ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТОМ II 1934 № 1

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

Н. Е. Кочин (Ленинград)

§ 1. Введение

При расчете коленчатых валов необходимо знать критические скорости их, т. е. те угловые скорости вращения вала, при которых внешний крутящий момент вызовет вынужденные крутильные колебания большой амплитуды, так что получится явление резонанса. Если внешний крутящий момент есть сумма нескольких простых гармонических моментов, то резонанс получится тогда, когда период одного из этих гармонических моментов совпадает с периодом одного из типов свободных крутильных колебаний вала. Внешний крутящий момент, происходя например от давления газа на поршень цилиндра, зависит от скорости вращения вала: в двухтактном двигателе Дизеля периодом для внешнего момента является время одного оборота вала, в четырехтактном — время двух оборотов. Таким образом для определения критических скоростей нужно прежде всего знать периоды свободных крутильных колебаний валов.

Проще всего эти периоды определяются в том случае, когда имеем дело с всюду одинаковым валом, на который в разных местах насажены несколько дисков.[1] Задача в этом случае сводится к решению системы однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задача об определении крутильных колебаний коленчатых валов сводится в первом приближении к только что указанной задаче, если сделать ряд допущений. Одним из таких допущений является следующее. Вместо того, чтобы рассматривать инерцию движущихся масс, связанных с валом: кривошипа, шатуна, поршня, заменяют все эти массы эквивалентным диском, причем под последним понимают такой диск, кинетическая энергия которого равна средней кинетической энергии тех масс, которые он заменяет.

Целью настоящей работы является исследование допустимости

[1] См. например С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле, ГИЗ, 1931, стр. 139 — 160.

такой замены и по возможности точный учет влияния инерции движущихся масс на критические скорости коленчатых валов.

E. Trefftz[1] составил, делая некоторые допущения, систему дифференциальных уравнений, к исследованию которой приводится задача. F. Kluge и T. E. Schunk[2] разобрали некоторые способы исследования этой системы.

В нашей работе мы применяем полученные Trefftz'ем уравнения для исследования критических скоростей вала одноцилиндровой машины, несущего на себе маховик, масса которого весьма велика, так что вращение его можно считать равномерным.

В дальнейшем мы разбираем общий случай крутильных колебаний вала многоцилиндрового двигателя.

§ 2. Составление уравнений крутильных колебаний вала

Рассмотрим коленчатый вал (например авиационного мотора или гребного винта). Для определенности предположим например, что на переднем конце этот вал несет пропеллер, момент инерции которого относительно оси вала обозначим через θ_0, и что вал имеет m колен, каждому из которых отвечает свой цилиндр мотора (при других предположениях все дальнейшие рассуждения по существу не изменятся; так, например, если вал имеет маховик, то надо заменить величины; относящиеся к тому колену, на месте которого находится маховик, соответствующими величинами для маховика).

Обозначим через θ_ν момент инерции вращающихся частей, связанных неподвижно с ν-ым коленом вала ($\nu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 0$ относится к пропеллеру), через ρ_ν — радиус кривошипа, через m_ν — массу шатуна и поршня. Введем далее в рассмотрение следующие углы, отсчитываемые в направлении вращения вала от вертикали вверх; φ_ν — угол поворота ν-го кривошипа, γ_ν — угол поворота его в состоянии покоя, причем можно считать $\gamma_0 = 0$.

Если бы упругих деформаций не было и скорость вращения была бы ω, то к моменту t углы поворота были бы

$$\bar{\varphi}_0 = \omega t, \ \bar{\varphi}_\nu = \omega t + \gamma_\nu.$$

Обозначим через $\psi_\nu = \varphi_\nu - \bar{\varphi}_\nu$ смещение ν-го кривошипа в силу деформации; тогда $\psi_{\nu+1} - \psi_\nu$ будет смещение $\nu + 1$-го кривошипа относительно ν-го, это приведет к тому, что на ν-ый кривошип будет действовать крутящий момент $c_{\nu,\nu+1}(\psi_{\nu+1} - \psi_\nu)$, где $c_{\nu,\nu+1}$ есть коэффициент жесткости участка вала между ν и $\nu + 1$-ым кривошипом; на $\nu + 1$-ый же кривошип будет действовать такой же крутящий момент,

---

[1] E. Trefftz. Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), Berlin 1930, S. 214—219.

[2] F. Kluge. Zur Ermittlung kritischer Drehzahlen von Kurbelwellen, Ingenieur-Archiv II Bd., 1931, S. 119—139.

T. E. Schunk. Berechnung der kritischen Umlaufzahlen für die Welle eines Flugzeugmotors. Ingenieur-Archiv, II Bd., 1932, S. 591—603.

См. еще G. R. Goldsbrough. Torsional vibrations in reciprocating engine shafts. Proceed. of the R. Soc. of London, Ser. A., vol. 109, 1925, p. 99—119.

G. R. Goldsbrough. The properties of torsional vibrations in reciprocating engine shafts, Part I, Proceed. of the R. Soc. of London. Ser. A., vol. 113, 1927, p. 259—271.

но направленный в противоположную сторону: $c_{\nu,\nu+1}(\psi_\nu-\psi_{\nu+1})$. Поэтому потенциальная энергия упругих деформаций будет

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{m-1}c_{\nu,\nu+1}(\psi_{\nu+1}-\psi_\nu)^2=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{m-1}c_{\nu,\nu+1}(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu-\gamma_{\nu+1}+\gamma_\nu)^2.$$

Обозначим далее кинетическую энергию ν-го кривошипа и связанных с ним шатуна и поршня через

$$K_\nu=\frac{1}{2}k_\nu(\varphi_\nu)\dot{\varphi}_\nu^2.$$

Функцию $k_\nu(\varphi_\nu)$ легко вычислить, если известны размеры и распределение масс кривошипа, шатуна и поршня. Так например, если длину шатуна можно считать „бесконечно-большой" в сравнении с длиной кривошипа, то будет

$$k_\nu(\varphi_\nu)=\theta_\nu+m_\nu\rho_\nu^2\sin^2\varphi_\nu. \tag{1}$$

Полная кинетическая энергия всей системы будет

$$K=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{m}k_\nu(\varphi_\nu)\dot{\varphi}_\nu^2.$$

Если внешний крутящий момент, действующий на ν-ом колене, обозначить через $M_\nu(\varphi_\nu)$ (так что например M_0 есть полезная пара сопротивления, считаемая постоянной величиной), то потенциалом внешних сил будет

$$\Pi_2=-\sum_{\nu=0}^{m}\int M_\nu(\varphi_\nu)\,d\varphi_\nu.$$

Составляя дифференциальные уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{\partial\dot{\varphi}_\nu}\right)-\frac{\partial K}{\partial\varphi_\nu}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_\nu},\qquad(\nu=0,1,\ldots,m)$$

приходим к системе

$$k_\nu(\varphi_\nu)\ddot{\varphi}_\nu+\frac{1}{2}\frac{dk_\nu(\varphi_\nu)}{d\varphi_\nu}\dot{\varphi}_\nu^2=c_{\nu-1,\nu}(\psi_{\nu-1}-\psi_\nu)-c_{\nu,\nu+1}(\psi_\nu-\psi_{\nu+1})+M_\nu(\varphi_\nu),$$
$$(\nu=0,1,\ldots,m) \tag{2}$$

причем конечно считается $c_{-1,0}=c_{m,m+1}=0$. Крутящие моменты $M_\nu(\varphi_\nu)$ являются периодическими функциями от φ_ν, причем для двухтактного двигателя периодом является 2π, а для четырехтактного — 4π (так как рабочий процесс в цилиндре восстанавливается только после двух оборотов вала).

§ 3. Упрощение дифференциальных уравнений

Сделав допущение о малости деформаций ψ_ν, можно, как показал E. Trefftz, упростить полученные дифференциальные уравнения.

С этой целью введем новые переменные:

$$q_\nu=\int_{\bar{\varphi}_\nu}^{\varphi_\nu}\sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}\,d\varphi_\nu, \tag{3}$$

тогда, как легко вычислить, будет

$$\ddot{q}_\nu = \sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}\,\ddot{\varphi}_\nu + \frac{k_\nu'(\varphi_\nu)}{2\sqrt{k_\nu(\varphi)}}\dot{\varphi}_\nu^2 - \frac{k_\nu'(\varphi_\nu)}{2\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}\omega^2.$$

Поэтому система (2) упрощается

$$\ddot{q}_\nu - \frac{1}{\sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}}\{c_{\nu-1,\,\nu}\psi_{\nu-1} - (c_{\nu-1,\,\nu} + c_{\nu,\,\nu+1})\psi_\nu + c_{\nu,\,\nu+1}\psi_{\nu+1}\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}} M_\nu(\varphi_\nu) - \frac{k_\nu'(\bar{\varphi}_\nu)}{2\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}\omega^2. \tag{4}$$

Но при малости ψ_ν можно считать, что

$$q_\nu = (\varphi_\nu - \bar{\varphi}_\nu)\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)} = \psi_\nu \sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)};$$

далее, пренебрегая квадратами величин ψ_ν и произведениями $\psi_{\nu-1}\psi_\nu$, можем заменить коэффициент при фигурных скобках в левой части уравнения (4) через $\dfrac{1}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}$.

