понимается кубическое расширение, равное

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Подставим выражение напряжений из (3) в (1).
Тогда после простых операций получим:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u &= \alpha\beta\frac{\partial t}{\partial x}, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v &= \alpha\beta\frac{\partial t}{\partial y}, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w &= \alpha\beta\frac{\partial t}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уравнения (4) соответственно продифференцируем по x, y, и z. Сложим их между собой. Тогда

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = \alpha\beta\,\nabla^2 t.$$

При установившейся температуре t, а следовательно и θ функции гармонические.

Теперь над обеими частями уравнений (4) проделаем операцию Лапласа.

Из первого (4) следует:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\theta + \mu\nabla^2\nabla^2 u = \alpha\beta\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t. \tag{5a}$$

Но из (5a) следует:

$$\nabla^2\theta = \frac{\alpha\beta}{\lambda + 2\mu}\nabla^2 t. \tag{5b}$$

Поэтому

$$\alpha\beta\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t + \mu\nabla^2\nabla^2 u = \alpha\beta\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t.$$

Отсюда

$$\mu\,\nabla^2\nabla^2 u = \frac{\alpha\beta\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t,$$

Окончательно имеем, проделав то же самое с остальными двумя уравнениями (4):

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2 u &= \frac{\alpha\beta}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 t, \\ \nabla^2\nabla^2 v &= \frac{\alpha\beta}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 t, \\ \nabla^2\nabla^2 w &= \frac{\alpha\beta}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 t. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В случае установившейся температуры $\nabla^2 t = 0$ и перемещения u, v, w будут бигармоническими функциями.

3. Уравнения Бельтрами

Как известно, уравнений (1) и условий на поверхности недостаточно для решения задачи теории упругости. Необходимы еще дополнительные условия. Такими условиями являются уравнения совместности перемещений, или же, что равносильно, уравнения Бельтрами. Чтобы последние получить, продифференцируем первое уравнение (4) по x:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\mu\nabla^2\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\beta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \qquad (6a)$$

Выразим входящие сюда величины через напряжения.

Из (3) вытекает:

$$\theta'=X_x+Y_y+Z_z=\beta\theta-3\,\alpha\beta\, t. \qquad (6\,b)$$

Отсюда

$$\theta=\frac{\theta'}{\beta}+3\,\alpha\, t. \qquad (6\,c)$$

Из (6b) с учетом (5) следует:

$$\begin{gathered}\nabla^2\theta'=\beta\nabla^2\theta-3\alpha\beta\nabla^2 t-\frac{\beta^2\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t-3\alpha\beta\nabla^2 t;\\ \nabla^2\theta'=-\frac{4\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t.\end{gathered} \qquad (6d)$$

Из (2) находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\lambda+\mu}{\mu\beta}\left[X_x-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(Y_y+Z_z)\right]+\alpha t=-\frac{-\lambda}{2\mu\beta}\theta'+\frac{X_x}{2\mu}-\alpha t. \qquad (6e)$$

Подставим в (6a) выражение (6c) и (6e), а затем (6d); после алгебраических преобразований получаем:

$$\nabla^2 X_x+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2}+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t+2\mu\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=0. \qquad (6)$$

Аналогично еще 2 уравнения:

$$\nabla^2 Y_y+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial y^2}+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t+2\mu\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0,$$

$$\nabla^2 Z_z+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t+2\mu\alpha\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0.$$

Теперь продифференцируем первое уравнение (4) по y, второе по x и сложим:

$$2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2\alpha\beta\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}. \qquad (7a)$$

Но так как

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=Y_x,$$

а

$$\theta=\frac{\theta'}{\beta}+3\alpha t, \qquad (6c)$$

то уравнение (7a) преобразовывается к

$$\nabla^2 Y_x+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x\,\partial y}+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}=0;$$

по аналогии еще два уравнения

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 Y_z+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial y\,\partial z}+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z}=0,\\ \nabla^2 X_z+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x\,\partial z}+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) и называют уравнениями Бельтрами (без тепловых членов). Кроме трех уравнений равновесия, составляющие напряжения должны удовлетворять еще этим шести уравнениям.

