ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОСЬЮ

Проф. *А. Ш. Локшин* (*Днепропетровск*)

§ 1

В настоящей работе рассматривается устойчивость стержня постоянного и переменного сечения с криволинейной осью. [1] Мы будем исходить из общих уравнений равновесия: [2]

$$\frac{dN}{ds}+Tk+X=0, \quad \frac{dT}{ds}-Nk+Z=0, \quad \frac{dM}{ds}+N=0, \tag{1}$$

где N — поперечная сила, T — осевая сила, M — изгибающий момент, k — кривизна оси. Приращение кривизны и изгибающий момент связаны формулой:

$$M=B(k-k_0) \tag{2}$$

Введем в уравнения (1) ρ и θ и заменим $k-k_0$. После этого получаем:

$$\frac{dN}{d\theta}+T\left(1+\rho_0\frac{M}{B}\right)+\rho_0 X=0; \frac{dT}{d\theta}-N\left(1+\rho_0\frac{M}{B}\right)+\rho_0 Z=0_1;$$
$$\frac{dM}{d\theta}+\rho_0 N=0. \tag{2}$$

Пусть
$$\frac{d}{d\theta}(\rho_0 X)-\rho_0 Z=0.$$

Тогда для нахождения критического значения нагрузки получим из (2) следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{dM}{d\theta}+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\rho_0^2 XM}{B}\right)=0. \tag{3}$$

Обозначим перемещения в направлении осей x и z через u и w, изменение кривизны $k-k_0=\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{d\theta}\frac{w+\frac{du}{d\theta}}{\rho_0}$. Кроме того, введем условие отсутствия удлинения оси $\frac{dw}{d\theta}-u=0$. При этом

$$M=\frac{B}{\rho_0}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+w\right). \tag{4}$$

[1] Продольный изгиб стержня с криволинейной осью рассматривался следующими авторами: С. П. Тимошенко, Теория упругости, часть II, стр. 165, 1916; R. Mayer, Die Knickfestigkeit, стр. 136; E. L. Nicolai, Zt. für angewandte Math. und Mech. 1923 г.; E. Chwalla, Sitzungsberichte, Wien, 136, 645—678, 1927; M. Mesnager, Genie Civil, 1929, стр. 13; Pigeau, Genie Civil, 1929, №№ 19—20; И. Штаерман, Вісті Київського Політех. Ін-ту 1929 г., книга 1, стр. 25; A. Lokchine, Comptes rendus 1932, Philosoph. Mag. vol. XIV, p. 520; Ак. А. Н. Динник, Вестник инженеров и техников 1933 г.

[2] A. E. Love. A treatise on the mathematical theory of Elasticity, 1927, стр. 397.

В частном случае при $\rho_0 = a$ (a — постоянная величина) получаем

$$M = \frac{B}{a^2}\left(\frac{d^3w}{d\theta^3} + \frac{dw}{d\theta}\right), \quad \text{или} \quad M = \frac{B}{a^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right). \tag{5}$$

Последнею формулой и пользуются при изгибе стержня с круговою осью. Перейдем к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3) и (4). Интегрируя один раз, получаем из (4):

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = \rho_0 \int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\, d\theta + c\rho_0. \tag{6}$$

Общий интеграл уравнения (6) имеет вид:

$$w = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + \left\{\sin\theta \int_0^\theta \rho_0\cos\theta\, d\theta \int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\, d\theta - \cos\theta \int_0^\theta \rho_0\sin\theta\, d\theta \int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\, d\theta\right\} +$$
$$+ c\left(\sin\theta \int_0^\theta \rho_0\cos\theta\, d\theta - \cos\theta \int_0^\theta \rho_0\sin\theta\, d\theta\right).$$

При интегрировании появились три постоянных, после интегрирования дифференциального уравнения (3) возникают еще три постоянных. Таким образом для определения постоянных необходимо шесть пограничных условий. Если концы стержня не могут перемещаться, но свободно вращаются, то пограничные условия имеют вид:

$$\theta = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad M = 0,$$

при

$$\theta = \gamma, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad M = 0.$$