Наконец мы имеем приближенное равенство

$$\frac{M_\nu(\varphi_\nu)}{\sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}} = \frac{M_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}} + \frac{q_\nu}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}\frac{d}{d\varphi_\nu}\frac{M_\nu(\varphi_\nu)}{\sqrt{k_\nu(\varphi_\nu)}}.$$

Мы предположим для простоты, что последним членом можно пренебречь; тогда окончательная система будет иметь вид

$$\ddot{q}_\nu - \frac{1}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}\left\{\frac{c_{\nu-1,\,\nu}\,q_{\nu-1}}{\sqrt{k_{\nu-1}(\bar{\varphi}_{\nu-1})}} - \frac{(c_{\nu-1,\,\nu} + c_{\nu,\,\nu+1})\,q_\nu}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}} + \frac{c_{\nu,\,\nu+1}\,q_{\nu+1}}{\sqrt{k_{\nu+1}(\bar{\varphi}_{\nu+1})}}\right\} = P_\nu(\bar{\varphi}_\nu), \quad (5),$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, m)$$

где

$$P_\nu(\bar{\varphi}_\nu) = \frac{M_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}{\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}} - \frac{\omega^2 k_\nu'(\bar{\varphi}_\nu)}{2\sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)}}$$

есть периодическая функция от $\bar{\varphi}_\nu$, период которой равен 2π для двухтактного двигателя и 4π для четырехтактного.

Вводя для случая двухтактного двигателя подстановку

$$\tau = \omega t, \tag{6}$$

напишем однородную систему, соответствующую системе (5):

$$\frac{d^2 q_\nu}{d\tau^2} - \frac{1}{\omega^2\sqrt{k_\nu}}\left\{\frac{c_{\nu-1,\,\nu}\,q_{\nu-1}}{\sqrt{k_{\nu-1}}} - \frac{(c_{\nu-1,\,\nu} + c_{\nu,\,\nu+1})\,q_\nu}{\sqrt{k_\nu}} + \frac{c_{\nu,\,\nu+1}\,q_{\nu+1}}{\sqrt{k_{\nu+1}}}\right\} = 0. \tag{7}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, m)$$

Как указывает E. Trefftz, критическими скоростями будут те значения ω, для которых эта система имеет или периодические решения с периодом 2π, или же решения, амплитуда которых с течением времени возрастает. Наша задача состоит в определении этих критических скоростей и сравнении их с теми значениями, которые получаются при обычном расчете.

§ 4. Случай одноцилиндровой машины

Рассмотрим простейший случай. Пусть вал несет маховик весьма большого момента инерции и имеет только одно колено: в этом случае можем считать

$$q_0 = 0, \quad q_1 = q, \quad c_{0,1} = c, \quad k_1 = k(\tau),$$

а потому единственное уравнение системы (7) принимает вид:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{c}{\omega^2 k(\tau)} q = 0. \tag{8}$$

В случае, когда длина шатуна велика в сравнении с длиной кривошипа, мы имеем по формуле (1)

$$k(\tau) = \theta + m\rho^2 \sin^2 \tau = \theta + \frac{m\rho^2}{2} - \frac{m\rho^2}{2} \cos 2\tau. \tag{9}$$

Вводя обозначения

$$\frac{c}{\omega^2 \left(\theta + \frac{m\rho^2}{2}\right)} = \lambda^2, \qquad \frac{m\rho^2}{2\theta + m\rho^2} = \zeta, \tag{10}$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{\lambda^2}{1 - \zeta \cos 2\tau} q = 0, \tag{11}$$

причем надо отыскать те значения λ, при которых это уравнение имеет решения или периодические с периодом 2π, или решения с возрастающей амплитудой.

§ 5. Способ разложения по параметру

Для решения уравнения (11) можно применить способ разложения по параметру ζ, который всегда по условию (10) меньше 1.[1]

Мы имеем очевидное разложение:

$$\frac{1}{1 - \zeta \cos 2\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)^n \cos 2n\tau \right\}.$$

Введем поэтому вместо ζ новый параметр

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \frac{\zeta}{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}; \tag{12}$$

очевидно, что $\alpha < \zeta$ и что

$$\zeta = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \frac{c}{\omega^2 \theta} = \frac{\lambda^2}{1 - \zeta} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = \mu \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}, \tag{13}$$

где мы ввели вместо λ^2 новую величину μ:

$$\mu = \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lambda^2 \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}. \tag{14}$$

Будем искать решение $q(\tau)$ и искомое значение μ в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням α:

$$\left. \begin{aligned} q &= q_0 + \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 + \dots, \\ \mu &= \mu_0 + \alpha \mu_1 + \alpha^2 \mu_2 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

---

[1] См. применение этого способа к вопросу о колебаниях в спарниках ведущей системы электровозов у С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, стр. 96—110.

Уравнение (11) получает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{d^2 q_n}{d\tau^2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \alpha^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n \alpha^n\right)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos 2n\tau\right) = 0. \quad (16)$$

Отбирая коэффициенты при различных степенях α, получаем следующую систему уравнений (дифференцирование по τ обозначаем точкой):

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{q}_0 + \mu_0 q_0 = 0, \\ \ddot{q}_1 + \mu_0 q_1 + \mu_1 q_0 + 2\mu_0 q_0 \cos 2\tau = 0, \\ \ddot{q}_2 + \mu_0 q_2 + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_0 + 2(\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1)\cos 2\tau + 2\mu_0 q_0 \cos 4\tau = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (17)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что критические области, т. е. области тех значений λ, при которых уравнение (11) имеет решение с возрастающей амплитудой, лежат между теми значениями λ, при которых это уравнение имеет периодическое решение с периодом 2π.[1]

Итак, нам нужно отыскать те значения λ, при которых уравнение (11) имеет решение с периодом 2π.

Первое уравнение системы (17) дает

$$q_0 = A_0 \cos(\sqrt{\mu_0}\tau) + B_0 \sin \sqrt{\mu_0 \tau}.$$

Условие периодичности дает

$$\mu_0 = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$q_0 = A_0 \cos(n\tau) + B_0 \sin(n\tau).$$

Второе уравнение системы (17) дает теперь

$$\ddot{q}_1 + n^2 q_1 = -\mu_1 [A_0 \cos n\tau + B_0 \sin n\tau] - 2n^2 \cos 2\tau [A_0 \cos n\tau + B_0 \sin n\tau] =$$
$$= -\mu_1 [A_0 \cos n\tau + B_0 \sin n\tau] - n^2 A_0 [\cos(n+2)\tau + \cos(n-2)\tau] -$$
$$- n^2 B_0 [\sin(n+2)\tau + \sin(n-2)\tau]. \quad (18)$$

Если $n \neq 1$, то в решении этого уравнения появятся члены $\mu_1 \tau \cos n\tau$ или $\mu_1 \tau \sin n\tau$, и функция $q_1(\tau)$ будет периодической только при выполнении условия

$$\mu_1 = 0,$$

причем тогда

$$q_1(\tau) = A_1 \cos n\tau + B_1 \sin n\tau + \frac{n^2 A_0}{4(n+1)} \cos(n+2)\tau -$$
$$- \frac{n^2 A_0}{4(n-1)} \cos(n-2)\tau + \frac{n^2 B_0}{4(n+1)} \sin(n+2)\tau - \frac{n^2 B_0}{4(n-1)} \sin(n-2)\tau.$$

Не нарушая общности, можно считать $A_1 = B_1 = 0$, ибо члены $\alpha(A_1 \cos n\tau + B_1 \sin n\tau)$ можно очевидно включить в $q_0(\tau)$.

Теперь третье уравнение системы дает

$$\ddot{q}_2 + n^2 q_2 = -\mu_2 q_0 - 2\mu_0 q_1 \cos 2\tau - 2\mu_0 q_0 \cos 4\tau.$$

[1] См. J. Horn. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 1927, S. 94—100.

Разлагая правую часть этого уравнения в тригонометрический ряд, найдем

$$\ddot{q}_2+n^2q_2=-\left[\mu_2+\frac{n^4}{4(n+1)}-\frac{n^4}{4(n-1)}\right](A_0\cos n\tau+B_0\sin n\tau)-$$
$$-\left[n^2+\frac{n^4}{4(n+1)}\right][A_0\cos(n+4)\tau+B_0\sin(n+4)\tau]-$$
$$-\left[n^2-\frac{n^4}{4(n-1)}\right][A_0\cos(n-4)\tau+B_0\sin(n-4)\tau].$$

Если $n\neq 2$, то решение этого уравнения не будет содержать членов вида $\tau\cos n\tau$ или $\tau\sin n\tau$, и функция $q_2(\tau)$ будет периодической только в том случае, если

$$\mu_2+\frac{n^4}{4(n+1)}-\frac{n^4}{4(n-1)}=0,$$

откуда

$$\mu_2=\frac{n^4}{2(n^2-1)}.$$

По обычному правилу можем определить затем $q_2(\tau)$.