4. Уравнения в плоской задаче

Вид деформации называют плоской, если выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0;\quad u=u(x,y);\quad v=v(x,y).$$

Допустим, что такое состояние будет вызвано температурой, которая зависит только от x и y. Тогда, как вытекает из (3), X_x, Y_y, X_y — функции только от x и y; $X_z=Y_z=0$, а

$$Z_z=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(Y_y+X_x)-\frac{\alpha\mu\beta}{\lambda+\mu}t.\tag{8a}$$

Следовательно третье уравнения равновесия (1) удовлетворяется тождественно, а два первых будут иметь такой вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Уравнения (4), (5) и (6) остаются справедливыми и для плоской деформации, лишь надо иметь в виду введенные нами предложения, в силу которых θ становится равным $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$, а последние уравнения (4) и (6) удовлетворяются тождественно.

Второе и третье уравнения (7) также превращаются в тождество. Из шести уравнений Бельтрами остаются только три:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 X_x+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2}+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=0,\\ \nabla^2 Y_y+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial y^2}+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0,\\ \nabla^2 Y_x+\frac{2(\lambda+\mu)}{\beta}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x\,\partial y}+2\alpha\mu\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{9a}$$

Но из (8a)

$$Z_z=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(Y_y+X_x)-\frac{\alpha\mu\beta}{\lambda+\mu}t,$$

и следовательно

$$\theta'=X_x+Y_y+Z_z=\frac{\beta}{(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y)-\frac{\alpha\mu\beta}{\lambda+\mu}t.$$

Подставляя выражение θ' в (.а), найдем:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 X_x+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_x+Y_y)+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t=0,\\ \nabla^2 Y_y+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(Y_y+X_x)+\frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu}\nabla^2 t=0,\\ \nabla^2 Y_x+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(X_x+Y_y)=0.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

В силу уравнений равновесия (8) третье (9) удовлетворяется тождественно, а сложив между собой первые два (9), придем к одному уравнению:[1]

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) + \frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda + 2\mu} \nabla^2 t = 0. \tag{10}$$

5. Решение плоской тепловой задачи с помощью функции Airy

Решение плоской задачи при отсутствии объемных сил сводится к определению бигармонической функции (Airy), связанной с напряжениями следующими равенствами:

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} \tag{11}$$

и кроме того к удовлетворению условий на поверхности.

В случае тепловых напряжений оказывается можно найти функцию, аналогичную функии Airy. Выберем место U другую функцию вида $U_1 - T_1$ и допустим, что

$$X_x = \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial x \, \partial y}; \tag{12}$$

при этом уравнения (8) удовлетворяются тождественно. Подставим выражения (12) в (10).

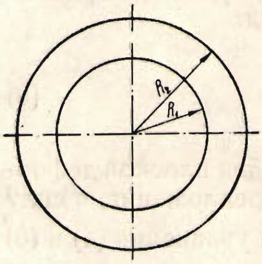

Рис. 1.

Получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 (U_1 - T_1) + \frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda + 2\mu} \nabla^2 t = 0,$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 U_1 - \nabla^2 \nabla^3 T_1 + \frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda + 2\mu} \nabla^2 t = 0.$$

Следовательно, если

$$\nabla^2 T_1 = \frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda + 2\mu} t = t_1,$$

то U_1 должна быть бигармонической функцией. Таким образом задача приводится к определению бигармонической функции U_1 и функции T_1 из уравнения Пуассона.

Рассмотрим конкретный случай (рис. 1).

Пусть трубка с радиусами R_1 и R_2 имеет неравномерно распределенную температуру, зависящую только от радиуса r:

$$t = t(r).$$

---

[1] Вывод уравнения (10) не обладает полнейшей строгостью. Именно из выводов не следует достаточность уравнения (10). Нельзя сказать с уверенностью, что при удовлетворении уравнения (10) будут выполнены условия (9). Это обстоятельство устраняется, если исходить из представления перемещений в виде криволинейного интеграла. Тогда независимость этого интеграла от пути интегрирования выражается уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \, \partial y}.$$

Выразив входящие сюда перемещения через напряжения и приняв во внимание уравнение (8), получим уравнение (10).