Принимая во внимание четыре из этих условий, получаем $c_1 = c_2 = 0$ и

$$\frac{\int_0^\gamma \rho_0 \sin\theta\, d\theta \int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\, d\theta}{\int_0^\gamma \rho_0 \cos\theta\, d\theta \int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\, d\theta} = \frac{\int_0^\gamma \rho_0 \sin\theta\, d\theta}{\int_0^\gamma \rho_0 \cos\theta\, d\theta}. \tag{7}$$

Следовательно для случая арки, концы которой могут свободно вращаться, приходится интегрировать дифференциальное уравнение (3) с такими условиями:

$$\theta = 0, \quad M = 0,$$

при

$$\theta = \gamma, \quad M = 0$$

и должно быть соблюдено уравнение (7). Таким образом мы имеем три уравнения для определения постоянных интегрирования уравнения (3). Перейдем к стержню с заделанными концами, где

$$\theta = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w}{d\theta^2} = 0,$$

при

$$\theta = \gamma, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2w}{d\theta^2} = 0.$$

Для этого случая

$$\int_0^\gamma \frac{\rho_0 M}{B}\,d\theta=0,\ \int_0^\gamma \rho_0\cos\theta\,d\theta\int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\,d\theta=0,\ \int_0^\gamma \rho_0\sin\theta\,d\theta\int_0^\theta \frac{\rho_0 M}{B}\,d\theta=0, \tag{8}$$

Если стержень постоянного сечения, то $B=\mathrm{const}$, и мы имеем для определения постоянных уравнения:

$$\int_0^\gamma \rho_0 M\,d\theta=0,\ \int_0^\gamma \rho_0\cos\theta d\theta\int_0^\theta \rho_0 M\,d\theta=0,\ \int_0^\gamma \rho_0\sin\theta\,d\theta\int_0^\theta \rho_0 M\,d\theta. \tag{9}$$

При рассмотрении симметричной арки целесообразно ввести переменную $\xi=\theta-\alpha$, где $\alpha=\frac{\gamma}{2}$, γ — угол между нормалями к оси, проведенными в концах арки.

§ 2. Круговая арка

Арка имеет ось симметрии. Введем $\xi=\theta-\alpha$. При нагрузке равномерно распределенной и нормальной к оси $X=p$, p — интенсивность нагрузки. Дифференциальное уравнение для M принимает вид:

$$\frac{1}{a^3}\left(\frac{d}{d\zeta^2}+1\right)\frac{dM}{d\zeta}+p\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{B}\right)=0. \tag{10}$$

Сначала рассмотрим арку с опертыми концами, где условия таковы:

$$M(\alpha)=M(-\alpha)=0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M(\cos\zeta-\cos\alpha)}{B}\,d\zeta=0. \tag{11}$$

Для нахождения нечетной функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (10) и третьему из условий (11), принимаем: при

$$\zeta=0,\quad M=0,\quad \frac{d^2M}{d\zeta^2}=0. \tag{12}$$

Интегрируя один раз в дифференциальном уравнении (10), получаем:

$$\frac{1}{a^3}\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)M+p\frac{M}{B}=c.$$

В силу условий (12) $c=0$. Таким образом мы имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{B}{a^3}\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)M+pM=0 \tag{13}$$

с пограничными условиями $M(0)=M(\alpha)=0$. Если концы зажаты, то условия для M принимают вид:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\,d\zeta=0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\cos\zeta\,d\zeta=0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\sin\zeta\,d\zeta=0. \tag{14}$$