Продолжая таким же образом дальше, определим все q_k и все μ_k. В результате получаем

$$\mu=n^2+\frac{n^4\alpha^2}{2(n^2-1)}+\ldots\qquad(n=4,5,6,\ldots),\tag{19}$$

где невыписанные члены содержат по крайней мере четвертую степень параметра α.

Однако дело, на самом деле, не так просто. Разберем подробно случаи $n=1, 2, 3$. Если $n=1$, то уравнение (18) принимает вид

$$\ddot{q}_1+q_1=-A_0(\mu_1+1)\cos\tau-B_0(\mu_1-1)\sin\tau-A_0\cos 3\tau-B_0\sin 3\tau.$$

Чтобы функция $q_1(\tau)$ получилась периодической, необходимо взять

$$\mu_1=1,\ A_0=0,$$

или же

$$\mu_1=-1,\ B_0=0.$$

В первом случае получим

$$q_1=\frac{B_0}{8}\sin 3\tau.$$

Третье уравнение системы (17) будет в рассматриваемом случае иметь вид

$$\ddot{q}_2+q_2=B_0\left(\frac{7}{8}-\mu_2\right)\sin\tau-\frac{B_0}{8}\sin 3\tau-\frac{9}{8}B_0\sin 5\tau,$$

и, чтобы функция $q_2(\tau)$ получилась периодической, необходимо принять

$$\mu_2=\frac{7}{8},$$

и после интегрирования уравнения

$$q_2=\frac{B_0}{64}\sin 3\tau+\frac{3B_0}{64}\sin 5\tau.$$

Составляя четвертое уравнение системы (17), мы нашли бы, что $\mu_3=\frac{55}{64}$; таким образом при $n=1$ уравнение (16) имеет периодическое решение в том случае, если

$$\mu=1+\alpha+\frac{7}{8}\alpha^2+\frac{55}{64}\alpha^3+\ldots\ .\tag{20}$$

Если бы мы исходили из значения $\mu_1 = -1$, то точно также получили бы

$$\mu = 1 - \alpha + \frac{7}{8}\alpha^2 - \frac{55}{64}\alpha^3 + \ldots . \tag{21}$$

Для всех значений μ, лежащих в промежутке

$$1 - \alpha + \frac{7}{8}\alpha^2 - \frac{55}{64}\alpha^3 + \ldots < \mu < 1 + \alpha + \frac{7}{8}\alpha^2 + \frac{55}{64}\alpha^3 + \ldots \tag{22}$$

уравнение (11) будет иметь решения, которые при $t \to \infty$ не остаются ограниченными.

Следовательно мы получаем целую область резонанса.

Подробный разбор случая $n = 2$ показывает, что в этом случае области резонанса не получается, а получается только одна критическая скорость, отвечающая значению параметра:

$$\mu = 4 + \frac{8}{3}\alpha^2 + \ldots , \tag{23}$$

где невыписанные члены содержат только четные степени α, начиная с четвертой. В случае $n = 3$ опять получаем область резонанса:

$$9 + \frac{81}{16}\alpha^2 - 9\alpha^3 + \ldots < \mu < 9 + \frac{81}{16}\alpha^2 + 9\alpha^3 + \ldots . \tag{24}$$

Вообще при n четном получаются изолированные критические скорости, причем разложение μ по степеням α содержит только четные степени α. При n нечетном, напротив, появляются области резонанса, причем границы этих областей определяются формулами (19); первая нечетная степень α, появляющаяся в этом разложении, будет как раз α^n; это показывает, что ширина критических областей уменьшается по мере увеличения номера области, так что самой широкой областью резонанса является первая.

В дальнейшем мы разберем уравнение (11) другим способом; сейчас же остановимся на сравнении с обычным методом расчета.

При обычном методе расчета мы заменяем $k(\tau)$ его средним значением $\theta + \frac{m\rho^2}{2}$ и следовательно уравнение (11) записываем в форме

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \lambda^2 q = 0,$$

общее решение которого будет иметь период 2π в том случае, если

$$\lambda = n.$$

Эти значения и определяют критические частоты вала, рассчитываемые по обычному способу (будем эти значения отмечать черточкой наверху):

$$\overline{\omega}_n = \sqrt{\frac{c}{\theta + \frac{m\rho^2}{2}}}\,\frac{1}{n}. \tag{25}$$

При более же точном расчете мы получаем для критических скоростей в силу (14) и (19):

$$\lambda^2 = \mu\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = n^2\left[1 - \frac{3n^2-4}{2(n^2-1)}\alpha^2 + \ldots\right], \qquad (n = 2, 4, 5, \ldots)$$

где невыписанные члены содержат α в степенях четвертой и выше.

Обозначая n-ую критическую скорость через ω_n, будем иметь поэтому

$$\frac{\lambda}{n}=1-\frac{3n^2-4}{4(n^2-1)}\alpha^2+\ldots\quad(n=2,4,5,\ldots)$$

и следовательно

$$\frac{\overline{\omega}_n}{\omega_n}=1+\frac{3n^2-4}{4(n^2-1)}\alpha^2+\ldots\quad(n=2,4,5,\ldots)\qquad(26)$$

Отметим крайние случаи: $n=2$ и $n=\infty$:

$$\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2}=1+\frac{2}{3}\alpha^2+\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\omega}_n}{\omega_n}=1+\frac{3}{4}\alpha^2+\ldots\qquad(27)$$

При нечетном n происходит не только смещение критической скорости, но и образование критической области.

Рассмотрим только два случая: $n=1$ и $n=3$. При $n=1$ имеем

$$1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{15}{16}\alpha^2-\frac{75}{128}\alpha^3+\ldots<\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_1}<1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{15}{16}\alpha^2+\frac{75}{128}\alpha^3+\ldots,\qquad(28)$$

а при $n=3$

$$1+\frac{23}{32}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^3+\ldots<\frac{\overline{\omega}_3}{\omega_3}<1+\frac{23}{32}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha^3+\ldots\qquad(29)$$

В частности для смещения критической скорости получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_1}&=1+\frac{15}{16}\alpha^2+\ldots,\\ \frac{\overline{\omega}_3}{\omega_3}&=1+\frac{23}{32}\alpha^2+\ldots,\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

вторая из которых входит в общую формулу (19).

Итак, мы видим, что, обычный способ учета влияния сил инерции на критические частоты вращения вала недостаточен. Истинные частоты оказываются всегда больше получаемых вычислением.

Рассмотрим пример. В одном из опытов[1] было $\zeta=0{,}34$; $\alpha=0{,}175$; $\sqrt{\dfrac{2c}{2\theta+m\rho^2}}=181\,\dfrac{\text{оборот}}{\text{мин.}}$. Наблюдения в этом случае дали для первой критической области границы $169\,\dfrac{\text{оборотов}}{\text{мин.}}-299\,\dfrac{\text{оборотов}}{\text{мин.}}$, а для второго критического числа $95\,\dfrac{\text{оборотов}}{\text{мин.}}$. Производя вычисления по нашим формулам, получим

n	$\omega_n\,\dfrac{\text{обор.}}{\text{мин.}}$	$\overline{\omega}_n\,\dfrac{\text{обор.}}{\text{мин.}}$	$\overline{\omega}_n\,\dfrac{\text{обор.}}{\text{мин.}}$ наблюден.
1	181	170—203	169—209
2	90,5	92,4	95
3	60,3	61,5—61,8	—
4	45,2	46,2	—

[1] G. R. Goldsbrough and H. Baker. The properties of torsional vibrations in reciprocating engine shafts. Part II, Proceedings of the R. Soc. of London, 113, 1927, pp. 272—281.