Для подробного ознакомления с данным способом см. Н. И. Мусхелишвили. Основные задачи теории упругости (стр. 42, § 15).

Тогда из симметрии $\overline{r\theta}=0$; $\overline{rr}$ и $\overline{\theta\theta}$ не зависят от угла θ. Очевидно, что и $U_1 - T_1$ не зависит от угла θ. Поэтому на основании (12) и их вида в полярных координатах

$$\left.\begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(U_1 - T_1)}{\partial r}, \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{\partial^2(U_1 - T_1)}{\partial r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Но

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} = t_1(r).$$

Отсюда

$$T_1 = \int_0^r \frac{dr}{r}\int_0^r rt_1 dr + c_1 \lg r + c_2, \tag{14a}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. U_1 необходимо взять в форме

$$U_1 = c_3 \lg r + c_4 r^2. \tag{14b}$$

Имея в виду (14a) и (14b), получаем из (13):

$$\left.\begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{c_3 - c_1}{r^2} + 2c_4 - \frac{1}{r^2}\int_0^r rt_1 dr, \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{c_3 - c_1}{r^2} + 2c_4 - \frac{1}{r^2}\int_0^r rt_1 dr; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$c_3 - c_1$ и C_4 определяются из условий на контуре при

$$r = \frac{R_1}{R_2}, \quad \overline{rr} = 0.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_3 - c_1}{R_1^2} + 2c_4 - \frac{1}{R_1^2}\int_0^{R_1} rt_1 dr = 0. \\ \frac{c_3 - c_1}{R_2^2} + 2c_4 - \frac{1}{R_2^2}\int_0^{R_2} rt_1 dr = 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Отсюда находим:

$$c_4 = \frac{\int_0^{R_2} rt_1 dr - \int_0^{R_1} rt_1 dr}{2(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} rt_1 dr}{2(R_2^2 - R_1^2)}, \tag{16}$$

$$c_3 - c_1 = \frac{R_2^2\int_0^{R_1} rt_1 dr - k_1^2\int_0^{R_2} rt_1 dr}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Подставляя (16) в (14), найдем:

$$\left.\begin{aligned}\overline{rr}&=\frac{R_2^2\left(\int\limits_0^{R_1} rt_1dr-\int\limits_0^{r} rt_1dr\right)-R_1^2\left(\int\limits_0^{R_2} rt_1dr-\int\limits_0^{r} rt_1dr\right)}{(R_2^2-R_1^2)\,r^2}+\frac{\int\limits_{R_1}^{R_2} rt_1dr}{(R_2^2-R_1^2)},\\ \overline{\theta\theta}&=\frac{R_1^2\left(\int\limits_0^{R_2} rt_1dr-\int\limits_0^{r} rt_1dr\right)-R_2^2\left(\int\limits_0^{R_1} rt_1dr-\int\limits_0^{r} rt_1dt\right)}{(R_2^2-R_1^2)\,r^2}+\frac{\int\limits_{R_1}^{R_2} rt_1dr}{R_2^2-R_1^2}-t_1.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Для случая установившейся температуры, как легко проверить, получаются уже известные формулы Föppl.

Если положим $R_1=0$, то получим напряжения в неравномерно-нагретом сплошном цилиндре. Когда $R_1=0$, то

$$\left.\begin{aligned}\overline{rr}&=-\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{r} rt_1dr+\frac{1}{R_2^2}\int\limits_0^{R_2} rt_1dr,\\ \overline{\theta\theta}&=\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{r} rt_1dr+\frac{1}{R_2^2}\int\limits_0^{R_2} rt_1dr-t_1.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Положив $R_2\to\infty$, придем к случаю плоскости с отверстием радиуса R_1 с симметричным распределением температуры относительно центра этого отверстия. Из формул (17) следует при $R_2=\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\overline{rr}&=\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{R_1} rt_1dr-\frac{1}{r^2}\int\limits_{R_1}^{r} rt_1dr,\\ \overline{\theta\theta}&=-\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{R_1} rt_1dr+\frac{1}{r^2}\int\limits_{R_1}^{r} rt_1dr-t_1.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Формулы (19) остаются справедливыми конечно только тогда, когда $t_1\to 0$ при $R_2\to\infty$.