Принимая условия (12), мы удовлетворяем первым двум из этих условий. Следовательно, здесь приходится интегрировать дифференциальное уравнение (13) при условиях:

$$M(0)=0,\ \int_0^{\alpha}\frac{M}{B}\sin\zeta\,d\zeta=0.$$

Для арки постоянного сечения имеем

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)\frac{dM}{d\zeta}+\frac{pa^3}{B}\frac{dM}{d\zeta}=0. \tag{15}$$

$$M(\alpha)=M(-\alpha)=0, \qquad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}(\cos\zeta-\cos\alpha)\,M\,d\zeta=0. \tag{16}$$

Мы удовлетворяем всем трем условиям (1), принимая

$$M=A\sin\frac{\pi\zeta}{\alpha}.$$

Внеся это выражение в дифференциальное уравнение (15), получаем

$$p_{\text{кр}}=\frac{B}{a^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right).$$

Если концы зажаты, то условия (14) принимают вид:

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}M\,d\zeta=0, \quad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}M\cos\zeta\,d\zeta=0, \quad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}M\sin\zeta\,d\zeta=0. \tag{17}$$

Пусть $M=A\sin m_1\xi$. Тогда из уравнения (15) получаем

$$p_{\text{кр}}=\frac{B\,(m_1^2-1)}{a^3}.$$

Первые два условия удовлетворяются при любом m_1 из третьего условия находим для определения m_1 следующее уравнение:[1]

$$m_1\alpha\operatorname{ctg}m_1\alpha=\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$$

§ 3. Параболическая арка постоянного сечения

Параболическая арка постоянного сечения несет равномерно распределенную по пролету нагрузку интенсивности p, которая параллельна оси симметрии. В данном случае

$$B=\text{const},$$

$$X=p\cos^2\zeta, \quad \rho=\frac{a}{\cos^3\zeta},$$

где a — радиус кривизны при $\zeta=0$. Внеся эти выражения в дифференциальное уравнение (3), получаем:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)\cos^3\zeta\frac{dM}{d\zeta}+\frac{pa^3}{B}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos^4\zeta}\right)=0. \tag{18}$$

Это дифференциальное уравнение надо интегрировать при условиях:

$$M(\alpha)=M(-\alpha)=0, \quad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\zeta}\right)\frac{M}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=0. \tag{19}$$

Для нахождения нечетной функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (18) и уравнениям (19), принимаем такие усло-

[1] Это уравнение было получено Е. Л. Николаи.

вия: при

$$\zeta=0, \quad M=0, \quad \frac{d^2M}{d\zeta^2}=0;$$

при $\zeta=\alpha$, $M=0$. Положим

$$\cos^3\zeta\frac{dM}{d\zeta}=W$$

и интегрируем систему дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)W+\frac{m}{\cos^5\zeta}\left(\frac{M}{\cos^2\zeta}+4M\sin\zeta\right)=0, \quad \frac{dM}{d\zeta}=\frac{W}{\cos^3\zeta} \tag{20}$$

при начальных условиях: когда

$$\zeta=0, \quad W=1, \quad M=0, \quad \frac{dW}{d\zeta}=0; \tag{21}$$

$$m=\frac{pa^3}{B}.$$

Применяя метод Штэрмера — Адамса, имеем:

$$\Delta^2 W_{n-1}=\xi_n+\frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2}+\Delta^3\xi_{n-3}+\Delta^4\xi_{n-4}-\frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right],$$

$$\Delta M_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta\eta^3_{n-3},$$

где

$$\xi=-h^2\left[W+\frac{m}{\cos^5\zeta}\left(\frac{W}{\cos^2\zeta}+4M\sin\zeta\right)\right],$$

а

$$\eta=h\frac{W}{\cos^3\zeta}.$$

При критическом значении m, $M(\alpha)=0$. Для некоторых значений $\frac{h_1}{l}$ (h_1 — стрела арки, а l — половина пролета арки) были произведены вычисления.[1]

Полученные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{h_1}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	55,55	11,10	3,36	1,34	0,60

Обозначим $\frac{pl^3}{B}$ через K. Соответствующие значения K даны в табл. 2.