§ 6. Случай одноцилиндровой машины четырехтактного двигателя

Для случая четырехтактного двигателя удобно в уравнениях (5) сделать подстановку:

$$2\tau = \omega t, \tag{31}$$

ибо тогда правые части этих уравнений будут периодическими функциями от τ с периодом 2π. Однородная система, соответствующая системе (5), будет в рассматриваемом случае иметь вид:

$$\frac{d^2 q_\nu}{d\tau^2} - \frac{4}{\omega^2 \sqrt{k_\nu}} \left\{ \frac{c_{\nu-1,\,\nu}\, q_{\nu-1}}{\sqrt{k_{\nu-1}}} - \frac{(c_{\nu-1,\,\nu} + c_{\nu,\,\nu+1})\, q_\nu}{\sqrt{k_\nu}} + \frac{c_{\nu,\,\nu+1}\, q_{\nu+1}}{\sqrt{k_{\nu+1}}} \right\} = 0. \tag{32}$$

В простейшем случае одноцилиндровой машины получим уравнение, аналогичное (8)

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{4c}{\omega^2 k(\tau)}\, q = 0, \tag{33}$$

где при тех же предположениях, что в § 4, будем иметь

$$k(\tau) = \theta + m\rho^2 \sin^2 2\tau = \theta + \frac{m\rho^2}{2} - \frac{m\rho^2}{2} \cos 4\tau \tag{34}$$

и, следовательно, вводя обозначения

$$\frac{4c}{\omega^2 \left(\theta + \frac{m\rho^2}{2}\right)} = \lambda^2, \qquad \frac{m\rho^2}{2\theta + m\rho^2} = \zeta, \tag{35}$$

будем иметь уравнение

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{\lambda^2}{1 - \zeta \cos 4\tau}\, q = 0, \tag{36}$$

причем надо отыскать те значения λ, при которых это уравнение имеет решения или периодические с периодом 2π, или решения с возрастающей амплитудой. Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что критические области, т. е. области тех значений λ, при которых уравнение (36) имеет решение с возрастающей амплитудой, лежат между теми значениями λ, при которых это уравнение имеет периодическое решение с периодом π.

Производя вычисления, аналогичные вычислениям предыдущего параграфа, мы придем к следующим результатам:

Критические скорости вращения вала отвечают следующим значениям параметра $\mu = \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lambda^2 \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$:

$$\mu = n^2 + \frac{n^4 \alpha^2}{2(n^2 - 4)} + \ldots, \qquad (n = 1, 3, 4, 5, 7, 8 \ldots) \tag{37}$$

где невыписанные члены содержат α в степенях не ниже четвертой

При $n = 2, 6, 10, \ldots$ получаются области резонанса, первая из которых отвечает значениям параметра μ, лежащим в промежутке

$$4 - 4\alpha + \frac{7}{2}\alpha^2 - \frac{55}{16}\alpha^3 + \ldots < \mu < 4 + 4\alpha + \frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{55}{16}\alpha^3 + \ldots, \tag{38}$$

а вторая — области значений

$$36 + \frac{81}{4}\alpha^2 - 36\alpha^3 + \ldots < \mu < 36 + \frac{81}{4}\alpha^2 + 36\alpha^3 + \ldots \tag{39}$$

Если опять обозначить через $\bar{\omega}_n$ критические частоты, рассчитываемые по обычному способу, то будем после простых выкладок иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\omega}_n=\sqrt{\frac{2c}{2\theta+m\rho^2}}\,\frac{2}{n},\quad \frac{\omega_n}{\bar{\omega}_n}=\frac{n}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}}=1+\frac{3n^2-16}{4(n^2-4)}\alpha^2+\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,3,4,5,7,8\ldots)\\
&1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{15}{16}\alpha^2-\frac{75}{128}\alpha^3+\ldots<\frac{\omega_2}{\bar{\omega}_2}<1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{15}{16}\alpha^2+\frac{75}{128}\alpha^3+\ldots,\\
&1+\frac{23}{32}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^3+\ldots<\frac{\omega_6}{\bar{\omega}_6}<1+\frac{23}{32}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha^3+\ldots,\\
&\lim\frac{\omega_n}{\bar{\omega}_n}=1+\frac{3}{4}\alpha^2\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

Таким образом, как и в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, неучитываемое обычным способом расчета влияние сил инерции на критические частоты вала проявляется двояким образом: во-первых, критические частоты вала увеличиваются; во-вторых, при $n=2, 6, 10, 14, \ldots$ происходит образование вместо критических частот критических областей, притом тем более широких, чем меньше номер критической области.

Обратим далее внимание на то, что, поскольку уравнение (11) может быть получено из уравнения (36) простой подстановкой $\tau_1=2\tau$, все результаты § 5 могут быть получены из более общих результатов, относящихся к уравнению (36). А именно, как не трудно сообразить, критическая частота, отвечающая номеру n для случая двухтактного двигателя, совпадает с критической частотой, отвечающей номеру $2n$ для случая четырехтактного двигателя. Это ясно видно, например, при сравнении формул (37) и (19).

§ 7. Оценка полученных формул

Не трудно далее оценить погрешность, которую мы делаем, отбрасывая в приводимых нами формулах члены, содержащие α в четвертой и более высоких степенях.

В самом же деле из общей теории уравнений математической физики известно, что для дифференциального уравнения

$$(py')'-qy+\lambda^2\rho y=0\quad (p(x)>0,\ \rho(x)>0)$$

при граничных условиях

$$y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi)$$

имеет место следующая асимптотическая оценка:[1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\,dx.$$

В нашем случае

$$p=1,\ q=0,\ \rho=\frac{1}{1-\zeta\cos 4\tau},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\zeta\cos 4\tau}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\zeta\cos 2\varphi}}=2\int_0^{\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\zeta\cos u}}.$$

[1] Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1, стр. 393, ГТТИ, 1933.

Вспоминая, что $\frac{\omega_n}{\omega_n} = \frac{n}{\lambda_n}$, приходим к предельной формуле:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\omega_n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\zeta\cos 2\varphi}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\zeta\cos u}}. \tag{41}$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона

$$(1-\zeta\cos u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\zeta^n\cos^n u$$

и, производя интегрирование, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\omega_n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(4k-1)}{2^{4k}k!^2}\zeta^{2k} = 1 + \frac{3}{16}\zeta^2 + \frac{105}{1024}\zeta^4 + \ldots \tag{42}$$

Если же воспользоваться тем, что $\zeta = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ и следовательно[1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\zeta\cos 2\varphi}} = \sqrt{1+\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos 2\varphi}} =$$

$$= \sqrt{1+\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}\left(\frac{1.3\ldots 2k-1}{2.4\ldots 2k}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 + \ldots\right),$$

то получим предельную формулу в другом виде:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\omega_n} = \sqrt{1+\alpha^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}\left(\frac{1.3\ldots 2k-1}{2.4\ldots 2k}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 + \ldots \tag{43}$$

Отметим еще, что вычисление интеграла, входящего в формулу (41) и представляющего собою полный эллиптический интеграл первого рода, может быть произведено очень просто по формуле[2]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha)^2\cos^2\varphi + (1+\alpha)^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M(1+\alpha, 1-\alpha)} = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-\alpha^2})},$$

где $M(a, b)$ есть среднее арифметико-геометрическое двух чисел a и b.

Поэтому предельную формулу (41) можно написать еще в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\omega_n} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{M(1, \sqrt{1-\alpha^2})}. \tag{44}$$

[1] Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, т. II, стр. 91—92. ГТТИ, 1934.

[2] Гурвиц. Теория аналитических и эллиптических функций, стр. 336, ГТТИ, 1933.

Так, при $\zeta = 0{,}34$ и следовательно $\alpha = 0{,}175$ (пример в конце § 5) будем иметь:

$$M(1, \sqrt{1-\alpha^2}) = 0{,}992270,$$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{M(1, \sqrt{1-\alpha^2})} = 1{,}023107,$$

$$1 + \frac{3}{4}\alpha^2 = 1{,}022969,$$

$$1 + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 = 1{,}023101.$$

Отсюда видно, что данные нами разложения до членов α^3 включительно более чем достаточны для всех практических приложений, если только можно говорить о последних, имея в виду, что знание критических скоростей вращения вала чаще всего бывает нужно только для того, чтобы избежать этих опасных скоростей.

Подчеркнем однако следующее обстоятельство. Обычный метод расчета при помощи гипотезы эквивалентного диска сводится в рассматриваемом случае к формуле (25):

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{\frac{2c}{2\theta + m\rho^2}}\,\frac{1}{n}. \tag{25}$$

Если бы мы совсем не принимали во внимание инерцию шатуна и поршня, то мы получили бы критические частоты

$$\bar{\bar{\omega}}_n = \sqrt{\frac{c}{\theta}}\,\frac{1}{n}. \tag{45}$$

При наших обозначениях мы будем иметь

$$\frac{\bar{\omega}_n}{\bar{\bar{\omega}}_n} = \sqrt{\frac{2\theta}{2\theta + m\rho^2}} = \sqrt{1-\zeta} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = 1 - \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^3 + \ldots \tag{46}$$

Следовательно учет инерционных членов при помощи эквивалентного диска сводится к учету поправки, порядок которой определяется величиной α.

Но тогда становится совершенно очевидным, что для тех случаев, для которых мы получили разложения по степеням α, содержащие первую степень этого параграфа, обычный метод расчета при помощи эквивалентного диска является недостаточным.

Итак, те области резонанса, которые отвечают случаю $n=1$ для двухтактного двигателя и случаю $n=2$ для случая четырехтактного двигателя, должны во всяком случае вычисляться по выведенным выше формулам.