6. Решение задачи с помощью теории функций комплексного переменного

Теория функций комплексного переменного заняла прочное место в теории упругости. К настоящему времени этот метод является наиболее общим и наиболее могущественным в применении к плоской задаче. С его помощью решаются довольно сложные в смысле нагрузки и в смысле контуров задачи. Поэтому крайне важно попытаться применить этот метод и к тепловой плоской задаче. Это можно сделать добавлением некоторых тепловых членов к общим формулам, которые указаны Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили.

Как уже было замечено [формула (12)], напряжения выражаются через функцию Airy по формулам:

$$X_x=\frac{\partial^2(U_1-T_1)}{\partial y^2};\quad Y_y=\frac{\partial^2(U_1-T_1)}{\partial x^2};\quad X_y=-\frac{\partial^2(U_1-T_1)}{\partial x\,\partial y},\tag{12}$$

где $\nabla^2\nabla^2 U_1=0,\quad \nabla^2 T_1=t_1.$

Поэтому

$$U_1 = R\left(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right),$$

где R означает вещественную часть, или

$$2U_1 = z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \tag{20}$$

Сложим два первых уравнения (12). Тогда найдем:

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial z\, \partial \bar{z}},$$

где

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}},$$

или

$$X_x + Y_y = 4\frac{\partial^2 U_1}{\partial z\, \partial \bar{z}} - \nabla^2 T_1 = Y\frac{\partial^2 U_1}{\partial z\, \partial \bar{z}} - t_1,$$

а имея в виду (15), найдем

$$X_x + Y_y = 2\left(\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \varphi'(z)\right) - t_1. \tag{21}$$

Опять из уравнений (12) находим:

$$Y_y - X_x + 2X_y i = \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{dy^2} - 2i\frac{\partial^2 (U_1 - T_1)}{\partial x\, \partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{\partial U_1}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\, \partial y} - \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 T_1}{\partial x\, \partial y}\right).$$

Но

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right); \quad 2i\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right).$$

Поэтому

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 4\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 T_1}{\partial x\, \partial y}\right).$$

или

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) - \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 T_1}{\partial x\, \partial y}\right). \tag{22}$$

Уравнения (16) и (17) и определяют напряженное состояние. Нужно функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ подобрать так, чтобы были удовлетворены контурные условия. Формулу (22) можно несколько преобразовать, если t_1 является функцией аналитической от z и $\bar{z}$.

Тогда

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) - \frac{4\partial^2 T_1}{\partial z^2} =$$

$$= 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) - 4\int \frac{\partial^3 T_1}{\partial z\, \partial z\, \partial \bar{z}} d\bar{z};$$

отсюда

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\left(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)\right) - \int \frac{\partial t_1}{\partial z} d\bar{z}. \tag{23}$$

Выражение для перемещений выводить не будем, а приведем лишь окончательные результаты:

$$2\mu(u + iv) = \frac{1}{2}\int t_1 dz + k\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}),$$

где

$$k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \tag{24}$$

Вывод совершенно аналогичен тому, который указан Г. В. Колосовым в его работе.[1]

ÜBER DIE WÄRMESPANNUNGEN IN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Von *N. Lebedew* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Es werden die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie mit Berücksichtigung der Wärmeglieder aufgestellt. Im Falle des ebenen Problems werden die Wärmespannungen mittels einer Funktion, die der Airy'schen Funktion analog ist, bestimmt. Diese Funktion besteht aus einen biharmonischen Teile, dem eine Lösung T_1 der Poisson'schen Gleichung $\nabla^2 T_1 = \frac{2\mu\beta\alpha}{\lambda+2\mu} t$ (t — Temperatur) zuzufügen ist. Am Ende des Aufsatzes wird die Lösung des ebenen Problems auf die Bestimmung zweier Funktionen der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ zurückgeführt, indem die bekannten Kolossow'schen Formeln auf den Fall der Wärmespannungen verallgemeinert werden.

[1] Г. В. Колосов. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. 1909 г.