Таблица 2

$\frac{h_2}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
K	3,56	5,68	5,81	5,49	4,80

[1] В вычислениях принимали участие Л. Афендик, А. Гальченко, Л. Гольдштейн, В. Бовин, А. Маленкин, В. Иванов, Е. Широченко, Г. Скуратов.

Если концы арки зажаты, то необходимо удовлетворить условиям:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^3 \zeta} d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^5 \zeta} d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M \sin \zeta}{\cos^4 \zeta} d\zeta = 0. \tag{22}$$

Для нахождения нечетной функции, удовлетворяющей первым двум из условий (22), интегрируем дифференциальное уравнение (20) при таких начальных условиях:

$$\zeta = 0, \quad M = 0, \quad \frac{dM}{d\zeta} = 1, \quad \frac{d^2M}{d\zeta^2} = 0. \tag{23}$$

Таким образом и в данном случае приходится интегрировать систему (20) при начальных условиях (21). Критическое значение m найдется из условия

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M \sin \zeta}{\cos^4 \zeta} d\zeta = 0. \tag{24}$$

§ 4. Параболическая арка переменного сечения

Нагрузка равномерно распределена по пролету и параллельна оси симметрии. Жесткость изменяется по закону

$$B = \frac{B_0}{\cos^3 \zeta}.$$

Внеся это выражение в дифференциальное уравнение (3), мы получаем:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) \cos^3 \zeta \frac{dM}{d\zeta} + \frac{pa^3}{B_0} \cdot \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos \zeta}\right) = 0. \tag{25}$$

Если концы арки могут свободно поворачиваться, то условия для M принимают вид:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \zeta} d\zeta = 0. \tag{26}$$

Для нахождения нечетной функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению и условиям, поступаем аналогично предыдущему. Здесь приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) W + \frac{m}{\cos^2 \zeta}\left(\frac{W}{\cos^2 \zeta} + M \sin \zeta\right) = 0, \quad \frac{dM}{d\zeta} = \frac{W}{\cos^3 \zeta}, \text{ где } m = \frac{Pa^3}{B_0},$$

при начальных условиях (21). Применяем и здесь метод Штэрмера — Адамса. Результаты вычислений приведены в табл. 3

Таблица 3

$\frac{h_1}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	60,00	14,62	5,87	3,08	1,84
K_1	3,84	7,48	10,14	12,62	14,72

Мы обозначаем $\frac{pl^3}{B_0}$ через K_1

При зажатых концах необходимо удовлетворить условиям

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} M\,d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{tg}\zeta \cdot M\,d\zeta = 0. \tag{27}$$

И в этом случае приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений при начальных условиях (21). Критическое значение найдется из условия

$$\int_{0}^{\alpha} M \operatorname{tg}\zeta\,d\zeta = 0, \tag{28}$$

§ 5. Арка постоянного сечения, ось имеет форму катеноиды

Нагрузка, параллельная оси симметрии, равномерно распределена по оси арки. Интенсивность ее равна p. Принимая во внимание, что $X = p\cos\zeta$, а $\rho = \frac{a}{\cos^2\zeta}$, где a — радиус кривизны при $\zeta = 0$, получим после внесения в дифференциальное уравнение (3):

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right)\cos^2\zeta\,\frac{dM}{d\zeta} + m\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos^3\zeta}\right) = 0. \tag{29}$$

Для арки, концы которой могут поворачиваться, имеем для M такие условия:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\zeta}\right)\frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0. \tag{30}$$

Обозначим $\cos^2\zeta\,\frac{dM}{d\zeta}$ через W. Мы получим систему

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right)W + \frac{m}{\cos^4\zeta}\left[\frac{W}{\cos\zeta} + 3M\sin\zeta\right] = 0, \quad \frac{dM}{d\zeta} = \frac{W}{\cos^2\zeta}. \tag{31}$$