§ 8. Случай многоколенчатого вала

Переходя к изучению крутильных колебаний коленчатого вала двухтактного двигателя, выпишем прежде всего соответствующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 q_\nu}{d\tau^2} - \frac{1}{\omega^2 \sqrt{k_\nu(\tau)}}\left\{\frac{c_{\nu-1,\nu}\, q_{\nu-1}}{\sqrt{k_{\nu-1}(\tau)}} - \frac{(c_{\nu-1,\nu} + c_{\nu,\nu+1})\, q_\nu}{\sqrt{k_\nu(\tau)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{c_{\nu,\nu+1}\, q_{\nu+1}}{\sqrt{k_{\nu+1}(\tau)}}\right\} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m) \tag{7}$$

Мы зададим для каждого колена вала величины θ_ν, m_ν и ρ_ν и примем, что

$$k_\nu(\overline{\varphi}_\nu) = \theta_\nu + m_\nu \rho_\nu^2 \sin^2 \overline{\varphi}_\nu; \tag{47}$$

тогда, полагая

$$\overline{\varphi}_\nu = \omega t + \gamma_\nu = \tau + \gamma_\nu, \quad \frac{m_\nu \rho_\nu^2}{2\theta_\nu + m_\nu \rho_\nu^2} = \zeta_\nu, \quad \theta_\nu + \frac{m_\nu \rho_\nu^2}{2} = A_\nu, \tag{48}$$

будем иметь

$$k_\nu(\overline{\varphi}_\nu) = A_\nu [1 - \zeta_\nu \cos(2\tau + 2\gamma_\nu)]. \tag{49}$$

Изменим несколько обозначения, введя вместо q_ν новые функции

$$u_\nu = \frac{q_\nu}{\sqrt{A_\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m); \tag{50}$$

тогда система (7) примет вид:

$$A_\nu \frac{d^2 u_\nu}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{1 - \zeta_\nu \cos(2\tau + 2\gamma_\nu)}} \left\{ \frac{c_{\nu-1,\nu} u_{\nu-1}}{\sqrt{1 - \zeta_{\nu-1} \cos(2\tau + 2\gamma_{\nu-1})}} - \right.$$
$$\left. - \frac{(c_{\nu-1,\nu} + c_{\nu,\nu+1}) u_\nu}{\sqrt{1 - \zeta_\nu \cos(2\tau + 2\gamma_\nu)}} + \frac{c_{\nu,\nu+1} u_{\nu+1}}{\sqrt{1 - \zeta_{\nu+1} \cos(2\tau + 2\gamma_{\nu+1})}} \right\}. \tag{51}$$

Если в этой системе положить все параметры ζ_ν равным нулю и опять вернуться к времени t подстановкой $\tau = \omega t$, то получится та система уравнений, которую приходится решать в обычном методе:

$$A_\nu \frac{d^2 u_\nu}{dt^2} = c_{\nu-1,\nu} u_{\nu-1} - (c_{\nu-1,\nu} + c_{\nu,\nu+1}) u_\nu + c_{\nu,\nu+1} u_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m). \tag{52}$$

Отыскивая решение этой системы по обычному способу в виде

$$u_\nu = a_\nu \cos \overline{\omega} t + b_\nu \sin \overline{\omega} t \qquad (\nu = 0, 1, \ldots m),$$

получим для определения $\overline{\omega}^2$ уравнение m-го порядка, путем приравнивания нулю определителя $m+1$-го порядка (один из корней этого уравнения, который мы не считаем, равен нулю):

$$\Delta(\overline{\omega}) = \begin{vmatrix} c_{0,1} - A_0\overline{\omega}^2 & -c_{0,1} & 0 & \ldots & 0 \\ -c_{0,1} & c_{0,1} + c_{1,2} - A_1\overline{\omega}^2 & -c_{1,2} & \ldots & 0 \\ 0 & -c_{1,2} & c_{1,2} + c_{2,3} - A_2\overline{\omega}^2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -c_{2,3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{m-1,m} - A_m\overline{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{53}$$

Если обозначить положительные корни этого уравнения через $\overline{\omega}^{(1)}$, $\overline{\omega}^{(2)}, \ldots, \overline{\omega}^{(m)}$, то каждому из этих корней будет соответствовать свой тип крутильных колебаний вала, период которых будет соответственно $\frac{2\pi}{\overline{\omega}^{(1)}}, \ldots, \frac{2\pi}{\overline{\omega}^{(m)}}$. Те скорости вращения вала ω, при которых целое число n периодов крутильных колебаний вала будет равно периоду вращения вала, являются очевидно критическими скоростями вала, при которых будет происходить явление резонанса; обозначая эти скорости через $\overline{\omega}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получаем очевидно, что

$$\overline{\omega}_n = \frac{\overline{\omega}}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{54}$$

так что получаем m критических скоростей вращения вала первого порядка $(n = 1)$, m критических скоростей второго порядка $(n = 2)$ и т. д.

Выбрав определенный корень $\bar{\omega}$ уравнения (53), мы должны определить затем коэффициенты a_ν и b_ν в общем случае как величины пропорциональные алгебраическим дополнениям элементов первой строки определителя (53).

В результате получаем m решений системы (52):

$$u_\nu = a_\nu^{(k)} \cos \bar{\omega}^{(k)} t + b_\nu^{(k)} \sin \bar{\omega}^{(k)} t. \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{55}$$

Еще одним решением этой системы будет

$$u_\nu = a^{(0)} + b^{(0)} t \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m), \tag{56}$$

где $a^{(0)} = a_\nu^{(0)}$ и $b^{(0)} = b_\nu^{(0)}$ — произвольные постоянные.

Введем теперь вместо u_ν нормальные координаты v_ν, полагая: [1]

$$u_\nu = \sum_{k=0}^{m} \delta_\nu^{(k)} v_k \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m) \tag{57}$$

и подбирая постоянные коэффициенты $\delta_\nu^{(k)}$ из условий, чтобы имели место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu u_\nu^2 &= \sum_{\nu=0}^{m} v_\nu^2, \\ \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu,\,\nu+1} (u_{\nu+1} - u_\nu)^2 &= \sum_{\nu=0}^{m} L_\nu v_\nu^2. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Из общей теории преобразований такого рода известно, что осуществить такое преобразование можно и что при этом нужно взять

$$L_0 = 0, \quad L_\nu = \bar{\omega}^{(\nu)2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{59}$$

Известно далее, что после преобразования (57) система (52) принимает вид:

$$\frac{d^2 v_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 v_\nu}{dt^2} = -\bar{\omega}^{(\nu)2} v_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{60}$$

общим решением которой будет

$$\left.\begin{aligned} v_\nu &= \alpha_\nu \cos \bar{\omega}^{(\nu)} t + \beta_\nu \sin \bar{\omega}^{(\nu)} t, \\ v_0 &= \alpha_0 + \beta_0 t, \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{61}$$

где α_0, β_0, α_k и β_ν — произвольные постоянные.

Из первого из равенств (58) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu \delta_\nu^{(k)} \delta_\nu^{(l)} = 0, \text{ если } k \neq l \\ &\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu \delta_\nu^{(k)2} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

так что таблица с элементами $\sqrt{A_\nu}\, \delta_\nu^{(k)}$ есть таблица ортогонального преобразования.

[1] См. напр. А. Г. Вебстер. Механика материальных точек, ГТТИ, 1933, стр. 186.

Но тогда систему (57) можно разрешить относительно v_k в следующем виде:

$$v_\nu = \sum_{k=0}^{m} A_k \delta_k^{(\nu)} u_k. \tag{63}$$

Сравнивая формулы (55), (57) и (61), мы заключаем, что за числа δ_ν^k можно взять как раз $a_\nu^{(k)}$, если только позаботиться (что можно сделать), чтобы эти числа удовлетворяли уравнениям (62).

Возвращаемся теперь к нашей исходной системе уравнений (51). Введем в эту систему вместо u_ν новые переменные v_ν по формулам (63). Тогда преобразованная система примет следующий вид:

$$\frac{d^2 v_\nu}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=0}^{m} p_{\nu k}(\tau)\, v_k \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m), \tag{64}$$

где коэффициенты $p_{\nu k}(\tau)$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} p_{\nu k}(\tau) = \sum_{l=0}^{m} \frac{\delta_l^{(\nu)}}{\sqrt{1-\zeta_l \cos(2\tau + 2\gamma_l)}} \Bigg\{ & \frac{c_{l-1,\,l}\,\delta_{l-1}^{(k)}}{\sqrt{1-\zeta_{l-1}\cos(2\tau+2\gamma_{l-1})}} - \\ & - \frac{(c_{l-1,\,l} + c_{l,\,l+1})\,\delta_l^{(k)}}{\sqrt{1-\zeta_l\cos(2\tau+2\gamma_l)}} + \frac{c_{l,\,l+1}\,\delta_{l+1}^{(k)}}{\sqrt{1-\zeta_{l+1}\cos(2\tau+2\gamma_{l+1})}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{65}$$

причем при $\zeta_0 = \zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$ функции $p_{\nu k}(\tau)$, где $\nu \neq k$, обращаются в нуль, а $p_{\nu\nu}(\tau)$ — в $-\overline{\omega}^{(\nu)2}$.

Ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда влияние инерции шатуна сказывается величинами порядка параметров ζ_k. Разлагая функции $p_{\nu k}(\tau)$ по степеням параметров ζ_l, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} p_{\nu k}(\tau) &= \sum_{l=0}^{m} P_{\nu k l}\zeta_l \cos(2\tau + 2\gamma_l) + \ldots, \quad (\nu, k = 0, 1, \ldots m;\ \nu \neq k) \\ p_{\nu\nu}(\tau) &= -\overline{\omega}^{(\nu)2} + \sum_{l=0}^{m} P_{\nu\nu l}\zeta_l \cos(2\tau + 2\gamma_l) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\nu k l} &= \frac{1}{2}\left[c_{l-1,\,l}\left(\delta_{l-1}^{(\nu)}\delta_l^{(k)} + \delta_l^{(\nu)}\delta_{l-1}^{(k)} - 2\delta_l^{(\nu)}\delta_l^{(k)}\right) + \right. \\ &\left. + c_{l,\,l+1}\left(\delta_l^{(\nu)}\delta_{l+1}^{(k)} + \delta_{l+1}^{(\nu)}\delta_l^{(k)} - 2\delta_l^{(\nu)}\delta_l^{(k)}\right)\right] \qquad (\nu, k, l, = 0, 1, \ldots, m) \\ P_{\nu\nu l} &= \left[c_{l-1,\,l}\,\delta_{l-1}^{(\nu)} - (c_{l-1,\,l} + c_{l,\,l+1})\,\delta_l^{(\nu)} + c_{l,\,l+1}\,\delta_{l+1}^{(\nu)}\right]\delta_l^{(\nu)}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Но если продифференцировать обе части равенства (58) по u_l, то получим

$$c_{l-1,\,l}\,u_{l-1} - (c_{l-1,\,l} + c_{l,\,l+1})\,u_l + c_{l,\,l+1}\,u_{l+1} = -\sum_{\nu=0}^{m} \overline{\omega}^{(\nu)2} v_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial u_l} =$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{m} \overline{\omega}^{(\nu)2} A_l \delta_l^{(\nu)} v_\nu.$$

Подставляя сюда выражения (57) для u_ν и отбирая коэффициент при v_ν, получим

$$c_{l-1,\,l}\,\delta_{l-1}^{(\nu)} - (c_{l-1,\,l} + c_{l,\,l+1})\,\delta_l^{(\nu)} + c_{l,\,l+1}\,\delta_{l-1}^{(\nu)} = -\overline{\omega}^{(\nu)2} A_l \delta_l^{(\nu)},$$

и следовательно последнюю из формул (67) можно написать в следующем виде:

$$P_{\nu\nu l} = -A_l \overline{\omega}^{(\nu)2} \delta^{(\nu)2}. \tag{68}$$

Переходим теперь к решению системы (64). Если в этой системе положить $\zeta_0 = \zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$, то мы получим систему

$$\frac{d^2 v_0}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 v_\nu}{d\tau^2} = -\frac{\overline{\omega}^{(\nu)2}}{\omega^2} v_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{69}$$

общим решением которой является

$$v_0 = \alpha_0 + \beta_0 \tau, \quad v_\nu = \alpha_\nu \cos\left(\frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega}\tau\right) + \beta_\nu \sin\left(\frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega}\tau\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{70}$$

где α_0, β_0, α_ν и β_ν — произвольные постоянные.

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами[1] для исследования системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(t)\, x_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{71}$$

где $q_{s\sigma}(t)$ суть периодические функции от t, имеющие период T, нужно составить n независимых решений системы

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn}, \end{matrix}$$

где первый значок обозначает номер решения, а второй — номер функции. Функции

$$x_{k1}(t+T), \quad x_{k2}(t+T), \ldots, x_{kn}(t+T)$$

тоже являются решением системы (71), а потому мы имеем линейные соотношения:

$$x_{kl}(t+T) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_{jl}(t) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

Составим теперь характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \rho, & \ldots; & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Если хотя бы один корень этого уравнения превосходит по модулю 1, то при выборе надлежащих начальных условий решение системы (71) не сможет оставаться ограниченным, когда $t \to \infty$. Напротив, если все корни характеристического уравнения по модулю или меньше 1, или равны по модулю единице, но простые, то все решения системы остаются при $t \to \infty$ ограниченными.

[1] См. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, стр. 175.

Известно далее, что для системы (64), в силу того, что $p_{\nu k}(\tau) = p_{k\nu}(\tau)$, характеристическое уравнение будет возвратным;[1] кроме того, оно имеет вещественные коэффициенты. Корни характеристического уравнения являются непрерывными функциями от параметров $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Если $\zeta_0 = \zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$, то корнями характеристического уравнения являются числа:

$$\rho_{\nu 1} = e^{-2\pi \frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega} i}, \quad \rho_{\nu 2} = e^{-2\pi \frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega} i}, \quad \rho_{01} = 1, \quad \rho_{02} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Из всего сказанного можно вывести, что в общем случае при изменении параметров $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ от нуля корни характеристического уравнения будут оставаться по модулю равными единице. Они могут сделаться бóльшими по модулю, чем единица, только следующим образом. Два корня

$$\rho_{\nu 1} = e^{2\pi \frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega} i} \quad \text{и} \quad \rho_{\nu 2} = e^{-2\pi \frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega} i}$$

должны при изменении параметров $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ совпасть, что может случиться очевидно только при $\rho_{\nu 1} = \rho_{\nu 2} = -1$, или же $\rho_{\nu 1} = \rho_{\nu 2} = +1$, и при дальнейшем изменении параметров $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ два рассматриваемых корня должны меняться таким образом, что один из них будет возрастать по модулю от 1, а другой, напротив, убывать. Но тогда очевидно, что в тот момент, когда корни совпадут, система (64) будет иметь решение, которое при увеличении τ на период (в рассматриваемом случае периодом является π) просто меняет знак или остается без изменения. В обоих случаях указанное решение при увеличении τ на два периода (в рассматриваемом случае на 2π) должно оставаться без изменения, т. е. должно быть периодическим с периодом 2π.

Итак, мы приходим опять к тому же заключению, что и для случая одноколенчатого вала: критические значения и границы критических областей угловых скоростей вала суть те значения ω, при которых система (64) имеет периодические решения с периодом 2π.

Отыщем прежде всего решение системы (64), обращающееся при $\zeta_0 = \zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$ в

$$\left.\begin{aligned} &v_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots m), \\ &v_\nu = \alpha_\nu \cos\left(\frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega}\tau\right) + \beta_\nu \sin\left(\frac{\overline{\omega}^{(\nu)}}{\omega}\tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Ясно, что, ограничиваясь в этом решении членами первого порядка относительно $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$, мы получим из (64) систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2}\left[-\overline{\omega}^{(k)2} v_k + \sum_{l=0}^{m} P_{k\nu l}\zeta_l \cos(2\tau + 2\gamma_l)\, v_\nu\right] \\ &\qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, m) \\ &\frac{d^2 v_\nu}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2}\left[-\overline{\omega}^{(\nu)2} + \sum_{l=0}^{m} P_{\nu\nu l}\zeta_l \cos(2\tau + 2\gamma_l)\right] v_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

---

[1] А. Ляпунов, l. c., стр. 194—198.

Но последнее уравнение есть, в сущности говоря, то же самое уравнение (если ограничиться членами первого измерения относительно параметров ζ), которое мы имели в случае одноколенчатого вала. Вводя обозначение

$$\sum_{l=0}^{m} P_{\nu\nu l}\zeta_l \cos(2\tau+2\gamma_l) = -P_\nu \bar{\omega}^{(\nu)2}\cos(2\tau+2\tau_\nu), \tag{74}$$

где очевидно

$$\left.\begin{aligned} P_\nu\cos 2\tau_\nu &= -\frac{1}{\bar{\omega}^{(\nu)2}}\sum_{l=0}^{m} P_{\nu\nu l}\zeta_l\cos 2\gamma_l = \sum_{l=0}^{m} A_l\delta_l^{(\nu)2}\zeta_l\cos 2\gamma_l,\\ P_\nu\sin 2\tau_\nu &= \sum_{l=0}^{m} A_l\delta_l^{(\nu)2}\zeta_l\sin 2\gamma_l,\\ P_\nu &= \sqrt{\left(\sum_{l=0}^{m} A_l\delta_l^{(\nu)2}\zeta_l\cos 2\gamma_l\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{m} A_l\delta_l^{(\nu)2}\zeta_l\sin 2\gamma_l\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2v_\nu}{d\tau^2} + \frac{\bar{\omega}^{(\nu)2}}{\omega^2}\left[1+P_\nu\cos(2\tau+2\tau_\nu)\right]v_\nu = 0. \tag{76}$$

Поэтому опираясь на результаты § 5, сразу можем высказать следующий результат. Если ограничиться членами первого измерения относительно параметров ζ, то уравнение (64) имеет периодические решения с периодом 2π только для

$$\frac{\bar{\omega}^{(\nu)}}{\omega} = n \qquad (n=2,\ 3,\ldots) \tag{77}$$

и для

$$\frac{\bar{\omega}^{(\nu)}}{\omega} = 1 \pm \frac{P_\nu}{4}. \tag{78}$$

Само решение имеет в первом случае вид

$$v_\nu = \alpha_\nu\cos n\tau + \beta_\nu\sin n\tau + \ldots, \tag{79}$$

а во втором соответственно

$$\left.\begin{aligned} v_\nu &= \sin(\tau+\tau_\nu) + \frac{P_\nu}{16}\sin 3(\tau+\tau_\nu) + \ldots,\\ v_\nu &= \cos(\tau+\tau_\nu) + \frac{P_\nu}{16}\cos 3(\tau+\tau_\nu) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Зная v_ν, мы из уравнений (73) сможем определить $v_k(\tau)$ как периодические функции от τ с периодом 2π. Этого нельзя сделать только в том случае, когда

$$\frac{\omega^{(k)}}{\omega} = n \pm 2.$$

Но в этих частных случаях мы имеем как раз совпадение корней характеристического уравнения, ибо $\rho_{k1} = \rho_{\nu 1}$ и $\rho_{k2} = \rho_{\nu 2}$. Этих частных случаев мы рассматривать не будем.