Эту систему мы и интегрируем по методу Штэрмера — Адамса при начальных условиях (21). Вычисленные значения приведены в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{h_1}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	57,72	12,14	4,06	1,74	0,81
K	3,55	5,38	5,24	4,48	3,42

Перейдем к арке с зажатыми концами. Условия для M таковы:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0, \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^3\zeta}\,d\zeta = 0, \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}} \cdot \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0. \tag{32}$$

Аналогично предыдущему, интегрируя систему (31) при начальных условиях (21), мы удовлетворяем первым двум условиям (32). Для нахождения критического значения имеем:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}} \cdot \frac{M}{\cos^2\zeta}\, d\zeta = 0. \tag{33}$$

§ 6. Арка переменного сечения, ось имеет форму катеноиды

Жесткость поперечного сечения изменяется по закону $B = \frac{B_0}{\cos^3\zeta}$, где B_0 — жесткость при $\zeta = 0$. Нагрузка и здесь параллельна оси симметрии и равномерно распределена по оси арки. Концы арки могут свободно поворачиваться. Для данного случая приходится интегрировать дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)\cos^2\zeta \frac{dM}{d\zeta} + m\frac{dM}{d\zeta} = 0, \tag{34}$$

где $m = \frac{pa^3}{B_0}$ при условиях:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\cos\zeta}{\cos\alpha}-1\right)M\, d\zeta = 0. \tag{35}$$

Вводим переменную $W = \cos^2\zeta \frac{dM}{d\zeta}$. Тогда

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)W + \frac{m}{\cos^2\zeta}W = 0. \tag{36}$$

Мы интегрируем это дифференциальное уравнение при начальных условиях: при $\zeta = 0$, $W = 1$, $\frac{dW}{d\zeta} = 0$. По Штэрмеру

$$\Delta^2 W_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right],$$

где

$$\xi = -h^2\left(1+\frac{m}{\cos^2\zeta}\right)W.$$

Для определения критического значения m имеем условие $\int_0^{\alpha}\frac{W}{\cos^2\zeta}d\zeta = 0$. Результаты вычислений приведены в табл. 5

Таблица 5

$\frac{h_1}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	61,93	15,60	7,05	4,06	2,67
$K_1 = \frac{pl^3}{B_0}$	3,81	6,92	9,10	10,46	11,27

При зажатых концах M должно удовлетворять условиям:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} M\cos\zeta\, d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} M\, d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}\cdot M\cos\zeta\, d\zeta = 0. \tag{37}$$

Дифференциальное уравнение (36) может быть приведено к уравнению, которое интегрируется в гипергеометрических рядах. Пусть $\cos\theta = s$. Тогда

$$(1-s^2)\frac{d^2W}{ds^2} - s\frac{dW}{ds} + \left(1+\frac{m}{s^2}\right)W = 0. \tag{38}$$

ÜBER DIE STABILITAT EINES VON HAUSE AUS KRUMMEN STABES

Von *A. Lockschin* (*Dniepropetrowsk*)

Zusammenfassung

Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für den Knickungsvorgang eines von Hause aus krummen Stabes (§ 1) werden folgende Sonderfälle untersucht: Kreisbogen konstanten Querschnitts unter gleichmässig über den Bogen verteilter normaler Belastung (§ 2); Parabelbogen unter gleichmässig über die Spannweite verteilter vertikaler Belastung — Querschnitt konstant (§ 3), Querschnitt veränderlich, Biegungssteifigkeit $B = \frac{B_0}{\cos^3\zeta}$ (B_0 = konstante, ζ — Neigungswinkel des betreffenden Querschnitts zur Symmetrieachse des Bogens, § 4); Katenoidenbogen unter vertikaler gleichmässig über den Bogen verteilter Belastung — Querschnitt konstant (§ 5), Querschnitt veränderlich, Biegungssteifigkeit $B = \frac{B_0}{\cos^3\zeta}$ (§ 6). In allen obengenannten Fällen wird die Stabilität des Bogens bei gelenkig gelagerten bezw. eingespannten Enden untersucht.