Итак, для случая многоколенчатого вала двухтактного двигателя мы получаем следующий результат:

Если учитывать влияние инерции шатуна и поршня на крутильные колебания вала только членами первого порядка относительно введенных нами параметров $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$, то обычный метод эквивалентных дисков даст точные критические частоты, за исключением критических частот первого порядка. Вместо последних надо рассматривать области критических частот, определяемые формулами,

$$1-\frac{P_\nu}{4}<\frac{\omega}{\omega^{(\nu)}}<1+\frac{P_\nu}{4} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, m) \qquad (81)$$

где P_ν определяется формулой (75).

Для случая четырехтактного двигателя получается аналогичный результат: обычный метод эквивалентных дисков дает точные критические частоты всех порядков, кроме второго, вместо которой надо рассматривать области критических частот, определяемые формулами:

$$1-\frac{P_\nu}{4}<\frac{\omega}{\overline{\omega}^{(\nu)}}<1+\frac{P_\nu}{4} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, m), \qquad (82)$$

где теперь

$$P_\nu=\sqrt{\left(\sum_{l=0}^{m} A_l \delta_l^{(\nu)2} \zeta_l \cos 4\gamma_l\right)^2+\left(\sum_{l=0}^{m} A_l \delta_l^{(\nu)2} \zeta_l \sin 4\gamma_l\right)^2} \qquad (83)$$

(нужно помнить, что для вала четырехтактного двигателя критические скорости первого порядка определяются формулами $\omega=2\overline{\omega}^{(\nu)}$).

Конечно, на самом деле образование вместо критических частот критических областей происходит и для других порядков, а не только для $n=1$ и $n=2$, но ширина этих областей будет порядка по крайней мере ζ^2, а поэтому рассматривать ближе эти критические области мы не будем.

Приведем пример. Пусть имеем четырехцилиндровый четырехтактный двигатель и пусть имеем следующие данные:

$$\theta_0=0{,}32 \textit{ кг сек}^2 \textit{см}, \ \theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=0{,}024 \textit{ кг сек}^2 \textit{см}, \ m_1=m_2=$$
$$=m_3=m_4=0{,}001 \frac{\textit{кг сек}^2}{\textit{см}},$$
$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=4 \textit{ см}, \ \gamma_0=\gamma_1=\gamma_4=0^\circ, \ \gamma_2=\gamma_3=180^\circ, \ c_{01}=c_{12}=c_{23}=$$
$$=c_{34}=16 \cdot 10^5 \textit{ кг см}.$$

По этим данным вычисляем

$$A_0=\theta_0=0{,}32 \textit{ кг сек}^2\textit{см}, \ A_\nu=\theta_\nu+\frac{m_\nu \rho_\nu^2}{2}=0{,}032 \textit{ кг сек}^2\textit{см} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4),$$

$$\zeta_\nu=\frac{m_\nu \rho_\nu^2}{2\theta_\nu+m_\nu \rho_\nu^2}=0{,}25 \quad (\nu=1, 2, 3, 4).$$

Далее, способом последовательных приближений [1] определяем частоты свободных крутильных колебаний вала и одновременно соответствующие амплитуды колебаний $a_\nu^{(k)}$. В результате получаем таблицу:

[1] См. С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле, стр. 150.

ν	1	2	3	4
$\overline{\omega}^{(\nu)}$	$2860\ \frac{1}{сек}$	7190	10880	13300
$a_0^{(\nu)}$	— 0,267	0,101	— 0,067	0,056
$a_1^{(\nu)}$	0,146	— 0,966	1,549	— 1,924
$a_2^{(\nu)}$	0,535	— 1,033	— 0,500	2,901
$a_3^{(\nu)}$	0,836	— 0,034	— 1,366	— 2,538
$a_4^{(\nu)}$	1,000	1,000	1,000	1,000
P_ν	0,184	0,242	0,248	0,250

при помощи которой можем затем вычислить P_ν по формуле

$$P_\nu = \frac{1}{\sum\limits_{l=0}^{m} A_l a_l^{(\nu)2}} \sqrt{\left(\sum_{l=0}^{m} A_l a_l^{(\nu)2} \zeta_l \cos 4\gamma_l\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{m} A_l a_l^{(\nu)2} \zeta_l \sin 4\gamma_l\right)^2} \tag{84}$$

эквивалентной формуле (83). В результате получаем последнюю строку таблицы. Поэтому например при $\nu = 1$ получаем критическую область второго порядка:

$$2728\ \frac{1}{сек} < \omega < 2992\ \frac{1}{сек},$$

или, переводя в обороты в минуту, $26\,050\ \frac{\text{обор.}}{\text{мин.}} < \omega < 28\,570\ \frac{\text{обор.}}{\text{мин.}}$.

§ 9. Другой метод решения для случая одноцилиндровой машины

Недостаток метода разложения по параметру при решении уравнения

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \mu\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos 2n\tau\right) q = 0 \tag{85}$$

состоит в том, что этот метод требует вычисления не только чисел μ, определяющих критические скорости, но и функций $q_k(\tau)$, входящих в ряд

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n q_n,$$

определяющий соответствующее параметру

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mu_n$$

решение уравнения.

Между тем уравнение (85) принадлежит к числу хорошо изученных уравнений типа Hill'a[1] и поэтому может быть проинтегрировано непосредственно.

Будем искать решение уравнения (85) в виде ряда

$$q(\tau) = e^{i\nu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2ni\tau} \qquad (0 \leqslant Re\,\nu < 2), \tag{86}$$

подставляя это выражение в (85), замечая, что

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos 2n\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} e^{2ni\tau}$$

и приравнивая нулю коэффициенты при всех $e^{2ni\tau+\nu i\tau}$, получаем для определения a_n бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Эта система имеет вид

$$-(2n+\nu)^2 a_n + \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} a_{n-k} = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{87}$$

или, что то же,

$$a_n\left[1 - \frac{\mu}{(2n+\nu)^2}\right] - \frac{\mu}{(2n+\nu)^2}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{|k|} a_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{|k|} a_{n-k}\right) = 0. \tag{88}$$

Составим определитель этой системы: он будет бесконечно большого порядка

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 - \frac{\mu}{(-2+\nu)^2} & \frac{-\mu\alpha}{(-2+\nu)^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{(-2+\nu)^2} & \ldots \\ \ldots & \frac{-\mu\alpha}{\nu^2} & 1 - \frac{\mu}{\nu^2} & \frac{-\mu\alpha}{\nu^2} & \ldots \\ \ldots & \frac{-\mu\alpha^2}{(2+\nu)^2} & \frac{-\mu\alpha}{(2+\nu)^2} & 1 - \frac{\mu}{(2+\nu)^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{89}$$

Этот определитель принадлежит к числу абсолютно сходящихся, так как в нем произведение диагональных элементов и сумма всех недиагональных элементов сходятся абсолютно. Поэтому для того, чтобы существовало отличное от нуля решение системы уравнений (88), необходимо, чтобы

$$\Delta(\nu) = 0. \tag{90}$$

При выполнении этого условия неизвестные a_n определятся по обычному правилу как алгебраические дополнения соответствующих элементов нулевой строки. Легко показать, что при этом ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$

[1] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. II, стр. 231, ГТТИ, 1934.

оказывается сходящимся, но тогда по уравнениям (87) и ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |2n+\nu|^2 |a_n|$$

будет сходящимся; следовательно все проделанные нами операции являются вполне законными, и мы получили точное решение уравнения (85).

Определитель $\Delta(\nu)$ есть аналитическая функция от ν. Из ее выражения видно, что это есть четная периодическая функция, период которой равен 2, причем особенностями этой функции являются полюсы в точках $\nu=2k$, где k — целое число, с главной частью

$$\frac{-\mu\Delta_1(\mu)}{(\nu-2k)^2},$$

где $\Delta_1(\mu)$ обозначает определитель

$$\Delta_1(\mu)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1-\frac{\mu}{2^2} & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{2^2} & \cdots \\ \cdots & \alpha & 1 & \alpha & \cdots \\ \cdots & \frac{-\mu\alpha^2}{2^2} & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & 1-\frac{\mu}{2^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{91}$$

На основании этих свойств функции $\Delta(\nu)$ и в силу равенства $\lim\limits_{\nu\to\infty i}\Delta(\nu)=1$ не трудно заключить, что

$$\Delta(\nu)=-\frac{\mu\pi^2}{4}\,\frac{\Delta_1(\mu)}{\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}+1, \tag{92}$$

и следовательно уравнение $\Delta(\nu)=0$ приводится к следующему виду:

$$\sin^2\frac{\pi\nu}{2}=\frac{\mu\pi^2}{4}\Delta_1(\mu).$$

Введем в рассмотрение новый определитель $D(\mu)$, бесконечный только вправо и вниз:

$$D(\mu)=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots \\ \frac{-\mu\alpha}{2^2} & 1-\frac{\mu}{2^2} & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{2^2} & \cdots \\ \frac{-\mu\alpha^2}{4^2} & \frac{-\mu\alpha}{4^2} & 1-\frac{\mu}{4^2} & \frac{-\mu\alpha}{4^2} & \cdots \\ \frac{-\mu\alpha^3}{6^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{6^2} & \frac{-\mu\alpha}{6^2} & 1-\frac{\mu}{6^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{93}$$

и покажем, что

$$\Delta_1(\mu)=D(\mu)^2.$$

В самом деле это вытекает из того, что $\Delta_1(\mu)$ можно разложить на произведение следующих двух множителей:

$$
\Delta_1(\mu) = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 1-\frac{\mu}{4^2} & \frac{-\mu\alpha}{4^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{4^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & 1-\frac{\mu}{2^2} & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots \\
\cdots & \frac{-\mu\alpha^3}{2^2} & \frac{-\mu\alpha^2}{2^2} & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & 1-\frac{\mu}{2^2} & \frac{-\mu\alpha}{2^2} & \cdots \\
\cdots & \frac{-\mu\alpha^4}{4^2} & \frac{-\mu\alpha^3}{4^2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-\mu\alpha^2}{4^2} & \frac{-\mu\alpha}{4^2} & 1-\frac{\mu}{4^2} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right|
$$

каждый из которых равен $D(\mu)$.

Итак, для определения ν получается окончательно следующее уравнение:

$$\sin^2\frac{\pi\nu}{2} = \frac{\mu\pi^2}{4}D(\mu)^2. \tag{94}$$

Если μ таково, что правая часть этого уравнения окажется больше единицы, то ν непременно будет мнимым, и следовательно одно из решений (86) уравнения (85) не будет оставаться ограниченным при беспредельном увеличении τ. Границами для критических областей значений μ будут являться корни уравнения:

$$\mu D(\mu)^2 = \frac{4}{\pi^2}. \tag{95}$$

Нас интересовали еще периодические решения с периодом 2π. Таким решениям отвечают очевидно, кроме $\nu=1$, еще значения $\nu=0$, т. е. корни уравнения

$$D(\mu)=0. \tag{96}$$

Итак, мы получаем следующий результат: изолированные критические скорости отвечают значениям μ, являющимся корнями уравнения (96), а критические области отвечают промежуткам μ, границами которых являются корни уравнения (95).

Если бы мы разбирали уравнение

$$\frac{d^2\bar{q}}{d\bar{\tau}^2} + \bar{\mu}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos 4n\bar{\tau}\right)\bar{q} = 0, \tag{97}$$

то подстановкой $2\bar{\tau}=\tau$, $\bar{\mu}=4\mu$ мы свели бы дело к уравнению (85). Однако, если функция $q(\tau)$ имеет период 2π, то рассматриваемая как функция от τ, она будет иметь период 4π. Но ясно, что ряд (86) будет иметь период 4π не только при $\nu=0$ и $\nu=1$, но еще при $\nu=\frac{1}{2}$ и $\nu=\frac{3}{2}$. Поэтому в случае уравнения (97) мы получаем еще изолированные критические скорости, отвечающие корням μ уравнения:

$$\mu D(\mu)^2 = \frac{2}{\pi^2}. \tag{98}$$

Функция $D(\mu)$ является целой функцией от μ и голоморфной функцией от α в круге $|\alpha|<1$.

Обозначим через $D_k(\mu)$ определитель, который получается из $D(\mu)$ путем зачеркивания k первых строк и k первых столбцов.

Найдем разложение $D(\mu)$ по степеням α до членов, содержащих α^2 включительно.

Разлагая $D(\mu), D_1(\mu), \ldots$ по элементам первой строки и ограничиваясь членами, содержащими α^2, легко получим:

$$D = D_1 + \frac{\mu\alpha^2}{2^2} D_2 + \ldots,$$

$$D_1 = \left(1 - \frac{\mu}{2^2}\right) D_2 - \frac{\mu^2\alpha^2}{2^2 \cdot 4^2} D_3 + \ldots,$$

$$D_2 = \left(1 - \frac{\mu}{4^2}\right) D_3 - \frac{\mu^2\alpha^2}{4^2 \cdot 6^2} D_4 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и далее

$$\frac{D}{D_1} = 1 + \frac{\mu\alpha^2}{4-\mu} + \ldots = e^{\frac{\mu\alpha^2}{4-\mu} + \ldots},$$

$$\frac{D_k}{D_{k+1}} = 1 - \frac{\mu}{(2k)^2} - \frac{\mu^2\alpha^2}{(2k)^2[(2k+2)^2-\mu]} + \ldots = \left\{1 - \frac{\mu}{(2k)^2}\right\} e^{-\frac{\mu^2\alpha^2}{(4k^2-\mu)[(2k+2)^2-\mu]} + \ldots},$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

Производя перемножение всех отношений $\frac{D_k}{D_k + 1}$ и принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 1$ и что

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{\mu}{(2k)^2}\right] = \frac{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right)}{\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-\mu)[(2k+2)^2-\mu]} = -\frac{\pi \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right)}{8(1-\mu)\sqrt{\mu}},$$

получим

$$D(\mu) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right)}{\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}} + \frac{\mu\alpha^2}{4(1-\mu)}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right) + \ldots .$$

Поэтому уравнение (94) можно еще записать в виде

$$\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right) + \frac{\pi\mu\sqrt{\mu}\,\alpha^2}{8(1-\mu)}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right) + \ldots . \tag{99}$$

Если μ сильно отличается от 1, то очевидно можем написать

$$\nu = \sqrt{\mu} + \frac{\mu\sqrt{\mu}}{4(1-\mu)}\alpha^2 + \ldots,$$

откуда обратно

$$\sqrt{\mu} = \nu\left[1 + \frac{\nu^2}{4(\nu^2-1)}\alpha^2 + \ldots\right]. \tag{100}$$

Для периодических решений ν должно быть целым числом: $\nu = 2, 3, \ldots$, и мы получаем то же решение (19), которое было получено в § 5.

При $\mu=1$ в силу формулы

$$\lim_{\mu\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\mu}}{2}\right)}{1-\mu}=\frac{\pi}{4}$$

мы имеем

$$\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)=1+\frac{\pi^2}{32}\alpha^2+\ldots;$$

отсюда видно, что мы имеем при $\mu=1$ мнимое ν и следовательно одно из решений уравнения (85) не остается ограниченным. Для определения границ области резонанса, окружающей $\mu=1$, положим $\sqrt{\mu}=1+\eta$, $\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)=1$, тогда найдем из (99) уравнение для η, решая которое, получим

$$\sqrt{\mu}=1\pm\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{16}\alpha^2+\ldots, \tag{101}$$

т. е. восстановим результат (22), найденный в § 5.

Научно-Исследовательский Институт математики и механики при ЛГУ

ÜBER DREHSCHWINGUNGEN VON KURBELWELLEN

Von *N. E. Kotschin* (*Leningrad*)

Zusammenfassung

Es wird der Einfluss der hin- und hergehenden Massen auf die Drehschwingungen von Mehrkurbelwellen untersucht. Man kann die linearisierten Differentialgleichungen, die von E. Trefftz aufgestellt sind, mittes Reihen nach Potenzen von kleinen Parametern auflösen und damit die übliche Methode der Berechnung von Drehschwingungen mit der genaueren vergleichen. Es zeigt sich, dass anstatt diskreter kritischer Drehzahlen kontinuierliche Gebiete von solchen kritischen Zahlen existieren können und zwar haben diese für die Grundtöne im Falle der Zweitaktmaschine und für die ersten Obertöne im Falle der Viertaktmaschine dieselbe Grössenordnung, wie die Parameter selbst.
